RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B12 (2009), 51–56

ℓ 進層の Swan 導手と unit-root overconvergent F-isocrystal の特性サイクルについて

By

阿部 知行 (Tomoyuki ABE) *

Abstract

この要約ではまず P. Berthelot による数論的 $\mathscr{D}$-加群の理論を用いて unit-root overconvergent F-isocrystal に対して Swan 導手を定義する. またここで定義した Swan 導手と加藤と斎藤によって幾何学的に定義された定義された Swan 導手を比較する. 応用として加藤と斎藤による Swan 導手の整数性の予想を特異点の解消を仮定して示す.

In this résumé, we define Swan conductors for unit-root overconvergent F-isocrystals using the theory of arithmetic $\mathscr{D}$-modules due to P. Berthelot. Our Swan conductors are compared to the Swan conductors for ℓ-adic sheaves constructed by Kazuya Kato and Takeshi Saito using a geometric method. As an application, we prove the integrality of Swan conductors in the sense of Kato and Saito under the assumption of the resolution of singularities.

§1. $\mathscr{D}^\dagger$-module の理論の復習

この要約では京都における研究集会で話したことをまとめた. 詳しくは [Abe] を参照していただきたい.

R を混合標数 $(0,p)$ の完備離散付値環でその剰余体 k が完全であるものとし, K をその分数体とする. $\mathscr{X}$ を $\mathrm{Spf}(R)$ 上の滑らかな形式的スキームとする. このとき Berthelot によって $\mathscr{X}$ 上の環の層 $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ が定義された. $t_1,\dots,t_d$ を局所座標系とするとこの環は局所的に以下のように書ける.

$$\Gamma(\mathscr{X},\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) = \Big\{\sum a_{\underline{k}}\underline{\partial}^{[\underline{k}]} \mid a_{\underline{k}} \in \mathcal{O}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}, \text{overconvergent}\Big\}.$$

ここで $\underline{k}=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{N}^d$,

$$\underline{\partial}^{\underline{k}} := \Big(\frac{\partial}{\partial t_1}\Big)^{k_1}\cdots\Big(\frac{\partial}{\partial t_d}\Big)^{k_d} \qquad \underline{\partial}^{[\underline{k}]} := \frac{\underline{\partial}^{\underline{k}}}{\underline{k}!}$$

Received March 31, 2008. Revised July 21, 2008.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 14F20, 14F30
* 東京大学・数理科学研究科
e-mail: abetomo@ms.u-tokyo.ac.jp

で, overconvergent とは級数 $\sum a_{\underline{k}} \underline{x}^{\underline{k}}$ の収束半径が >1 であることとする. 古典理論で $\mathscr{D}_X$-加群を考えたように $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-加群を考えることにより古典理論と類似したよいコホモロジー理論が成立すると考えられている. 以下に証明されている事実を簡単にまとめる. 詳しくは [Ber1], [Ber2], [Ber3] を参考.

$f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ を滑らかな形式的スキーム間の射とする. このとき

$$\begin{aligned} f_+ : & D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \to D^b(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) \\ f^! : & D^b_{\mathrm{coh}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) \to D^b(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \end{aligned}$$

が定義でき次の性質を満たす:

1. f が固有射なら f_+ は連接性を保つ.

2. f が滑らかなら $f^!$ は連接性を保つ.

古典理論と同じように f が固有射でないとき (resp. 滑らかでないとき) f_+ (resp. $f^!$) は連接性を保たない. そのためホロノミー加群を定義する必要が出てくる. Berthelot は Frobenius 降下の理論を用いることにより連接的 F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-加群 $\mathscr{E}$(F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-加群とは Frobenius 構造つきの $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-加群のことであるが詳しい定義は割愛する) に対して特性多様体 $\mathrm{VarCar}(\mathscr{E}) \subset T^*X$ (X は $\mathscr{X}$ の特殊ファイバー) を定義した. これを用いると古典理論同様

定義 1.1. 連接的 F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-加群 $\mathscr{E}$ がホロノミー加群とは $\mathscr{E}=0$ か $\dim \mathrm{VarCar}(\mathscr{E}) = \dim X$ のことを言う.

注 1.2. *Berthelot* は古典論同様 $\dim \mathrm{VarCar}(\mathscr{E}) < \dim X$ なら $\mathscr{E} = 0$ を示している。

$Z \subset X$ を因子として $\mathscr{U} := \mathscr{X} \setminus Z$ とする. さらに $j : \mathscr{U} \hookrightarrow \mathscr{X}$ とする. 先ほど説明したように j_+ は連接性を保たない. Berthelot は $j_*\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$ の環の部分層 $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$ を定義し, 次の予想を提起した. この予想から「正しい」$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U},\mathbb{Q}}$-加群は $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-加群 $\mathscr{E}$ で $\mathscr{E}|_{\mathscr{U}}$ がホロノミー加群であるものとするべきであることが見て取れよう.

予想 1.3.

1. f が固有射のとき f_+ はホロノミー加群をホロノミー加群にうつす.

2. $f^!$ はホロノミー加群をホロノミー加群にうつす.

3. $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z$ はホロノミー加群をホロノミー加群にうつす. ここで $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z$ は $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-加群の圏における局所コホモロジー関手である.

4. $\mathscr{E}$ を連接的 F-$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$-加群で $\mathscr{E}|_{\mathscr{U}}$ がホロノミー加群であるものとする. このとき $\mathscr{E}$ はホロノミー加群でである.

今回の私の結果ではこの予想の一部である Caro による次の結果を用いる. Caro はホロノミー加群より強い「overholonomic 加群」を定義し, 次を証明した. 詳しくは [Car1], [Car2], [Car3] を参照.

1. overholonomicity は固有射による push-forward, 滑らかな射による extraordinary pull-back によって保たれる.

2. Unit-root overconvergent F-isocrystal の特殊化は overholonomic である.

3. Overholonomic 加群はホロノミー加群である.

§2. Riemann-Roch の定理

記号はこれまでと同じものを用いる. $K(F\text{-}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ を連接的 $F\text{-}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}$-加群の Grothedieck 群であるとして, $K(\text{hol-}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}})$ をホロノミー加群の Grothendieck 群であるとする. Frobenius 降下を用いることにより [Lau] と同様, 特性準同型

$$\mathrm{Car} : K(F\text{-}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \to K(\mathcal{O}_{T^*X})$$

を定義することができる. これと同じようにして特性サイクル準同型

$$\mathrm{ZCar} : K(\text{hol-}\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \to Z^d(T^*X)$$

も定義できる. ここで $d := \dim X$ であり,Z^d はサイクル群を表す. すると:

補題 2.1. $\tau_{T^*X} : K(\mathcal{O}_{T^*X}) \to \mathrm{CH}(T^*X)_{\mathbb{Q}}$ を *Riemann-Roch* 準同型とする. $\mathscr{E}$ をホロノミー加群とすると

$$\tau_{T^*X} \circ \mathrm{Car}(\mathscr{E}) = \mathrm{ZCar}(\mathscr{E})$$

が成立する.

次の命題は Laumon [Lau] の方法を用いることにより容易に証明できる.

命題 2.2 (Riemann-Roch の定理)**.** $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ を滑らかな形式的スキーム間の固有射とする. 次の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "f"'] & T^*X \arrow[l] & \\
& & T^*Y \times_Y X \arrow[ul, "g"'] \arrow[ull, bend left, "\pi_f"'] \arrow[dl, "\overline{f}"] \\
Y & T^*Y \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

ここで X は $\mathscr{X}$ の特殊ファイバーをあらわし, g は $f^*\Omega^1_{Y/k} \to \Omega^1_{X/k}$ によって導かれるものとする. $\mathscr{T}_f$ を仮想接バンドル (*virtual tangent bundle*), Todd を *Todd* 類とする. すると次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd}
K(F\text{-}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X},\mathbb{Q}}) \arrow[rr, "f_+"] \arrow[d, "\tau_{T^*X}\circ\mathrm{Car}"'] & & K(F\text{-}\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{Y},\mathbb{Q}}) \arrow[d, "\tau_{T^*Y}\circ\mathrm{Car}"] \\
\mathrm{CH}^*(T^*X)_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "\overline{f}_*(\mathrm{Todd}(\pi_f^*\mathscr{T}_f)^{-1}\cdot g^*(\text{-}))"'] & & \mathrm{CH}^*(T^*Y)_{\mathbb{Q}}
\end{tikzcd}$$

次に簡単のため X を射影的スキームとして $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$ という閉移入を取ってくる.

定義 2.3. $D^b_{\mathrm{overhol}}(\mathscr{D}^\dagger_{X,\mathbb{Q}})$ を $D^b_{\mathrm{overhol}}(\mathscr{D}^\dagger_{\widehat{\mathbb{P}}^n,\mathbb{Q}})$ の忠実充満な部分圏で対象が $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_X\mathscr{E} \cong \mathscr{E}$ を満たすものとする.

この定義は閉移入によっていないことが証明できる. さらに $f : X \to Y$ を射影的スキーム間の射とすると f_+ を定義することができる.

補題 2.4. $T^*X \xleftarrow{k} T^*\mathbb{P}^n_k \times_{\mathbb{P}^n} X \xrightarrow{p} T^*\mathbb{P}^n_k$ とする. $\mathscr{E} \in D^b_{\mathrm{overhol}}(\mathscr{D}^\dagger_{X,\mathbb{Q}})$ に対して唯一 $p_*k^*(\alpha) = \mathrm{ZCar}(\mathscr{E})$ となるサイクル $\alpha \in Z^d(T^*X)$ が存在する. 記号の乱用になるが, これのことも $\mathrm{ZCar}(\mathscr{E})$ と書くことにする.

定理 2.5 (相対的な Kashiwara-Dubson の公式)**.** $f : X \to Y$ を射影的スキーム間の射とする. $\mathscr{E}$ を *overholonomic* 加群とする. $i \neq 0$ に対して $\mathscr{H}^i f_+\mathscr{E} = 0$ が成立するとする. $\sigma_X : X \to T^*X$ を零切断とすると

$$f_*(\sigma_Y^*(\mathrm{ZCar}(\mathscr{E}))) = \sigma_X^*(\mathrm{ZCar}(f_+\mathscr{E}))$$

が成立する.

Proof. 証明のアイデアはは形式的スキームの場合の Riemann-Roch の定理と同じであるが, 細かい張り合わせの議論をする必要がある. □

§ 3. $\mathrm{Sw}^{\mathscr{D}}_X$ と主定理

X を滑らかな射影的スキームとして, Z を単純正規交叉因子 (simple normal crossing divisor) とし, $U := X \setminus Z$ とする.

命題 3.1. ある関手

$$\mathrm{sp}_+ : \text{Unit-Isoc}^\dagger(U, X/K) \to D^b_{\mathrm{overhol}}(\mathscr{D}^\dagger_{X,\mathbb{Q}})$$

が存在して, X の滑らかな形式的スキームへの持ち上げが存在するとき特殊化写像に一致する. ここで $\text{Unit-Isoc}^\dagger(U, X/K)$ は U 上の *unit-root F-isocrystal* で Z に沿って *overconvergent* なもののなす圏である.

U 上の自明な $\mathscr{D}^\dagger$-加群として

$$\mathcal{O}_{X,\mathbb{Q}}(^\dagger Z) := \mathrm{sp}_+(\mathcal{O}_{U,\mathbb{Q}})$$

と定義する. ここで $\mathcal{O}_{U,\mathbb{Q}}$ は自明な U 上の overconvergent isocrystal である.

定義 3.2. *E を U 上の unit-root overconvergent isocrystal とする. このとき E の Swan 導手を*

$$\mathrm{Sw}^{\mathscr{D}}_X E := (-1)^d\Big\{\mathrm{rk}(E)\cdot\big(\mathrm{ZCar}(\mathcal{O}_{X,\mathbb{Q}}(^\dagger Z))\cdot[X]\big) - \big(\mathrm{ZCar}(\mathrm{sp}_+E)\cdot[X]\big)\Big\} \in \mathrm{CH}_0(X)$$

として定義する.

定理 3.3. *次の cartesian な図式を考える:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "f_U"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r] & X. \end{tikzcd}$$

ここで X, Y は滑らかな射影的スキームとし, $W := Y \setminus V$, $Z := X \setminus U$ を単純正規交叉因子とする. このとき

$$\mathrm{Sw}^{\mathscr{D}}_X(f_+\mathcal{O}_{Y,\mathbb{Q}}(^\dagger W)) = \mathrm{Sw}^{\mathrm{KS}}_X(f_{U*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

が $\mathrm{CH}_0(X)$ で成立する. ここで $\mathrm{Sw}^{\mathrm{KS}}_X$ は斎藤と加藤 [KS] により定義された Swan 導手である.

Proof. $\mathrm{Sw}^{\mathscr{D}}_X(f_+\mathcal{O}_{Y,\mathbb{Q}}(^\dagger W))$ を計算するために相対的な Kashiwara-Dubson の公式を用いる. これにより normal cone の定めるサイクル $[N^*_{Z/X}]$ を用いて具体的に計算できる. $\mathrm{Sw}^{\mathrm{KS}}_X(f_{U*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ も交叉理論を用いて計算することにより実際に一致していることが示せる. □

さて, $\Lambda/\mathbb{Q}_p$ を完全分岐拡大として $\mathrm{Rep}^{fin}_\Lambda\pi_1(U)$ を $\pi_1(U)$ の有限次元 Λ-ベクトル空間による表現で有限群を分解するものの成す圏とする. $K := \Lambda\otimes_{\mathbb{Q}_p} W(k)$ とおく.

命題 3.4.

$$G^\dagger : \mathrm{Rep}^{fin}_\Lambda\pi_1(U) \to \text{Unit-Isoc}^\dagger(U, X/K)$$

という関手で Crew-Katz の関手 [Cre]

$$G : \mathrm{Rep}^{fin}_\Lambda\pi_1(U) \to \text{Unit-Isoc}(U/K)$$

の延長になっているものが唯一存在する.

ここで簡単のため $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C} \cong \overline{\mathbb{Q}}_p$ という同型を固定する. また, $\Lambda \ni \zeta_{p^n}$ と仮定する.

定義 3.5. $\chi : \pi_1(U) \to \mathbb{C}^\times$ を指標として群 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ を分解すると仮定する. このとき

(i) $\mathcal{F}(\chi)$ を滑らかな $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-層で $\chi_\ell : \pi_1(U) \to \mathbb{C}^\times \cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ に対応するものとする.
(ii) $\mathscr{E}(\chi)$ を $\mathrm{sp}_+(G^\dagger(\chi_p))$ とする.

この記号を用いて主定理は以下のようになる:

定理 3.6. 標数 p での特異点の解消を仮定する. このとき

$$\mathrm{Sw}^{\mathscr{D}}_X \mathscr{E}(\chi) = \mathrm{Sw}^{\mathrm{KS}}_X \mathcal{F}(\chi)$$

が成立する.

これの系として

系 3.7. $\mathcal{F}$ を U 上の任意の滑らかな $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-層とする. 標数 p での特異点の解消を仮定すると

$$\mathrm{Sw}^{\mathrm{KS}}_X \mathcal{F} \in \mathrm{Im}(\mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_0(X)_{\mathbb{Q}})$$

が成立する.

References

[Abe] T. Abe, *Comparison between Swan conductors and characteristic cycles*, preprint (2007).

[Ber1] P. Berthelot, *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 29, p.185–272 (1996).

[Ber2] P. Berthelot, *$\mathscr{D}$-modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius*, Mém. Soc. Math. Fr. 81 (2000).

[Ber3] P. Berthelot, *Introduction à la théorie arithmétique des $\mathscr{D}$-modules*, Astérisque 279, p.1–80 (2002).

[Car1] D. Caro, *$\mathscr{D}$ modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions L*, Ann. Inst. Fourier 54, p.1943–1996 (2005).

[Car2] D. Caro, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques associés aux isocristaux surconvergents. cas lisse*, preprint (2005), available at http://arxiv.org/abs/math/0510422.

[Car3] D. Caro, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes*, preprint (2005), available at http://arxiv.org/abs/math/0502442.

[Cre] R. Crew, *F-isocrystals and p-adic representations*, in *Algebraic geometry*, Proc. Sympos. Pure Math. 46, p.111–138, Amer. Math. Soc. (1987).

[KS] K. Kato and T. Saito, *Ramification theory for varieties over a perfect field*, Ann. of Math. (2) 168 (2008), no. 1, p.33–96.

[Lau] G. Laumon, *Sur la catégorie dérivée des $\mathcal{D}$-modules filtrés*, in *Algebraic geometry*, Lecture Notes in Math. 1016, p.151–237, Springer-Verlag (1983).