RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B12 (2009), 249–261

On a versal family of curves of genus two with $\sqrt{2}$-multiplication

By

Kiichiro HASHIMOTO * and Yukiko SAKAI **

Abstract

This note is a summary of our study on curves of genus two having real multiplication by the quadratic order of discriminant 8. We give an elementary and concrete description of the family of such curves, including the classical results of G. Humbert. While Humbert's work were based on theta functions and the theory of Kummer surfaces, our study is based on algebraic correspondences on hyperelliptic curves which are the *lifts* of algebraic correspondences on a conic in $\mathbb{P}^2$ associated with Poncelet's quadrangle. Our main results are simple concrete description of the correspondences in the geometry of conics, and a proof that they induce the endomorphism ϕ on the jacobian satisfying $\phi^2 - 2 = 0$. We also give a versal family of genus two curves having $\sqrt{2}$-multiplication.

The details of the proofs, as well as some applications, will appear elsewhere.

§ 1. Introduction

この研究の動機となる背景の一つに, $GL(2)$-type のアーベル多様体の構成と $GL(2)$-予想を具体例を用いて検証することが挙げられる.

$\mathbb{Q}$ 上のアーベル多様体 A は $E := \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)\otimes\mathbb{Q}$ が $[E : \mathbb{Q}] = \dim(A)$ をみたす可換体となるとき $GL(2)$-type と呼ばれる. このとき, $\mathcal{O} := \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\ A$ は 代数体 E の整環とみなせるが, A の Tate 加群 $T_\ell(A)$ における ℓ-進ガロア表現から有限体上の 2 次元ガロア表現が生じる. すなわち, $T_\ell(A)\otimes\mathbb{Q}_\ell$ は $E_\ell = E\otimes\mathbb{Q}_\ell$ 上の rank 2 の自由加群であるこ

Received March 31, 2008. Revised June 25, 2008.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 11G10, 11G15, 14H45
Key Words: *curves of genus two, real multiplication, abelian variety of $GL(2)$-type*
*Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Sci. Eng., Waseda University, Japan.
e-mail: `khasimot@waseda.jp`
**Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Sci. Eng., Waseda University, Japan.
e-mail: `y.sakai-ha@akane.waseda.jp`

とから, ℓ 上にある E の素イデアル $\mathcal{L}$ を取ってこの表現を $\mathrm{mod}\,\mathcal{L}$ で還元すると有限体 $\mathbb{F} := \mathcal{O}_\ell/\mathcal{L}$ 上の 2 次のガロア表現を得る:

$$\overline{\rho}_\ell : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \quad \longrightarrow \quad \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}).$$

$GL(2)$-予想とは, この表現が楕円モジュラー形式に付随するガロア表現であることを主張するものである. この予想はいわゆる Serre 予想の特殊な場合であるが, 後者に関しては最近著しい進展がある (参考文献 [5],[6]).

しかしながら, 知られている $GL(2)$-type のアーベル多様体の具体例はごくわずかである. 実際, そのような具体例の組織的な構成法は, 以下に述べる場合を除くとヘッケ作用素の同時固有関数である楕円モジュラー形式に付随する「志村のアーベル多様体」のみである (cf. [11]).

一方, $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体をその全自己準同型環 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$ の構造によって分類するとき, その同型類の全体は数論的多様体をなすことはよく知られている. 例えば, $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$ が g 次の総実代数体 F の整数環 $\mathcal{O}_F$ を含むような g 次元アーベル多様体 A のモジュライ空間は F に対するヒルベルト・モジュラー多様体となる. このような A は $\mathcal{O}_F$ を「実乗法」に持つという. 特に, 実二次体の場合が 20 世紀初頭の数学者 G. Humbert によって詳細に研究されている (cf. [4]).

Humbert はテータ関数および Kummer 曲面の理論を用いて, 2 次の実乗法を持つアーベル関数を研究したが, その中でも特に, 種数 2 の代数曲線 X のヤコビ多様体が判別式 $\Delta = 5, 8$ それぞれの実二次体の整数環を実乗法に持つ場合に, X を射影直線の 2 重被覆と見たときの分岐点集合がみたす条件とポンスレの定理との間に成り立つ興味深い関係を明らかにした. その関係より, 曲線 X の定義方程式を $y^2 = f(x)$,

$$f(x) = \begin{cases} (x-x_1)\cdots(x-x_5), & \Delta = 5, \\ x(x-x_1)\cdots(x-x_4), & \Delta = 8 \end{cases}$$

と正規化したとき, X が $\Delta = 5, 8$ の実乗法を持つための条件式 $H_5(x_1, \ldots, x_5) = 0$, $H_8(x_1, \ldots, x_4) = 0$ を求めている. これらを Humbert の「モジュラー方程式」と呼ぶ.

20 世紀後半になると, Griffiths と Harris は「ポンスレの n 角形」を与えることと, 一つの楕円曲線とその n 等分点を与えることとが同値であることを示し, 更に Mestre [8] はこの対応を利用して $\Delta = 5$ の実乗法を持つ種数 2 の代数曲線族でそのヤコビ多様体が $GL(2)$-type となるものを構成している (cf. [3]). Brumer はこれを含むより一般的な曲線族を構成した. また筆者の一人は, [10] において, $\Delta = 5$ の実乗法を持つ種数 2 の曲線の一般論を初等的に展開しまとめた. その主要な結果は以下の通りである.

(i) Humbert [4] のモジュラー方程式の ポンスレの定理を用いた初等的な証明.

(ii) ポンスレの定理による, この様な曲線 X 上の 2 次の代数対応の具体的構成, 及び, それが $\mathrm{Pic}^0(X)$ の上で $\phi_i^2 + \phi_i - \mathrm{id} = 0$ をみたす自己準同型を引き起こすこと.

(iii) Humbert が与えたモジュラー方程式 $H_5(x_1, \ldots, x_5) = 0$ が定める超曲面の有理性,

およびその一般解の有理関数表示.

(iv) Mestre の曲線族の独立な二つの方法による再構成, およびこの曲線族が"versal" であることの証明.

本稿の目的は, 上記の (i)–(iv) の結果と同様な事柄を $\Delta = 8$ の場合に調べることである. 更に曲線の方程式がより一般な $y^2 = (x - x_1) \cdots (x - x_6)$ の場合について

(v) Humbert のモジュラー方程式を $x_1, \ldots, x_6$ の関係式として記述し, その対称性を調べること

も目標にする. ただし, 読者の便宜のため, $\Delta = 5$ の場合の結果についても簡単に復習する.

§ 2. Humbert の結果

まず, ポンスレの定理を述べる. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の双対空間を $(\mathbb{P}^2)^* = \{\mathbb{P}^2$ 内の直線 $\}$, また, $D \subset \mathbb{P}^2$ を 2 次曲線 (conic) とした時 D^* で D の接線全体の集合を表すことにする. 以下, 本稿を通じて, D_0, D_1 は 4 点で交わる射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の相異なる 2 次曲線を表すものとする. D_0 上の点列 $K = (P_1, \ldots, P_{n+1})$ が D_1 に関する ポンスレの折れ線である, とは $P_{i+1} \neq P_{i-1}$ かつ P_i と P_{i+1} を結ぶ直線 P_iP_{i+1} が全て D_1 に接することをいう. 更に $P_1 = P_{n+1}, P_1 \neq P_i$ $(i \neq n+1)$ のとき K を ポンスレの n 角形という.

Theorem 2.1 (Poncelet, 1822). D_0, D_1 を 4 点で交わる射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の相異なる 2 次曲線, n を 3 以上の整数とする. このとき $P_iP_{i+1} \in {D_1}^*, P_{n+1} = P_1$ $(1 \leq i \leq n)$ をみたす D_0 上の n 個の点列 が存在するなら, 任意の $Q_1 \in D_0$ に対し $Q_iQ_{i+1} \in {D_1}^*, Q_{n+1} = Q_1$ をみたす点列 $Q_2, \ldots, Q_{n+1}$ が存在する. □

Theorem 2.2 (Humbert [4], $\Delta = 8$). $K = (P_1, \ldots, P_5 = P_1)$ を D_0, D_1 に対するポンスレの 4 角形とし, P_5, P_6 を D_0 と D_1 の交点とする. このとき, D_0 の 2 重被覆 X でその分岐点がちょうど $\{P_1, \ldots, P_6\}$ となるものは種数 2 の曲線で, そのヤコビ多様体は 二つの楕円曲線の積に分解する（$\Delta = 4$ の場合[1]）か $\Delta = 8$ の実乗法を持つ. 後者の場合は $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \subseteq \mathrm{End}(\mathrm{Jac}X)$ となる. □

Humbert [4] は $\Delta = 5$ の場合に対しても ポンスレの 5 角形との関係を示している. さらに $\Delta = 5$, $\Delta = 8$ の各場合について, 実乗法を持つ条件が曲線の定義方程式の言葉で記述されている. 以下にその結果 (モジュラー方程式) を引用しておく.

Theorem 2.3 (Humbert [4], $\Delta = 5$). X を次式で定義される種数 2 の曲線とする.

$$X: \quad y^2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5). \tag{2.1}$$

[1] [4] では, 2 次 Siegel 上半平面の点 τ (周期行列) の"singular relation" とその判別式 Δ が定義されている. Δ が非平方数のとき, この条件は対応するアーベル曲面が実乗法を持つことを意味する.

このとき, Jac(X) が $\Delta = 5$ の実乗法を持つ必要十分条件は $x_1, \ldots, x_5$ の適当な並べ替えに対して等式 $H_5(x_1, \ldots, x_5) = 0$ が成立することである．ここに H_5 は

$$\begin{aligned} H_5(x_1, \ldots, x_5) \;=\; & 4\Big(x_1^2(x_3-x_4)+x_2^2(x_4-x_5)+x_3^2(x_5-x_1)+x_4^2(x_1-x_2)+x_5^2(x_2-x_3)\Big) \\ & \times\Big(x_1^2(x_3-x_4)x_2x_5+x_2^2(x_4-x_5)x_1x_3+x_3^2(x_5-x_1)x_2x_4+x_4^2(x_1-x_2)x_3x_5+x_5^2(x_2-x_3)x_1x_4\Big) \\ & -\Big(x_1^2(x_3-x_4)(x_2+x_5)+x_2^2(x_4-x_5)(x_3+x_1)+x_3^2(x_5-x_1)(x_2+x_4) \\ & +x_4^2(x_1-x_2)(x_3+x_5)+x_5^2(x_2-x_3)(x_1+x_4)\Big)^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

□

Theorem 2.4 (Humbert [4]). X を次式で定義される種数 2 の曲線とする．

$$X : y^2 = x(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

このとき, Jac(X) が $\Delta = 8$ の実乗法を持つ必要十分条件は $x_1, \ldots, x_4$ の適当な並べ替えに対して等式 $H_8(x_1, \ldots, x_4) = 0$ が成立することである．ここに H_8 は

$$\begin{aligned} H_8(x_1,x_2,x_3,x_4) = & 4x_1x_2x_3x_4\big((x_1+x_3)(x_2+x_4)-2(x_1x_3+x_2x_4)\big)^2 \\ & -(x_1-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_1x_3+x_2x_4)^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

□

§ 3. 平面 2 次曲線上の代数対応

本論文の課題である, 実乗法を持つ代数曲線の構成において重要になるのが平面 2 次曲線 (conic) に対する ポンスレ型の代数対応 T である．$D_0, D_1 \subset \mathbb{P}^2$ を 4 点で交わる 2 次曲線, P を D_0 上の一般の点とする．P から D_1 には 2 本の接線 ℓ, ℓ' が引け, それぞれの D_0 との (P とは異なる) 交点 Q_1, Q_1' が得られる．このようにして $P \mapsto \{Q_1, Q_1'\}$ なる 2 次の代数対応

$$T = \{(P,Q) \in D_0 \times D_0 \mid \ell := PQ \in {D_1}^*\}$$

が得られる．最初の問題は, T の定義方程式を具体的に求めることであるが, さしあたり, D_0 を $\mathbb{P}^1$ と同一視するのが便利である．よって, ここでは D_0 として

$$D_0 : \quad y = x^2 \tag{3.1}$$

を取り, $D_0 \ni (x, x^2) \mapsto x \in \mathbb{P}^1$ によって D_0 と $\mathbb{P}^1$ を同一視する．もう一方の 2 次曲線 D_1 は一般形

$$D_1 : c_6 + c_4x + c_1x^2 + c_5y + c_3xy + c_2y^2 = 0, \quad c_i \in \mathbb{C} \tag{3.2}$$

で与えておく．このとき, 上記の代数対応を考えると, D_0 上の一般の位置にある 2 点 $P = (x, x^2)$, $Q = (z, z^2)$ を通る直線が D_1 に接する条件を書き下すことにより次の結果

を得る. $\mathbb{P}^2$ における 2 つの 2 次曲線 D_0, D_1 が上式 (3.1), (3.2) で与えられるとき, D_0 上のポンスレ型の代数対応 T の定義方程式は次式で与えられる :

$$A_1(x,z) := a_6 + a_4xz + a_1x^2z^2 + a_5(x+z) + a_2xz(x+z) + a_3(x+z)^2 = 0, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6) = (&-4c_1c_2 + c_3^2, -2(2c_2c_4 - c_3c_5), c_5^2 - 4c_2c_6,\\ &-2(c_3c_4 - 2c_1c_5), 2(c_4c_5 - 2c_3c_6), c_4^2 - 4c_1c_6).\end{aligned} \tag{3.4}$$

ここで, $A_1(x,z)$ は x,z の対称式で各変数について 2 次式であることに注意する. また, (3.4) を逆に解いて $\{a_i\}$ から $\{c_i\}$ を求めるには根号が必要であるが, 次の結果は 2 次曲線 D_1 が $A_1(x,z)$ から有理的に決定されることを示している. $c_1,\dots,c_6$ を独立変数とし,

$$\lambda := 8(c_2c_4^2 - c_3c_4c_5 + c_1c_5^2 - 4c_1c_2c_6 + c_3^2c_6)$$

とおく. $\lambda \neq 0$ のとき, $(a_1,\dots,a_6)$ を (3.4) で定めると次の恒等式が成立する :

$$\begin{cases}\lambda c_1 = (a_4^2 - 4a_1a_6)/2,\\ \lambda c_2 = (a_2^2 - 4a_1a_3)/2,\\ \lambda c_3 = a_2a_4 - 2a_1a_5,\\ \lambda c_4 = a_4a_5 - 2a_2a_6,\\ \lambda c_5 = 2a_3a_4 - a_2a_5,\\ \lambda c_6 = (a_5^2 - 4a_3a_6)/2.\end{cases} \tag{3.5}$$

次に上で述べた代数対応 T の合成を考える. $T^2 = T \circ T$ は 4 価の代数対応になるが, T の定義よりそのうちの 2 価は恒等写像であり, 残りの 2 価の部分が, 長さ 2 のポンスレの折れ線によって得られる点を対応させる代数対応 T_2 を定める. 作図から容易にわかるように, T_2 の定義方程式 $A_2(x,z)=0$ は終結式を用いて

$$A_2(x,z) = \frac{1}{(x-z)^2}\mathrm{Res}_u\Big(A_1(x,u),\, A_1(z,u)\Big)$$

によって与えられる. 右辺の $(x-z)^2$ は恒等写像にあたる部分である. 係数を整理すれば $A_2(x,z)$ は (3.3) と同様に

$$A_2(x,z) = a'_6 + a'_4xz + a'_1x^2z^2 + a'_5(x+z) + a'_2xz(x+z) + a'_3(x+z)^2$$

のように書ける. ここで $a'_1,\dots,a'_6$ は $a_1,\dots,a_6$ の 4 次同次式である.

以上の結果を用いると, ポンスレの 4, 5 角形に関して次の補題が得られる.

Lemma 3.1. D_0, D_1 に対してポンスレの 4 角形が得られるための必要十分条件は, 上記の $A_2(x,z)$ が完全平方式になることである.

$$A_2(x,z) = c \cdot B(x,z)^2, \qquad (c \text{ は定数}).$$

Remark 1. $B(x,z)=0$ は D_0 の対合写像 (involution)

$$(x,x^2)\in D_0 \mapsto (z,z^2)\in D_0$$

を与えている. このとき $z=\overline{x}$ とも記す.

Lemma 3.2. D_0, D_1 に対してポンスレの 5 角形が得られるための必要十分条件は 上記の $A_1(x,z), A_2(x,z)$ に対し,

$$\frac{1}{(x-z)^2}\mathrm{Res}_u(A_2(u,z),A_2(u,x))=c'\cdot A_1(x,z), \qquad (c' \text{ は定数})$$

が成り立つことである.

§4. 種数 2 の曲線とポンスレ型代数対応の持ち上げ

一般に種数 2 の曲線は超楕円曲線となる. これを射影直線 $\mathbb{P}^1$ の二重被覆とみなすと, ちょうど 6 個の点で分岐する. 本研究の基本的アイデアの一つは, $\mathbb{P}^1$ を射影平面上の 2 次曲線 D_0 で置き換え, 前節の結果を種数 2 の曲線と関連付けることである.

標題の条件とは異なるが, まず $\Delta=5$ の場合の結果について述べる (詳細は [10] 参照). この場合は D_0 に内接するポンスレの 5 角形の 5 頂点 $P_1,\ldots,P_5$ をその分岐点に選ぶ. 分岐点が 1 個不足するが, それは 2 つの 2 次曲線が一般に 4 つの交点を持つことから D_0 と, ポンスレの 5 角形に内接する 2 次曲線 D_1 の交点のうちから 1 個を選んで分岐点とすることにする. この点を P_6 とし, 今後のために

$$P_i=(x_i,x_i^2) \qquad (1\le i\le 6)$$

と定める. このとき $A_1(x,x_6)=c\,(x-\alpha)^2, A_2(x,x_6)=c'(x-\beta)^2$ をみたす α,β がそれぞれ唯一存在する（c,c' は定数）.

以上の設定の下で, 超楕円曲線

$$X:\quad y^2=f(x)\ :=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6) \tag{4.1}$$

が得られる. ここでは詳しく述べないが, X の同型類は P_6 の選び方に依存しないことが示される. 更に, X 上の有理関数

$$j(x):=(x-x_6)(x-\alpha)(x-\beta)$$

を考える. これを用いて X 上の 2 次の代数対応 $\hat{T}\subset X\times X$ を次のように定める:

$$\big((x,y),(u,w)\big)\in\hat{T} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} j(u)y\ =\ j(x)w,\ A_1(x,u)=0. \tag{4.2}$$

このとき次の定理が成り立つ (詳細は [10] 参照).

Theorem 4.1 ([10], $\Delta = 5$). 代数対応 $\hat{T}$ は 3 個の既約成分 $\hat{T}_1$,$\hat{T}_2$, および id から成る. $\hat{T}_i$ $(i = 1, 2)$ は D_0 上の ポンスレ型代数対応 T_i $(i = 1, 2)$ の持ち上げである. さらに, $\hat{T}_i$ は $\mathrm{Pic}^0(X)$ の自己準同型 ϕ を引き起こし, 次式が成立する.

$$\phi^2 + \phi - 1 = 0.$$

□

一方 $\Delta = 8$ の場合は ポンスレの 4 角形の 4 頂点 $P_1, \ldots, P_4$ の他にもう 2 点を選ぶ必要がある. $\Delta = 5$ の場合と同様に $D_0 \cap D_1$ からこれらを選ぶ. ここで, D_0, D_1 の 4 つの交点 $D_0 \cap D_1 = \{P_5, P_5', P_6, P_6'\}$ は対合 (involution) $B(x, z) = 0$ によって 2 点ずつ対になって, $B(x_5, x_5') = 0, B(x_6, x_6') = 0$ をみたすことがわかる. 更に $A_1(x, x_5) = c(x - \alpha)^2, A_1(x, x_6) = c'(x - \beta)^2$ をみたす $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ がそれぞれ唯一決まる. ここでのポイントは 6 個の分岐点として, ポンスレの 4 角形の頂点 $P_i(1 \leq i \leq 4)$ と $P_5, P_6 \in D_0 \cap D_1$ を選ぶことである. すなわち $B(x_5, x_6) \neq 0$ となるように D_0, D_1 の 2 つの交点を選んで, 種数 2 の曲線を方程式 (4.1) によって定める. この曲線上への前節の D_0 上の代数対応 T の「持ち上げ」を考える. その際, 鍵になるのが次の補題である. まず P_∞ を $x = \infty$ に対応する D_0 の点とし, P_∞ から D_1 への 2 本の接線が再び D_0 と交わる点を $Q_\infty, Q_\infty' \in D_0$ とする.

Lemma 4.2 ($\Delta = 8$). Q_∞, Q_∞' の座標を $Q_\infty = (u_\infty, {u_\infty}^2)$, $Q_\infty' = (u_\infty', {u_\infty'}^2)$ とし, X 上の有理関数を

$$j(x) := \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - \alpha)(x - \beta)}{(x - u_\infty)^3 (x - u_\infty')^3}$$

とおくと, 次が成り立つ. ただし, $B(x, \overline{x}) = 0$.

$$\begin{aligned} &(1) \quad j(\overline{x}) \;=\; -\,j(x), \\ &(2) \quad A_1(u, x_i) = 0 \ (i = 1, 2) \Rightarrow f(x_1) f(x_2) \;=\; j(u)^2. \end{aligned}$$

ここで定義した有理関数 $j(x)$ により, $\Delta = 8$ の場合の代数対応 T の「持ち上げ」の存在とその表示式を与えることが可能になる.

Theorem 4.3 ($\Delta = 8$). 超楕円曲線 X を上のように定めるとき, D_0 上のポンスレ型代数対応 T を X 上の 2 次 の代数対応 $\hat{T}$ に持ち上げることができる. $\hat{T} \subset X \times X$ は次のように定まる :

$A_1(x, u_i) = 0$ $(i = 1, 2)$, $B(u_1, u_2) = 0$ とするとき

$$\Big((x, y), (u_i, w_i)\Big) \in \hat{T} \quad (i = 1, 2) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad w_1 w_2 \;=\; j(x). \tag{4.3}$$

このとき, $\hat{T}$ は $\mathrm{Pic}^0(X)$ の自己準同型 ϕ_i を引き起こし, 次式が成立する :

$$\phi^2 - 2 = 0.$$

□

最後の関係式は, 以下の様に因子の計算から証明できる.

$$\begin{aligned}\phi &: (u,w) \mapsto (x_1,y_1)+(x_2,y_2),\\ \phi^2 &: (u,w) \mapsto (u,w)+(\overline{u},\overline{w_1})+(u,w)+(\overline{u},\overline{w_2})\\ &\qquad = (u,w)+(\overline{u},\overline{w_1})+(u,w)+(\overline{u},-\overline{w_1})\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\phi^2-2\mathrm{id} : (u,w) &\mapsto (\overline{u},\overline{w_1})+(\overline{u},-\overline{w_1})\\ &= \mathrm{div}(x-\overline{u})_0 \sim \mathrm{div}(x-\overline{u})_\infty = \mathrm{div}(x)_\infty\end{aligned}$$

となり, これは $\mathrm{Pic}^0(\mathrm{X})$ で ϕ^2-2 が ゼロ写像であることを示している.

Remark 2. 上記の定理における代数対応 $\hat{T}$ の定義式 (4.3) は正確には $X\times X$ の座標関数 x,y,u,w の有理式ではない : u_1,u_2 は u の 2 次方程式 $A_1(x,u)=0$ の根であるから 2 次の代数関数であることに注意する. 実際には, (4.3) が u_1,u_2, および w_1,w_2 に関して対称形であることから $\hat{T}$ が有理的に表示されることがわかる.

また, $B(x_5,x_6)=0$ なる組を選んで X を定めると, そのヤコビ多様体は $\Delta=4$ の "singular relation" をみたし, 楕円曲線の積と同種 (isogenous) になることが示される.

§5. モジュラー方程式の一般化

Humbert のモジュラー方程式 (2.2) は (2.1) で定義される曲線が $\Delta=5$ の実乗法を持つ条件であった. ここでは (4.1) で定まる曲線に対するモジュラー方程式を与える.

Theorem 5.1 ($\Delta=5$)**.** (4.1) で定めた超楕円曲線 X のヤコビ多様体が $\Delta=5$ の実乗法を持つ条件は $x_1,\ldots,x_6$ の適当な並べ替えに対して等式 $H_5'(x_1,\ldots,x_6)=0$ が成立することである. ただし, H_5' は以下のように表示される多項式である.

$$\begin{aligned}&H_5'(x_1,\ldots,x_6)\\ :=&(x_3-x_4)^2(x_2-x_5)^2(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_6-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_4)(x_6-x_5)\\ &+(x_1-x_3)^2(x_4-x_5)^2(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_6-x_1)(x_6-x_3)(x_6-x_4)(x_6-x_5)\\ &+(x_1-x_5)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_6-x_4)(x_6-x_5)\\ &+(x_1-x_2)^2(x_3-x_5)^2(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_5)\\ &+(x_2-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_4).\end{aligned}$$

更に, この左辺は $x_1,\ldots,x_6$ の置換群の中で (12)(34)(56), (12345) で生成され, S_5 と同型な 6 次可移群の作用で不変である.

[証明の概略].
$K=(P_1,\ldots,P_5)$ を ポンスレの 5 角形の頂点, $P_6 \in D_1 \cap D_2$ とすると

$$A_1(x_1,x_2)=A_1(x_2,x_3)=A_1(x_3,x_4)=A_1(x_4,x_5)=A_1(x_5,x_1)=0$$

が成立する．これを $A_1(x,z)$ の係数 $a_1,\dots,a_6$ の連立 1 次方程式と見て解き, 分母を払うと $a_1,\dots,a_6$ が次のように表わされる:

$$
(5.1)\qquad
\begin{cases}
a_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{4} \sigma^i\big({x_1}^2(x_4-x_3)\big),\\
a_2 = \displaystyle\sum_{i=0}^{4} \sigma^i\big({x_1}^2(x_3-x_4)(x_2+x_5)\big),\\
a_3 = \displaystyle\sum_{i=0}^{4} \sigma^i\big(x_1{x_2}^2x_3(x_4-x_5)\big),\\
a_4 = \displaystyle\sum_{i=0}^{4} \sigma^i\big({x_1}^2{x_2}^2(x_3-x_5)+{x_1}^2{x_3}^2(x_5-x_4)\big),\\
a_5 = \displaystyle\sum_{i=0}^{4} \sigma^i\big({x_1}^2{x_2}^2x_4(x_5-x_3)+{x_1}^2{x_3}^2x_2(x_4-x_5)\big),\\
a_6 = \displaystyle\sum_{i=0}^{4} \sigma^i\big({x_1}^2{x_2}^2{x_4}^2(x_3-x_5)\big).
\end{cases}
$$

ここで, σ は次の巡回置換を表す :

$$x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_4 \mapsto x_5 \mapsto x_1.$$

一方, $(x_6, {x_6}^2) \in D_0 \cap D_1$ であることから

$$c_6 + c_4x_6 + c_1x_6^2 + c_5x_6^2 + c_3x_6^3 + c_2x_6^4 = 0.$$

この式に (3.5) の結果を代入し, 更に (5.1) を代入すると x_i の関係式 $H_5'(x_1,\dots,x_6)=0$ が得られる．これは全体では同次 12 次式, 各 x_i については 4 次式である．さらに次の注目すべき等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
H_5'|_{x_6=x_1} &= \Big((x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_3-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_5)\Big)^2,\\
H_5'|_{x_6=x_2} &= \Big((x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_4-x_5)\Big)^2,\\
H_5'|_{x_6=x_3} &= \Big((x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4)(x_1-x_5)(x_3-x_5)\Big)^2,\\
H_5'|_{x_6=x_4} &= \Big((x_1-x_2)(x_1-x_4)(x_2-x_4)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_4-x_5)\Big)^2,\\
H_5'|_{x_6=x_5} &= \Big((x_2-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_5)(x_3-x_5)(x_4-x_5)\Big)^2.
\end{aligned}
$$

これを用いて Lagrange の補間公式を適用すると与式のような表示を得る.

(Theorem 5.1 の証明終り) □

この式で $x_6=\infty$ とすると Humbert の与えたモジュラー方程式 (2.2) と一致することが確認できる. より正確には, 以下の等式が成立する:

$$\left(x_6{}^4 H'_5(x_1,\ldots,x_5,1/x_6)\right)\Big|_{x_6=0} = -H_5(x_1,\ldots,x_5).$$

$\Delta=8$ についても, 類似の方針で, 次の結果が得られる.

Theorem 5.2 ($\Delta=8$)**.** (4.1) で定めた超楕円曲線 X について X のヤコビ多様体が $\Delta=8$ の実乗法を持つ条件は $x_1,\ldots,x_6$ の適当な並べ替えに対して $H'_8(x_1,\ldots,x_6)=0$ が成立することである. ただし, H'_8 は以下のように表示される多項式である.

$$\begin{aligned}
&H'_8(x_1,\ldots,x_6) := \\
&(x_2-x_4)^2(x_3-x_5)^2(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_6-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_4)(x_6-x_5)\\
&+(x_1-x_3)^2(x_4-x_5)^2(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_6-x_1)(x_6-x_3)(x_6-x_4)(x_6-x_5)\\
&+(x_1-x_5)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_6-x_4)(x_6-x_5)\\
&+(x_1-x_3)^2(x_2-x_5)^2(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)(x_6-x_1)(x_6-x_2)(x_6-x_3)(x_6-x_5)\\
&+16(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_4)(x_3-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_5)(x_3-x_5)(x_4-x_5)(x_1-x_6)(x_2-x_6)\\
&(x_3-x_6)(x_4-x_6).
\end{aligned}$$

さらに, この左辺は $x_1,\ldots,x_6$ の置換群の中で $(126)(345),(12)(34)(56),(13)(24)(65)$ で生成される位数 48 の 6 次可移群 $\mathfrak{S}_4\times C_2$ の作用で不変である. □

またこの式で $x_5=0,\ x_6=\infty$ とすると Humbert の与えたモジュラー方程式 (2.3) と一致することが確認できる. より正確には, 以下の等式が成立する:

$$\left(x_6{}^4 H'_8(x_1,x_1,x_2,x_3,x_4,0,1/x_6)\right)\Big|_{x_6=0} = -H_8(x_1,x_1,x_2,x_3,x_4).$$

§6. 超曲面 $H'_8=0$ の有理性と $\Delta=8$ の versal な曲線族

まず次の事実に注意しておく. 6 次の分離的多項式 $f(x)=\prod_{i=1}^6(x-x_i)$, $g(x)=\prod_{i=1}^6(x-y_i)$ に対し, 種数 2 の曲線 X_f, X_g をそれぞれ $y^2=f(x)$, $y^2=g(x)$ で定義する. このとき

$$\begin{aligned}
X_f \cong_{\mathbb{C}} X_g \Leftrightarrow g(x) \ &= \ (cx+d)^6 f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right), \quad ad-bc\neq 0\\
\Leftrightarrow (x_1,..,x_6) \ &\cong \ (y_1,..,y_6) \qquad \mathrm{mod\ PGL}(2).
\end{aligned}$$

そこで $H'_8(x_1,\ldots,x_6)=0$ を PGL(2) の作用で変換する. すなわち $(x_1,\ldots,x_6)$ を $(0,\infty,s,1,st,sz)$ に変換すると次の方程式 $H'_8(s,t,z)=0$ を得る:

$$\begin{aligned}
H'_8(s,t,z) :=\ & s^2(st-1)^2z^4 - 2s(st-1)(8t^2-8st^2+s^2t^2-s-8t+8st)z^3\\
&+(s^2+16t-14s^2t-16t^2-16st^2+14s^2t^2+12s^3t^2+16st^3-14s^3t^3+s^4t^4)z^2\\
&-2(t-1)t(-8+8s-s^2+8st-8s^2t+s^3t^2)z+s^2(t-1)^2t^2.
\end{aligned}$$

最後の方程式は代数曲面 S を定める. すなわち S の関数体は

$$\mathbb{Q}(S)=\mathbb{Q}(s,t,z|H_8'=0).$$

このとき, 簡単な計算により S は $\mathbb{P}^2$ と双有理同値となることが示される. 実際次の等式が成り立つ:

$$\mathbb{Q}(s,t,z|H_8'=0)=\mathbb{Q}(u,w),$$

ここで

$$\begin{cases} s=s(u,w)=-\dfrac{(-1-u-w+uw)(-1+u+w+uw)}{(u+w)^2}, \\ t=t(u,w)=-\dfrac{(-1+w)(u+w)}{(-1+u)w(-1+u+w+uw)}, \\ z=z(u,w)=-\dfrac{(1+w)(u+w)}{(1+u)w(-1-u-w+uw)}. \end{cases}$$

この結果から次の二定理が導かれる.

Theorem 6.1. $\sqrt{2}$ 乗法を持つ種数 2 の任意の曲線は次と $\mathbb{C}$ 上同型である.

$$X: y^2=x(x-1)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3),$$

$$\lambda_1=s(u,w),\ \lambda_2=s(u,w)t(u,w),\ \lambda_3=s(u,w)z(u,w).$$

$\square$

G を定理 5.2 で述べた 6 次可移置換群とする :

$$G=\mathfrak{S}_4\times C_2=\big\langle(126)(345),(12)(34)(56),(13)(24)(65)\big\rangle.$$

Lemma 6.2. x,y,z,u,w を独立変数とする. G は, 以下のように定まる作用で 5 次元クレモナ群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(x,y,z,u,w)$ の部分群として実現される :

$$\text{(6.1)}\qquad \begin{cases} (126)(345):(x,y,z,u,w)\mapsto\Big(y,f_6,f_4,w,\dfrac{1-u-w-uw}{1+u+w-uw}\Big), \\ (12)(34)(56):(x,y,z,u,w)\mapsto(y,x,f_4,-1/w,-1/u), \\ (13)(24)(65):(x,y,z,u,w)\mapsto(z,f_4,x,1/u,1/w). \end{cases}$$

更に, この作用は $\mathbb{Q}(u,w)$ をそれ自身に移し, G の 2 次元クレモナ群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(u,w)$ への埋め込みが誘導される.

Theorem 6.3. 独立変数 x, y, z, u, w に関する 6 個の有理式 $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_6$ を以下の式で定める.

$$\begin{cases} \Lambda_1 = x, \\ \Lambda_2 = y, \\ \Lambda_3 = z, \\ \Lambda_4 = \dfrac{(uw-1)^2xy - ((u(-1+w)-w-1)(u+w+uw-1)x+(u+w)^2y)z}{w^2(x-y)+y-z+2uw(x-2y+z)+u^2(x+(w^2-1)y-w^2z)}, \\ \Lambda_5 = \dfrac{u(1+w)(uw-1)xy - ((u-1)w(u+w+uw-1)x+(w-1)(u+w)y)z}{(w-1)w(x-y)+u^2w(1+w)(y-z)+u((w-1)x-2wy+z+wz)}, \\ \Lambda_6 = \dfrac{u(w-1)(uw-1)xy - ((1+u)(u(w-1)-w-1)wx+(1+w)(u+w)y)z}{w(1+w)(x-y)+u^2(w-1)w(y-z)+u(x+wx-2wy+(w-1)z)}. \end{cases}$$

このとき, $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_6)$ は $\Delta = 8$ のモジュラー方程式 (定理 5.2 参照) の解を与える :

$$H_8'(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_6) = 0.$$

更に G の作用 (6.1) は $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_6$ の置換を引き起こし, これによって得られる G の 6 次置換表現は元の 6 次可移群としての表現と一致する. $\square$

§7. Example of GL(2)-type

最後にヤコビ多様体が $GL(2)$-type となる種数 2 の曲線族の例を挙げる. この例は, 定理 6.3 においてパラメータを特殊化したものである. $f_0(m, x)$ を 1 つのパラメータ m を持つ以下のような多項式とする.

$$\begin{aligned} f_0(m,x) := x^4 &- 5(2m-3)(4-12m-9m^2+2m^3)x^3 \\ &+ 4(m-4)(m+1)(4m-1)(84-343m+216m^2+76m^3-63m^4+4m^5)x^2 \\ &+ 16(m-4)^2(m+1)^2(4m-1)^2(4-14m+7m^2)(13-13m+m^3)x \\ &- 64(m-4)^4(m-1)(m+1)^3(2m-3)(4m-1)^3(1-3m+m^2). \end{aligned}$$

これに対し, 種数 2 の曲線を

$$X(m): \quad y^2 = f(x) = xf_0(m,x) \tag{7.1}$$

で定めると次が成り立つ.

Theorem 7.1.
(i) $X(m)$ のヤコビ多様体は $\Delta = 8$ の実乗法を持つ.
(ii) $X(m)$ のヤコビ多様体が $GL(2)$-type となる条件は $m = n^2 \in (\mathbb{Q}^\times)^2$ である.
(iii) (ii) の条件下において定理 4.3 で定めた代数対応 $\hat{T}_i$ は次式で与えられる :

$$\Big((x,y),\,(u,w)\Big) \in \hat{T} \quad \Leftrightarrow \quad yw = (j(x)+f(x))/h(u). \tag{7.2}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
j(u) &= j_n(u)/j_d(u), \quad h(u) \;=\; h_n(u)/h_d(u),\\
j_n &= -n^6(-1+u)(1+n^2-4u+n^2u)(1-4n^2+u+n^2u)\\
&\quad \times(-4+n^2+u+n^2u)(-1-n^2-u+4n^2u),\\
j_d &= (-2+n)(2+n)(-1+2n)(1+2n)(1+n^2)^2(1+u)^5,\\
h_n &= 125n^3(8-18n^2-52n^4-18n^6+8n^8+16u+64n^2u+721n^4u\\
&\quad +64n^6u+16n^8u+8u^2+82n^2u^2-477n^4u^2+82n^6u^2+8n^8u^2),\\
h_d &= (-2+n)^2(2+n)^2(-1+2n)^2(1+2n)^2(1+n^2)^3(1+u)^5.
\end{aligned}
$$

□

証明には, 補題 4.2, 定理 4.3 を適用する. Remark 2 で述べたように, 定理 4.3 における代数対応の定義式 (4.3) の u_1, u_2, w_1, w_2 は, そのままでは代数関数であるが, この代数対応を座標関数 x, y, u, w の有理式で表示したもの (の例) が上式 (7.2) である.

References

[1] Griffiths, P. and Harris, J., On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism, *Enseigne. Math. II, Ser.* **24** (1978), no. 1-2, 31–40.

[2] Hashimoto, K., On Brumer's family of RM-curves of genus two, *Tohoku Math. J. (2)*, **52** (2000), no. 4, 475–488.

[3] Hashimoto, K., The structure of real multiplications connected with algebraic correspondences of algebraic curves of genus 2, (Japanese) *Surikaisekikenkyusho Kokyuroku* (1996), no. 942, 153–163.

[4] Humbert, G., Sur les fonctions abeliennes singulieres, *uvres de G. Humbert 2, pub. par les soins de Pierre Humbert et de Gaston Julia, Paris, Gauthier-Villars* (1936), 297–401.

[5] Khare, C., Serre's modularity conjecture: the level one case, *Duke Math. J.* **134** (2006), no. 3, 557–589.

[6] Khare, C. Serre's modularity conjecture: a survey of the level one case. L-functions and Galois representations, *London Math. Soc. Lecture Note* **320** (2007), 270–299.

[7] Mestre, J.-F. Families de courbes hyperelliptiques à multiplications reélles, *Progr. Math.* **89** (1991), 193–208.

[8] Mestre, J.-F. Courbes hyperelliptiques à multiplications réelles, *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I* **307** (1988), no.13 721–724.

[9] Oort, F. and Bos, H. J. M. ポンスレの閉形定理 (上野健爾 訳), 数学セミナー1986.5–1986.8

[10] Sakai, Y. Poncelet's Theorem and Curves of Genus Two with Real Multiplication of $\Delta = 5$, to appear in Journal of Ramanujan Math. Soc.

[11] Shimura, G. Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, *Princeton Univ. Press* (1971).