RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B19 (2010), 81–106

組み合わせ論的カスプ化の単射性部分について (On the injectivity portion of combinatorial cuspidalization)

By

星 裕一郎 (Yuichiro HOSHI)*

Abstract

In the present paper, the author gives outlines of proofs of two results concerning the combinatorial anabelian geometry — more concretely, a result concerning a combinatorial version of Grothendieck conjecture for nodally nondegenerate outer representations (cf. §4, 5) and the injectivity portion of the combinatorial cuspidalization (cf. §1, 2) — obtained in the joint work with Shinichi Mochizuki. The detail of the arguments appearing in the present paper can be found in [HM].

概要

本稿では, 望月新一氏との共同研究で得られた, 組み合わせ論版遠アーベル幾何学に関する結果, 特に, ノード非退化な外表現に対する組み合わせ論版 Grothendieck 予想 (§4, 5 を参照), 及び, 組み合わせ論的カスプ化の単射性部分 (§1, 2 を参照) の証明の解説を行う. 本稿で与えられている議論の詳細については [HM] を参照.

§0. 序

本稿の目的は, 2008 年 12 月 9 日に筆者によって行われた講演 “双曲的曲線の組み合わせ論的カスプ化と外ガロア表現の忠実性 (望月新一氏との共同研究)” の中で説明することができなかった, “組み合わせ論的カスプ化の単射性部分” の証明の概要を解説することである.

Received April 1, 2009. Revised March 1, 2010; April 23, 2010.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 14H30; 14H10.
Supported by JSPS Grant-in-Aid for Young Scientists (B) (20740010).
*606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所;
RIMS, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan.
e-mail: yuichiro@kurims.kyoto-u.ac.jp

本稿の構成は以下のとおりである: §1 で, 主結果 “組み合わせ論的カスプ化の単射性部分” の主張を述べて, それから導かれるいくつかの結果を紹介する. §2 で, §1 で述べた主結果の証明の概略を与える. §3 で PSC 型遠半グラフについての復習を行う. §4 でノード非退化外表現の定義を与え, その基本的な性質を述べる. §5 で, §2 で与えた “組み合わせ論的カスプ化の単射性部分” の証明の概略の中で用いられる, 組み合わせ論版 Grothendieck 予想に関するある結果 “ノード非退化外表現に対する組み合わせ論版 Grothendieck 予想” の証明の概略を与える. 本稿で与えられている議論の詳細については [HM] を参照.

§1. 主結果

この § では, 組み合わせ論的カスプ化に関する望月新一氏との共同研究で得られた結果を述べる. そのために, まずいくつかの記号を用意する. (g, r) を非負整数の組で $2-2g-r<0$ を満たすもの, $\mathcal{X}$ を (g, r) 型の曲面, つまり, 種数 g の向きづけられた閉曲面から相異なる r 個の点を除いて得られる曲面 (図 1 を参照), $\mathcal{X}_n$ を $\mathcal{X}$ の n 次配置空間, つまり

$$\mathcal{X}_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overbrace{\mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X}}^{n} \setminus \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i = x_j \ (i \neq j)\},$$

$I = \{i_1, \cdots, i_{I^\sharp}\} \subseteq \{1, \cdots, n\}$[1] (ただし, $i_1 < i_2 < \cdots < i_{I^\sharp}$ とする) に対して $\mathrm{pr}_I \colon \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_{I^\sharp}$ を $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_{i_1}, \cdots, x_{i_{I^\sharp}})$ で定義される射影, Π_n^{disc} を $\mathcal{X}_n$ の (適当な起点に関する) 位相的基本群, Π_n^{prof} を Π_n^{disc} の副有限完備化, また, 素数 l に対して $\Pi_n^{\text{pro-}l}$ を Π_n^{disc} の副 l 完備化とする.

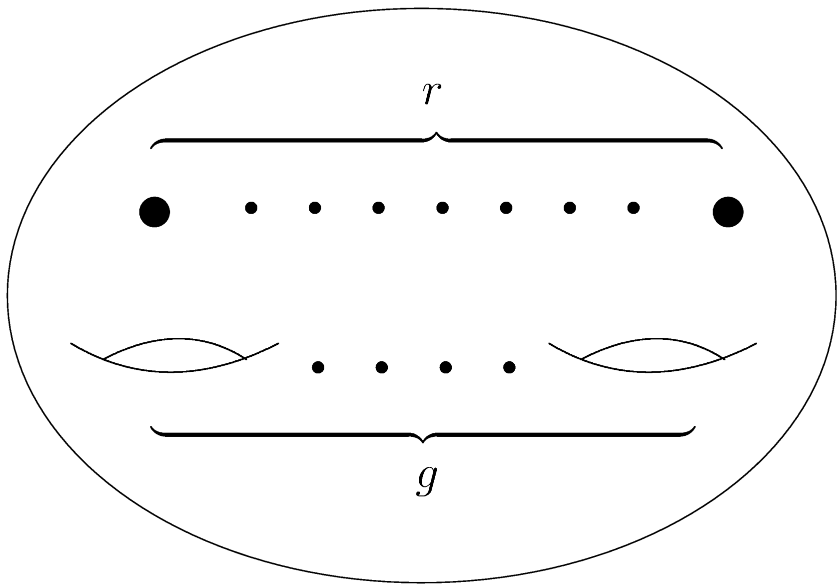


図 1: (g, r) 型の曲面

[1]本稿では, 集合 S に対してその濃度を $S^\sharp$ と書く.

定義 1.1. † を “disc” か “prof” か “pro-l” のいずれかとする.

(i) $I \subseteq \{1, \cdots, n\}$ に対して $p_I^\dagger \colon \Pi_n^\dagger \twoheadrightarrow \Pi_{I^\sharp}^\dagger$ を pr_I から誘導される全射とする.
このとき, よく知られているように, $p_I^\dagger$ の核は, $(g, r + I^\sharp)$ 型の曲面に対する “$\Pi_{n-I^\sharp}^\dagger$” と自然に同型になる (例えば, [MT], Proposition 2.4, (i), を参照). 特に, † がそれぞれ “disc”, “prof”, “pro-l” ならば, $I \subseteq J \subseteq \{1, \cdots, n\}$, $J^\sharp = I^\sharp + 1$ に対して, $\mathrm{Ker}(p_I^\dagger)/\mathrm{Ker}(p_J^\dagger)$ は $(g, r + I^\sharp)$ 型の曲面の位相的基本群それ自身, その副有限完備化, その副 l 完備化と自然に同型である.

(ii) $\Pi_n^\dagger$ の自己同型全体のなす群 $\mathrm{Aut}(\Pi_n^\dagger)$ の部分群 $\mathrm{Aut}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n^\dagger) \subseteq \mathrm{Aut}(\Pi_n^\dagger)$ を, 以下の 2 つの条件を満たす自己同型 α 全体のなす部分群として定める:

(F) α は任意の $I \subseteq \{1, \cdots, n\}$ に対して $\mathrm{Ker}(p_I^\dagger) \subseteq \Pi_n^\dagger$ を保つ.[2]

(C) (F) によって α は任意の $I \subseteq J \subseteq \{1, \cdots, n\}$, $J^\sharp = I^\sharp + 1$ に対して, $\mathrm{Ker}(p_I^\dagger)/\mathrm{Ker}(p_J^\dagger)$ の自己同型 $\alpha_{I/J}$ を誘導する. 一方, (i) に記述された注意により, $\mathrm{Ker}(p_I^\dagger)/\mathrm{Ker}(p_J^\dagger)$ は $(g, r + I^\sharp)$ 型の曲面の位相的基本群から生じる.
このとき, $H \subseteq \mathrm{Ker}(p_I^\dagger)/\mathrm{Ker}(p_J^\dagger)$ をあるカスプに付随する惰性群とすると, $\alpha_{I/J}(H), \alpha_{I/J}^{-1}(H) \subseteq \mathrm{Ker}(p_I^\dagger)/\mathrm{Ker}(p_J^\dagger)$ もあるカスプに付随する惰性群.

(iii) $\Pi_n^\dagger$ の外部自己同型全体のなす群 $\mathrm{Out}(\Pi_n^\dagger) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Aut}(\Pi_n^\dagger)/\mathrm{Inn}(\Pi_n^\dagger)$ の部分群 $\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n^\dagger) \subseteq \mathrm{Out}(\Pi_n^\dagger)$ を, 合成 $\mathrm{Aut}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n^\dagger) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\Pi_n^\dagger) \twoheadrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_n^\dagger)$ の像として定める. (定義から $\mathrm{Inn}(\Pi_n^\dagger) \subseteq \mathrm{Aut}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n^\dagger)$ であるので, $\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n^\dagger) = \mathrm{Aut}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n^\dagger)/\mathrm{Inn}(\Pi_n^\dagger)$ である.)

本共同研究で得られた主要な結果は以下の定理である.

定理 1.2. † を “disc” か “prof” か “pro-l” のいずれかとする. 今, 任意の正の整数 n, 任意の $\emptyset \neq I \subseteq \{1, \cdots, n\}$ に対して, 定義 1.1, (ii), の条件 (F) から, 射影 $p_I^\dagger$ は射

$$\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n^\dagger) \longrightarrow \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{I^\sharp}^\dagger)$$

を誘導することがわかる. このとき, この射は単射.

注意 1.

(i) $r \neq 0$ の場合, あるいは, $I^\sharp > 1$ の場合の定理 1.2 は, [Mzk5] ですでに証明されている ([Mzk5], Theorem A, (i), を参照). 従って, 定理 1.2 によって新しく得られた事実は

<u>$r = 0$, $I^\sharp = 1$ の場合の問題の射の単射性</u>

[2] [MT], Corollaries 6.3; 7.4, によって, $2-2g-r < -1$ ならば, 任意の $\Pi_n^\dagger$ の自己同型 α に対して, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在して, 以下が成立する: 任意の $I \subseteq \{1, \cdots, n\}$ に対して $\alpha(\mathrm{Ker}(p_I^\dagger)) = \mathrm{Ker}(p_{I^\sigma}^\dagger)$. 従って, もしも $2-2g-r < -1$ ならば, この条件 (F) は, 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の作用を除いて, いつでも成立する.

である. また, 定理 1.2 の証明の中で, この [Mzk5], Theorem A, (i), の結果は用いられる.

(ii) [Mzk5], Theorem A, (i), において, 定理 1.2 で問題となっている射の

$$\underline{I^{\sharp} \geq 4 \text{ の場合の全単射性}}$$

が証明されているので, 定理 1.2 を考慮すると, 定理 1.2 で問題となっている射の単射性, 全射性に関する残された問題は

$$\underline{I^{\sharp} = 1,\ 2,\ 3 \text{ の場合に問題の射が全射となるかどうか}}$$

である.

(iii) 定理 1.2 で問題となっている射の類似の射の単射性や全射性に関する先行研究は, 例えばDavid Harbater 氏, Leila Schneps 氏, 伊原康隆氏, 金子昌信氏, 中村博昭氏, 高尾尚武氏, 上野亮一氏, 角皆宏氏などといった方々によって, これまでにいくつも行われてきた (例えば [HS], §0.1, Corollary; [Ih1], Introduction, The injectivity Theorems; [Ih2], §1.2, Main Theorem; [IK], Theorem 1; [Naka], Lemma 3.2.2; [NTU], Theorem 4.3; [Tsn], §0, Main Theorem, を参照). これらの結果と定理 1.2 の関係については, [Mzk5], Remarks 4.1.2; 4.2.1, を参照. また, † が "pro-l" の場合には, 1990 年代に高尾尚武氏によって, もっとも困難な場合 "$r = 0$, $I^{\sharp} = 1$" ((i) を参照) ですら, 問題の単射性は証明されていた ([Tk] を参照).

定理 1.2 の証明の概略を与える前に, この定理から導かれる 2 つの結果を紹介する.

まず最初に, 定理 1.2 と Belyĭ の定理 ([Bly] を参照) と [Mzk5], Theorem A, (iii), を用いることで, 松本眞氏の定理 [Mts], Theorem 2.2, の, 以下のような一般化を証明することができる.

系 1.3. k を標数 0 の体, $\overline{k}$ を k の代数閉包, $\overline{\mathbb{Q}}$ を $\overline{k}$ から定まる $\mathbb{Q}$ の代数閉包, X を k 上の双曲的曲線とする. このとき, 完全系列

$$1 \longrightarrow \pi_1(X \otimes_k \overline{k}) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \longrightarrow 1$$

から生じる外 Galois 表現

$$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \longrightarrow \mathrm{Out}(\pi_1(X \otimes_k \overline{k}))$$

の核は, 自然な埋め込み $\mathbb{Q} \hookrightarrow k$ から誘導される射

$$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$$

の核に含まれる. 特に, k が代数体や p 進局所体ならば, 問題の外 Galois 表現は忠実.

証明の概略. 系 1.3 を証明するためには, k をその適切な有限次 Galois 拡大と取り替えることによって, X のカスプのなす集合への $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ の作用は自明であると仮定して良い.

n を正の整数, X_n を双曲的曲線 X の n 次配置空間とすると, Grothendieck による Riemann 存在定理によって, 様々な射影たちや (定義 1.1, (ii), の条件 (C) で問題となっている) カスプから生じる惰性群たちと両立的な同型 $\Pi_n^{\mathrm{prof}} \simeq \pi_1(X_n \otimes_k \overline{k})$ が存在するため, 以下, この 2 つの副有限群 Π_n^{prof} と $\pi_1(X_n \otimes_k \overline{k})$ を同一視する. このとき, X_n から生じる外 Galois 表現

$$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \longrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_n^{\mathrm{prof}}) = \mathrm{Out}(\pi_1(X_n \otimes_k \overline{k}))$$

が $\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n^{\mathrm{prof}}) \subseteq \mathrm{Out}(\Pi_n^{\mathrm{prof}})$ を経由することが確認できる. 従って, 定理 1.2 より, 系 1.3 を証明するためには, X_3 から生じる外 Galois 表現

$$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \longrightarrow \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_3^{\mathrm{prof}})$$

の核が, 射 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の核に含まれることを示せば充分である.

一方, 外 Galois 表現 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathrm{Out}(\Pi_n^{\mathrm{prof}})$ は, 部分群 “$\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}} \subseteq \mathrm{Out}$” を経由するだけではなく, ($X$ のカスプのなす集合への $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ の作用が自明であると仮定しているため) $X_n \otimes_k \overline{k}$ の中の様々なカスプたちの集合の上に自明な作用を引き起こす. 特に, 外 Galois 表現 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_3^{\mathrm{prof}})$ は $X_3 \otimes_k \overline{k}$ の中の (正確には, $X_3 \otimes_k \overline{k}$ の自然な対数的コンパクト化である “$X \otimes_k \overline{k}$ の 3 次対数的配置空間” の中の) “$\mathbb{P}^1_{\overline{k}} \setminus 3\,\mathrm{points}$” を固定し, その自然な外 Galois 表現を誘導する:

$$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \longrightarrow \mathrm{Im}(\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_3^{\mathrm{prof}})) \longrightarrow \mathrm{Out}(\pi_1(\mathbb{P}^1_{\overline{k}} \setminus 3\,\mathrm{points}))$$

(この部分についての詳しい議論は, [Mzk5], 特に [Mzk5], Theorem A, (iii), を参照). 今, Belyĭ の定理によってこの合成 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathrm{Out}(\pi_1(\mathbb{P}^1_{\overline{k}} \setminus 3\,\mathrm{points}))$ の核は射 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の核に含まれるので, $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_3^{\mathrm{prof}})$ の核も $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の核に含まれることがわかる. □

また, 定理 1.2 と Dehn-Nielsen-Baer の定理[3] を用いることで, 以下の結果を証明することができる.

系 1.4. 任意の正の整数 n, 任意の $\emptyset \neq I \subseteq \{1, \cdots, n\}$ に対して, p_I^{disc} から誘導される射

$$\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n^{\mathrm{disc}}) \longrightarrow \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{I^\sharp}^{\mathrm{disc}})$$

は全単射.

[3] $\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_1^{\mathrm{disc}})$ の任意の元は $\mathcal{X}$ の同相写像から生じる, という定理. [Iv], Theorem 2.9.B, を参照.

証明. 単射性は定理 1.2 で得られているので, 全射性を証明する. $\alpha_{I^\sharp} \in \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{I^\sharp}^{\mathrm{disc}})$ とする.

Dehn-Nielsen-Baer の定理によって, $\alpha_{I^\sharp} \in \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{I^\sharp}^{\mathrm{disc}})$ から定まる $\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_1^{\mathrm{disc}})$ の元 α_1 は $\mathcal{X}$ の同相写像から生じる. この同相写像が誘導する $\mathcal{X}_n$ の同相写像から定まる $\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n^{\mathrm{disc}})$ の元を α_n とする. このとき定義から, $\alpha_{I^\sharp}$, α_n によってそれぞれ定まる $\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_1^{\mathrm{disc}})$ の元はどちらも α_1 であるので, $\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{I^\sharp}^{\mathrm{disc}}) \to \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_1^{\mathrm{disc}})$ の単射性から, α_n の $\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{I^\sharp}^{\mathrm{disc}})$ での像が $\alpha_{I^\sharp}$ となることがわかる. □

§2. 主結果の証明の概略

この § では, 定理 1.2 の証明の概略を与える. 記号を §1 のとおりとする.

まず最初に, 以下の命題 (と登場する様々な群たちの中心自明性[4]) によって, † が "disc" の場合の定理 1.2 が, † が "prof" の場合の定理 1.2 から容易に導かれることに注意しよう.

命題 2.1. Π_1^{disc} は共役分離的[5].

従って, 定理 1.2 を証明するためには, † が "prof" と "pro-l" の場合の定理 1.2 を証明すれば充分である. また, † が "prof" か "pro-l" かどうかに関わらず証明はまったく同様に展開されるので, 以下では, † を省略して, "Π_n" は Π_n^{prof} あるいは $\Pi_n^{\text{pro-}l}$ を表すこととする.

定理 1.2 の証明の方針は

問題を Grothendieck 予想型の状況に翻訳して,
そこに組み合わせ論版 Grothendieck 予想の結果を適用する

というものである. 以下, その詳細について説明をする:

$$\widetilde{\alpha} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Aut}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n) \overset{\text{by } p_I}{\to} \mathrm{Aut}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{I^\sharp}))$$

として, $\alpha \in \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n)$ を $\widetilde{\alpha}$ から定まる Π_n の外部自己同型とする.

ステップ 1: $n = 2$, $I = \{1\}$ の場合に帰着[6]

[4] † によらず, 任意の正の整数 n に対して $\Pi_n^\dagger$ が, 従って, "$\mathrm{Ker}(p_I^\dagger)$" として得られる群も, すべて中心自明であることが知られている.

[5] 任意の $g, g' \in G$ に対して以下の 2 条件が同値であるとき, 群 G は共役分離的であるという:

(i) g と g' は G の中で共役.

(ii) 任意の指数有限正規部分群 $N \subseteq G$ に対して, g と g' の G/N での像は共役.

[6] 注意 1, (i), で述べたように, [Mzk5], Theorem A, (i), において, $I^\sharp > 1$ の場合の問題の射の単射性はすでに証明されている. 一方, 以下で確認されるように, この議論の中で [Mzk5], Theorem A, (i), が用いられる. 従って, "[Mzk5], Theorem A, (i), を仮定した, 定理 1.2 の証明" という立場から, このステップはすでに仮定されていると考えるべきかもしれない.

問題から, 明らかに $I^\sharp = n-1$ と仮定しても良い. また, 対称性から $I = \{1, \cdots, n-1\}$ と仮定しても良い. ここで, 次のような可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(p_{\{1,\cdots,n-2\}}\colon \Pi_n \to \Pi_{n-2}) & \longrightarrow & \Pi_n & \xrightarrow{p_{\{1,\cdots,n-2\}}} & \Pi_{n-2} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\{1,\cdots,n-1\}}} & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(p_{\{1,\cdots,n-2\}}\colon \Pi_{n-1} \to \Pi_{n-2}) & \longrightarrow & \Pi_{n-1} & \xrightarrow[p_{\{1,\cdots,n-2\}}]{} & \Pi_{n-2} & \longrightarrow & 1\,.
\end{array}$$

今, $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Aut}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n) \overset{\text{by } p_{\{1,\cdots,n-1\}}}{\to} \mathrm{Aut}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{n-1}))$ であるので, 特に,

$$\widetilde{\alpha} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Aut}^{\mathrm{FC}}(\Pi_n) \overset{\text{by } p_{\{1,\cdots,n-2\}}}{\to} \mathrm{Aut}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{n-2}))\,.$$

従って, 下記の命題 2.2 から, $\widetilde{\alpha}$ の $\mathrm{Ker}(p_{\{1,\cdots,n-2\}}\colon \Pi_n \to \Pi_{n-2}) \subseteq \Pi_n$ への制限が $\mathrm{Ker}(p_{\{1,\cdots,n-2\}}\colon \Pi_n \to \Pi_{n-2})$ の内部自己同型であるならば, $\widetilde{\alpha}$ 自身も Π_n の内部自己同型であることがわかる.

命題 2.2. $1 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 1$ を群の完全系列, ϕ を G_2 の自己同型であって, G_1 に恒等写像を引き起こし, その上, G_3 にも恒等写像を引き起こすものとする. このとき, もしも G_1 の中心が自明であるならば, ϕ は恒等写像.

証明. 同型 $G_2 \simeq \mathrm{Aut}(G_1) \times_{\mathrm{Out}(G_1)} G_3$ の存在から従う. 詳しくは [Hsh2], Lemma 4.10, を参照. □

一方, 定義 1.1, (i), に記述された注意により, 上の図式の左側の垂直の射は, $(g, r+2)$ 型の曲面に対する "$p_{\{1\}}\colon \Pi_2 \twoheadrightarrow \Pi_1$" である. これらの考察により, 定理 1.2 を証明するためには, $n = 2$, $I = \{1\}$ の場合の定理 1.2 を証明すれば充分であることがわかる.

<u>**ステップ 2**</u>: Grothendieck 予想型の状況に翻訳 (図 2 を参照)

$p \overset{\mathrm{def}}{=} p_{\{1\}}$ として, $\Pi_{2/1}$ を $p\colon \Pi_2 \twoheadrightarrow \Pi_1$ の核とする:

$$1 \longrightarrow \Pi_{2/1} \longrightarrow \Pi_2 \xrightarrow{p} \Pi_1 \longrightarrow 1\,.$$

ここで, この完全系列は, 外表現 $\rho_{\mathcal{X}_2/\mathcal{X}}\colon \Pi_1 \to \mathrm{Out}(\Pi_{2/1})$ を定め[7], これが $\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{2/1}) \subseteq \mathrm{Out}(\Pi_{2/1})$ を経由することが確認できる:

$$\rho_{\mathcal{X}_2/\mathcal{X}}\colon \Pi_1 \to \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{2/1})\,.$$

今, $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Aut}^{\mathrm{FC}}(\Pi_2) \overset{\text{by } p}{\to} \mathrm{Aut}^{\mathrm{FC}}(\Pi_1))$ であることから,

(i) $\qquad \alpha|_{\Pi_{2/1}} \in Z_{\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{2/1})}(\mathrm{Im}(\rho_{\mathcal{X}_2/\mathcal{X}}))$

[7] Π_1 の元を Π_2 に持ち上げて, その元による Π_2 の内部自己同型の $\Pi_{2/1}$ への制限を考えることで, この外表現は得られる.

であること[8], 及び,

$$\alpha \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_2) \overset{\text{by } p_{\{2\}}}{\to} \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_1))$$

であること[9], 特に,

$$\text{(ii)} \qquad \alpha|_{\Pi_{2/1}} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{2/1}) \overset{\text{by } p_{\{2\}}}{\to} \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_1))$$

であることが確認できる. 従って, (i), (ii) より, (命題 2.2 から) 定理 1.2 を証明するためには,

$$Z_{\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{2/1})}(\mathrm{Im}(\rho_{\mathcal{X}_2/\mathcal{X}})) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{2/1}) \overset{\text{by } p_{\{2\}}}{\to} \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_1)) = \{1\}$$

であることを証明すれば充分である (図 2 を参照).

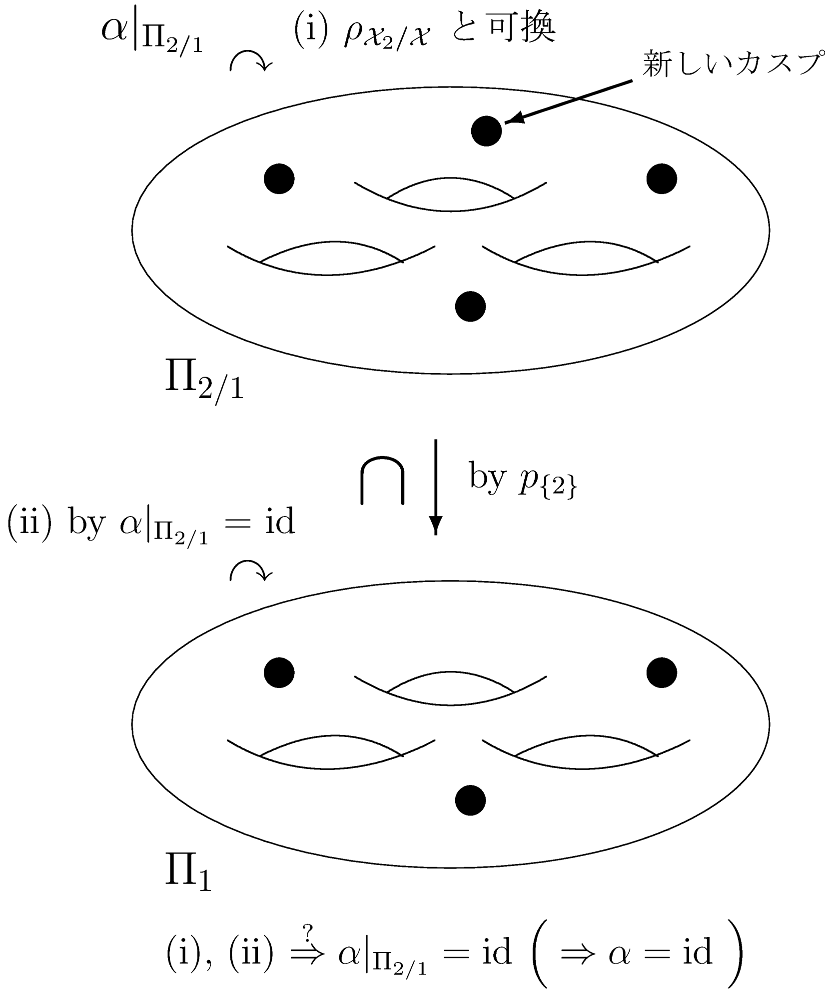


図 2: ステップ 2

[8]本稿では, 群 G とその部分群 $H \subseteq G$ に対して, H の G の中での中心化群を $Z_G(H) \subseteq G$ と書く.

[9]対角成分として得られる因子に付随する Π_2 の中の分解群への $\widetilde{\alpha}$ の作用を考えることで, この事実を確認することができる. 詳しくは [Mzk5], Proposition 1.2, (iii), を参照.

ステップ 3: $\mathcal{X}$ を安定曲線に取り替える (図 5 を参照)

X を $\mathbb{C}$ 上滑らかな (g,r) 型の代数曲線[10], X_n を X の n 次配置空間, $\pi_1(X_n)^\dagger$ を X_n の数論的基本群の $\dagger$ に応じた商 (つまり, $\dagger$ が "prof" ならば $\pi_1(X_n)$ 自身, $\dagger$ が "pro-l" ならば $\pi_1(X_n)$ の最大副 l 商) とすると, Grothendieck による Riemann 存在定理によって, 様々な射影たちや (定義 1.1, (ii), の条件 (C) で問題となっている) カスプから生じる惰性群たちと両立的な同型 $\Pi_n \simeq \pi_1(X_n)^\dagger$ が存在するので, Π_n を $\pi_1(X_n)^\dagger$ と置き換えても良い.

また, $Z^{\log}$ を対数的点 $S^{\log} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Spec} \mathbb{C}^{\log}$ 上の (g,r) 型の安定対数曲線 (stable log curve — [Mzk1], §3.3, Definition, を参照), $Z_n^{\log}$ を $Z^{\log}$ の n 次対数的配置空間 (log configuration space — [MT], Definition 2.1, (i), を参照), $\pi_1(Z_n^{\log}/S^{\log})^\dagger$ を全射 $\pi_1(Z_n^{\log}) \twoheadrightarrow \pi_1(S^{\log})$ の核の $\dagger$ に応じた商とすると, 対数的基本群の一般論によって (例えば [Hsh1], Corollary 1, を参照), 様々な射影たちやカスプから生じる惰性群たちと両立的な同型 $\pi_1(X_n)^\dagger \simeq \pi_1(Z_n^{\log}/S^{\log})^\dagger$ が存在するので, Π_n を $\pi_1(Z_n^{\log}/S^{\log})^\dagger$ と置き換えても良い:

$$\Pi_n = \pi_1(Z_n^{\log}/S^{\log})^\dagger .$$

(従って, このとき, Π_1 は, $Z^{\log}$ から後述の定義 3.1, (ii), のようにして得られる PSC 型遠半グラフの基本群としての構造を持つ.)

以降の議論では, 対数的点 $S^{\log}$ 上の (g,r) 型の安定対数曲線 $Z^{\log}$ として, 次のような曲線を考える (図 3 を参照):

2 つの既約成分 v_1, v_2 を持ち, それらが 1 つのノード e で繋がっている安定曲線.
(r 個のカスプたちの v_1, v_2 への振り分けはどんなものでも良い.)[11]

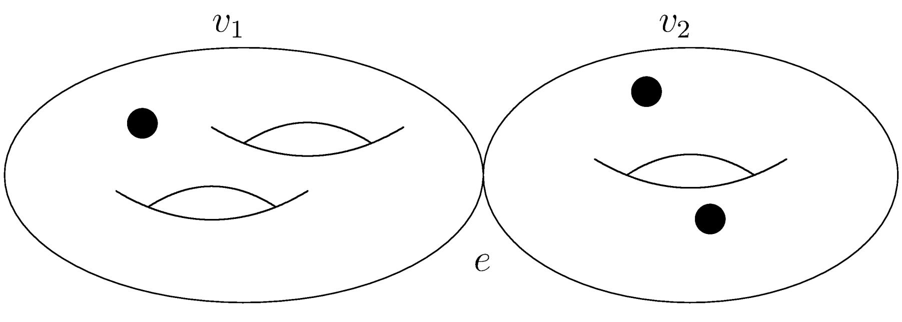


図 3: $Z^{\log}$

今, ノード e から定まる Π_1 の部分群 ($\simeq \widehat{\mathbb{Z}}(1)$ の $\dagger$ に応じた商 — 後述の定義 3.1,

[10] つまり, 種数 g の滑らかで射影的な代数曲線から相異なる r 個の閉点を除いて得られるような $\mathbb{C}$ 上の代数曲線.

[11] このような安定対数曲線が存在するためには $2-2g-r < -1$ でなければならない. 従って, $2-2g-r = -1$ の場合, つまり, $(g,r) = (0,3)$, $(1,1)$ の場合には, 以下の議論を適用することはできない. (この場合, 定理 1.2 で問題となっている単射性は, [Mzk5], Theorem A, (i), ですでに証明されている — 注意 1, (i), を参照). 以下では, $2-2g-r < -1$ を仮定する.

(iv), の言葉を用いれば, “e に付随するノード部分群”[12]) を 1 つ固定して, それを $\Pi_e \subseteq \Pi_1$ とする. 一方, 対数的配置空間の定義から, $\mathrm{pr}_{\{1\}}$ に対応する射影 $Z_2^{\log} \to Z^{\log}$ のノード e でのファイバーとして生じる安定対数曲線は以下のような構造を持つ (図 4 を参照). (しかも, 定義から, $\Pi_{2/1}$ は, ファイバーとして得られるこの安定対数曲線から定義 3.1, (ii), のようにして構成される PSC 型遠半グラフの基本群としての構造を持つ.)

> 3 つの既約成分を持ち, それぞれは $\mathrm{pr}_{\{2\}}$ に対応する射影によって v_1, v_2, e に全射する. v_1, v_2, e に全射する既約成分をそれぞれ v_1°, v_2°, v_0° と書く. すると, v_1° と v_0° は 1 つのノードで繋り, v_2° と v_0° は 1 つのノードで繋り, v_1° と v_2° は繋がっていない. また, v_0° は “$\mathbb{P}^1 \setminus 3\,\mathrm{points}$”.

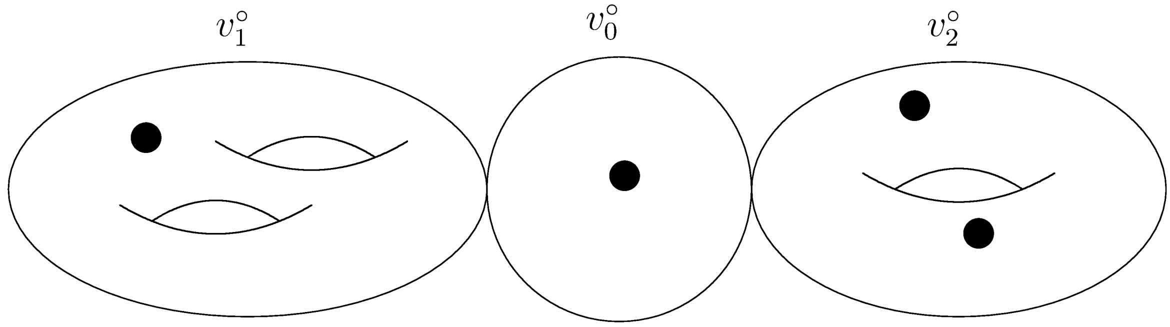


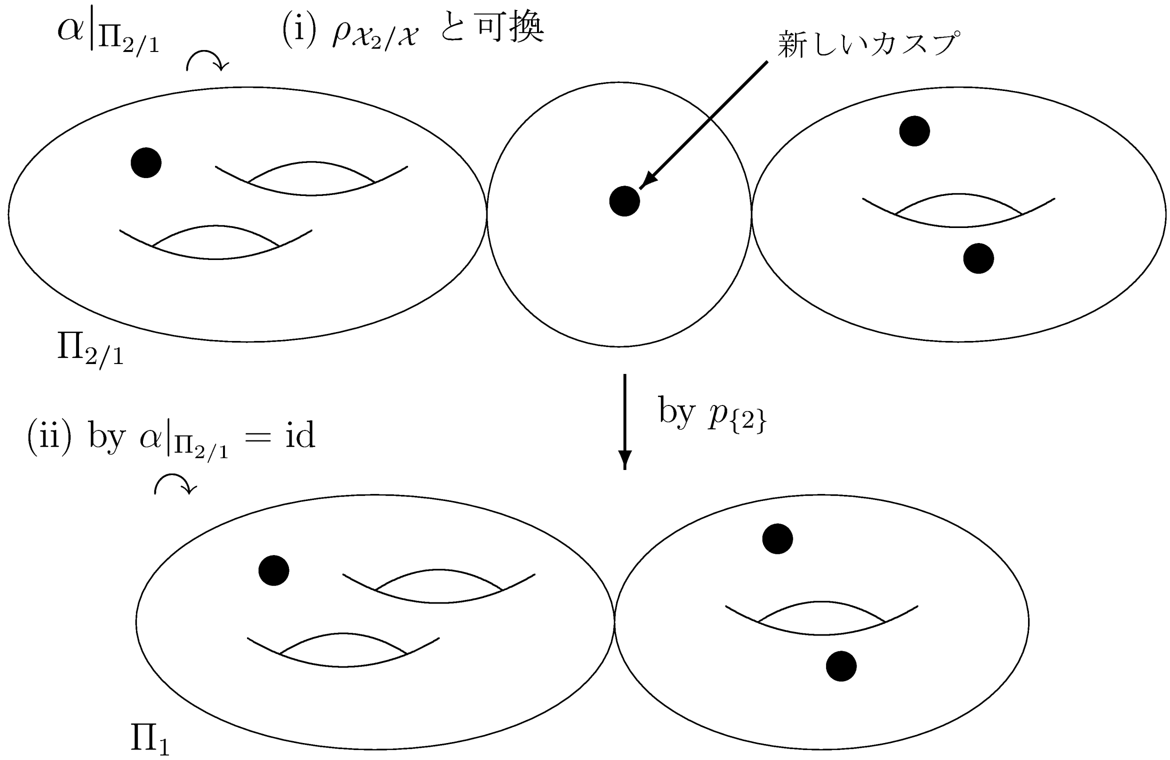
図 4: e でのファイバー

ここで, 既約成分 v_0° から定まる $\Pi_{2/1}$ の部分群 (後述の定義 3.1, (iv), の言葉を用いれば “v_0° に付随する頂点部分群”) の中で ($\mathrm{pr}_{\{2\}}$ に対応する射影によって) Π_e に全射するものを 1 つ固定して, それを $\Pi_{v_0^\circ} \subseteq \Pi_{2/1}$ とする. また, $i = 1, 2$ に対して, 既約成分 v_i° から定まる $\Pi_{2/1}$ の部分群 (つまり “v_i° に付随する頂点部分群”) の中で $\Pi_{v_0^\circ}$ と交わるものを 1 つ固定して, それを $\Pi_{v_i^\circ} \subseteq \Pi_{2/1}$ とする. その上, $\Pi_{v_i^\circ} \subseteq \Pi_{2/1}$ の $\mathrm{pr}_{\{2\}}$ に対応する射影による Π_1 への像を $\Pi_{v_i} \subseteq \Pi_1$ と書く. このとき, 定義より, $\Pi_{v_i} \subseteq \Pi_1$ は既約成分 v_i から定まる Π_1 の部分群 (つまり “v_i に付随する頂点部分群”) であって, しかも, 自然な全射 $\Pi_{v_i^\circ} \twoheadrightarrow \Pi_{v_i}$ は同型射である.

$$
\begin{array}{ccccc}
\Pi_{v_1^\circ},\ \Pi_{v_2^\circ},\ \Pi_{v_0^\circ} & \subseteq & \Pi_{2/1} & \qquad & \Pi_{v_1^\circ} \cap \Pi_{v_0^\circ}\ ,\ \Pi_{v_2^\circ} \cap \Pi_{v_0^\circ} \neq \{1\} \\
 & & \Big\downarrow \text{by } p_{\{2\}} & & \\
\Pi_{v_1},\ \Pi_{v_2},\ \Pi_e & \subseteq & \Pi_1 & & \Pi_{v_1^\circ} \xrightarrow{\sim} \Pi_{v_1}\ ,\ \Pi_{v_2^\circ} \xrightarrow{\sim} \Pi_{v_2}\ .
\end{array}
$$

様々な射影たちやカスプから生じる惰性群たちと両立的な同型 $\Pi_n \simeq \pi_1(Z_n^{\log}/S^{\log})^\dagger$ の存在によって, 図 2 は以下の図 5 のように書き換えられる.

[12] Π_1 が, $Z^{\log}$ から後述の定義 3.1, (ii), のようにして得られる PSC 型遠半グラフの基本群としての構造を持つことに注意.



$$\text{(i), (ii)} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha|_{\Pi_{2/1}} = \mathrm{id} \ \Big(\Rightarrow \alpha = \mathrm{id} \Big)$$

図 5: ステップ 3

<u>ステップ 4</u>: 組み合わせ論版 Grothendieck 予想に関する結果を適用 (図 6 を参照)

ここで, 組み合わせ論版 Grothendieck 予想に関する以下の主張 $(*)^{\mathrm{comb}}$ が成り立つと仮定しよう:

> $(*)^{\mathrm{comb}}$: $\phi \in Z_{\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{2/1})}(\rho_{\mathcal{X}_2/\mathcal{X}}(\Pi_e))$ ならば, ϕ はグラフ的 (graphic)[13]. 特に, $\widetilde{\phi} \in \mathrm{Aut}(\Pi_{2/1})$ を ϕ の持ち上げとすると, $\widetilde{\phi}(\Pi_{v_1^\circ})$, $\widetilde{\phi}(\Pi_{v_2^\circ})$, $\widetilde{\phi}(\Pi_{v_0^\circ})$ はどれも, $\Pi_{v_1^\circ}$ あるいは $\Pi_{v_2^\circ}$ あるいは $\Pi_{v_0^\circ}$ の共役.

この主張が成立することの証明は, §5 で解説される (後述の定理 5.1 を参照).

今, $\alpha|_{\Pi_{2/1}} \in Z_{\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{2/1})}(\rho_{\mathcal{X}_2/\mathcal{X}}(\Pi_e))$ であるので (ステップ 2, (i), を参照), 条件 $(*)^{\mathrm{comb}}$ より, $\alpha|_{\Pi_{2/1}}$ はグラフ的. その上, $\alpha|_{\Pi_{2/1}} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{2/1}) \overset{\text{by } p_{\{2\}}}{\to} \mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_1))$ であるので (ステップ 2, (ii), を参照), $i = 1, 2, 0$ に対して, $\widetilde{\alpha}(\Pi_{v_i^\circ})$ は $\Pi_{v_i^\circ}$ の共役である

[13] 脚注 24 を参照.

ことがわかる．ここで, [Mzk5], Theorem A, (i), を援用することで[14] ($\widetilde{\alpha}$ を $\Pi_{2/1}$ の適当な元による共役に取り替えることによって)

$$\widetilde{\alpha}(\Pi_{v_1^\circ}) = \Pi_{v_1^\circ}\ ,\ \ \widetilde{\alpha}(\Pi_{v_2^\circ}) = \Pi_{v_2^\circ}$$

と仮定しても良いことがわかる．これより, $i = 1, 2$ に対する可換図式

$$\begin{array}{ccc} \Pi_{v_i^\circ} & \xrightarrow{\ \widetilde{\alpha}\ } & \Pi_{v_i^\circ} \\ {\scriptstyle \text{by } p_{\{2\}}}\downarrow \wr & & \wr \downarrow {\scriptstyle \text{by } p_{\{2\}}} \\ \Pi_{v_i} & = = = & \Pi_{v_i} \end{array}$$

(ここで, 垂直な 2 射は同型射 [ステップ 3 を参照], 下の水平の射は恒等写像[15]) を考えることで,

$$\widetilde{\alpha}|_{\Pi_{v_1^\circ}} = \mathrm{id}_{\Pi_{v_1^\circ}}\ ,\ \ \widetilde{\alpha}|_{\Pi_{v_2^\circ}} = \mathrm{id}_{\Pi_{v_2^\circ}}$$

が得られる．この事実に, ある議論を組み合わせることによって, $\widetilde{\alpha}|_{\Pi_{2/1}}$ 自身が (従って $\widetilde{\alpha}$ 自身が) 内部自己同型であることがわかる (図 6 を参照).

注意 2. 上の議論の中で仮定した $(*)^{\mathrm{comb}}$ 中の外表現 $\rho_{\mathcal{X}_2/\mathcal{X}}|_{\Pi_e} \colon \Pi_e \to \mathrm{Out}(\Pi_{2/1})$ にあらわれる “e” が, ノードではなくカスプである場合には, この外表現 $\rho_{\mathcal{X}_2/\mathcal{X}}|_{\Pi_e}$ から構成される拡大

$$1 \longrightarrow \Pi_{2/1} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Pi_{2/1}) \times_{\mathrm{Out}(\Pi_{2/1})} \Pi_e \longrightarrow \Pi_e \longrightarrow 1$$

は, ある安定対数曲線の対数的基本群 (の † に応じた商) と同型である: つまり, 対数的点 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}^{\log}$ 上のある安定対数曲線 $C^{\log} \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}^{\log}$ と可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(\Pi_{2/1}) \times_{\mathrm{Out}(\Pi_{2/1})} \Pi_e & \longrightarrow & \Pi_e \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ \pi_1(C^{\log})^\dagger & \longrightarrow & \pi_1(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}^{\log})^\dagger \end{array}$$

[14] 具体的には次のように [Mzk5], Theorem A, (i), を用いる: 様々な構成から, “v_1” という (滑らかな) 代数曲線に対する “$\Pi_2 \overset{p_{\{1\}}}{\to} \Pi_1$” が, 今考察されている “$\Pi_2 \overset{p_{\{1\}}}{\to} \Pi_1$” に含まれている:

$$\begin{array}{ccc} (\Pi_{v_1^\circ}\ ,\ \Pi_{v_0^\circ} \subseteq) & \text{“}\Pi_2 \text{ for } v_1\text{”} \subseteq & \Pi_2 \\ & \downarrow & \downarrow \\ (\Pi_{v_1} =) & \text{“}\Pi_1 \text{ for } v_1\text{”} \subseteq & \Pi_1\,. \end{array}$$

一方, $\alpha|_{\Pi_{2/1}}$ がグラフ的であることから, $\widetilde{\alpha}$ を適当な Π_2 の元による共役に取り替えることによって, $\widetilde{\alpha}(\Pi_{v_1^\circ}) = \Pi_{v_1^\circ}$, $\widetilde{\alpha}(\Pi_{v_0^\circ}) = \Pi_{v_0^\circ}$ と仮定しても良く, この事実から, 今考察されている “$\Pi_2 \overset{p_{\{1\}}}{\to} \Pi_1$” の中に含まれている “$v_1$ に対する $\Pi_2 \overset{p_{\{1\}}}{\to} \Pi_1$” が, $\widetilde{\alpha}$ によって保たれることがわかる．そこで, $\widetilde{\alpha}$ のこの “v_1 に対する $\Pi_2 \overset{p_{\{1\}}}{\to} \Pi_1$” への制限に対して [Mzk5], Theorem A, (i), を適用する．(“v_1” は $r \neq 0$ の曲線である！ — 注意 1, (i), を参照.)

[15] $\widetilde{\alpha}$ が Π_1 に誘導する射は自明であると仮定していることに注意 (ステップ 2, (ii), を参照).

が存在する. (後述の定義 4.3, (ii), の言葉を用いれば, この外表現 $\rho_{\mathcal{X}_2/\mathcal{X}}|_{\Pi_e}$ が "IPSC 型" であるということ.) 従って, その場合に条件 $(*)^{\mathrm{comb}}$ が成立することは [Mzk3], Proposition 2.6, から従う.

一方, 上の議論のように "e" がノードである場合には, この拡大

$$1 \longrightarrow \Pi_{2/1} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Pi_{2/1}) \times_{\mathrm{Out}(\Pi_{2/1})} \Pi_e \longrightarrow \Pi_e \longrightarrow 1$$

が安定対数曲線の対数的基本群のなす拡大と同型になるかどうかはわからない. (実際, Π_1 に対応している安定対数曲線によっては, その安定対数曲線のある対称性を用いることによって, 上述の拡大が, 安定対数曲線の対数的基本群のなす拡大とは同型にならないことが確認できる場合もある.) このため, "e" がノードである場合には, 条件 $(*)^{\mathrm{comb}}$ の成立は [Mzk3], Proposition 2.6, からは従わず, §4 で導入される "ノード非退化外表現" という概念についての考察が必要となる.

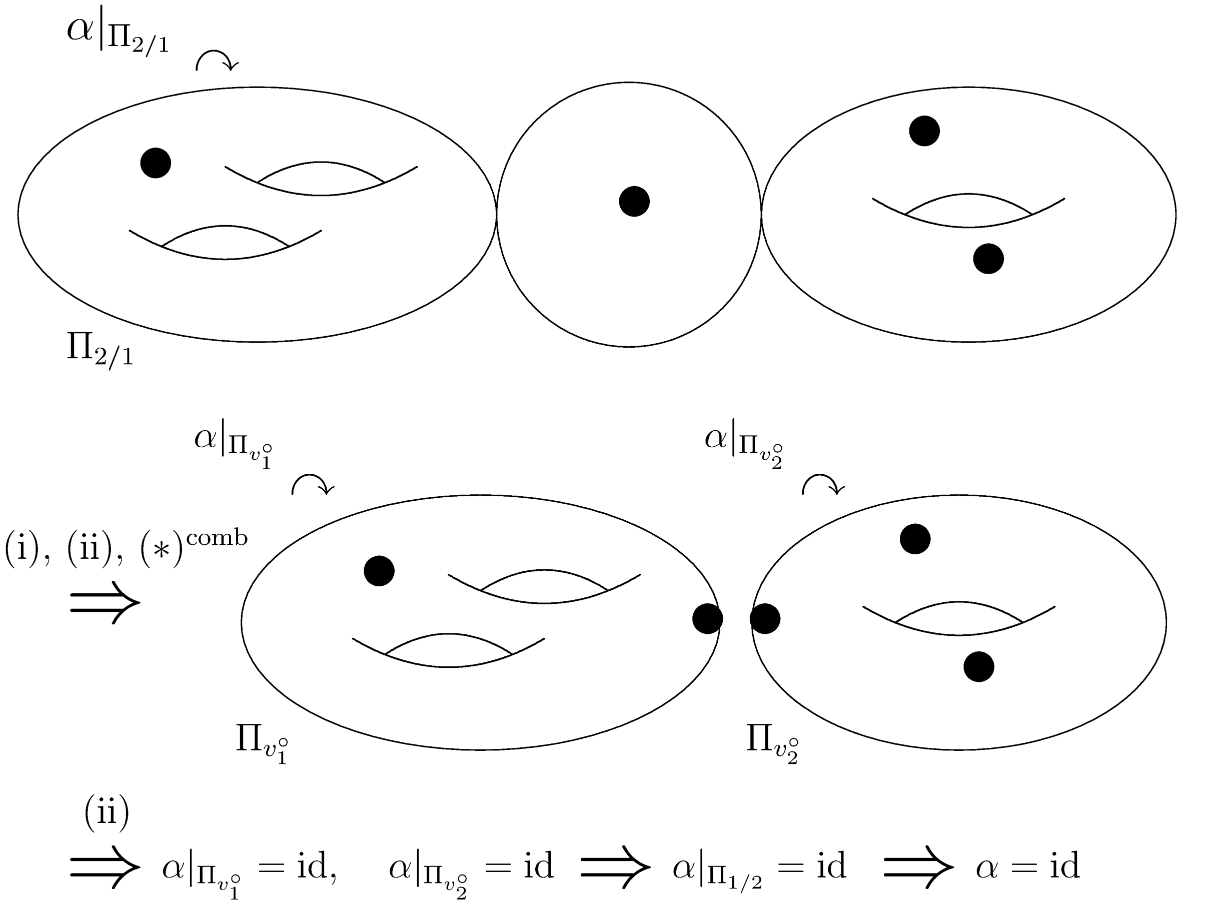


図 6: ステップ 4

§ 3. PSC 型遠半グラフ

この § では, **PSC 型遠半グラフ** (semi-graph of anabelioids of PSC-type) についての復習を行う. 遠半グラフや PSC 型遠半グラフ, その周辺の概念の定義や性質については [Mzk2] や [Mzk3] を参照. 読者のために, 基本的な定義のみを以下に記す.

定義 3.1.

(i) **(連結) 遠可換型の (連結) 半グラフ** ([connected] semi-graph of [connected] anabelioids) とは以下のデータの集まりである:

(i-1) 連結な半グラフ $\mathbb{G}$.

(i-2) $\mathbb{G}$ の各頂点 v に対して連結遠可換型[16] (connected anabelioid) $\mathcal{G}_v$.

(i-3) $\mathbb{G}$ の各辺 e に対して連結遠可換型 $\mathcal{G}_e$.

(i-4) $\mathbb{G}$ の頂点 v と, v に接する辺 e に対して, 連結遠可換型の射[17] $b_{e\to v}\colon \mathcal{G}_e \to \mathcal{G}_v$.

本稿では, 簡単のために, 遠可換型の半グラフを**遠半グラフ**と呼ぶ.

(ii) Σ を空でない素数の集合, X を標数が Σ の元でない代数閉体上の標点付安定曲線とする. このとき, X から定まる**副 Σ PSC 型遠半グラフ** (semi-graph of anabelioids of pro-Σ PSC-type) とは, 以下のようにして得られる遠半グラフのことである (ここで, PSC とは標点付安定曲線 [pointed stable curve] の略である):

(ii-1) 半グラフ $\mathbb{G}$ を X の双対半グラフとする (図 7 を参照).

(ii-2) $\mathbb{G}$ の頂点 v に対して, v に対応する X の既約成分を X_v としたとき, v に対応する連結遠可換型 $\mathcal{G}_v$ を, 平滑曲線 $X_v \setminus ((X_{\text{non-sm}} \cup X_{\text{mark}}) \cap X_v)$ (ここで, $X_{\text{non-sm}} \subseteq X$ は X の非平滑部分, $X_{\text{mark}} \subseteq X$ は X の標点のなす集合) の数論的基本群の最大副 Σ 商から定まる連結遠可換型とする.

(ii-3) e を $\mathbb{G}$ の辺とする. このとき, v を e が接する頂点とすると, e は平滑曲線 $X_v \setminus ((X_{\text{non-sm}} \cup X_{\text{mark}}) \cap X_v)$ ((ii-2) を参照) のカスプと考えられる. 従って, ($X_v \setminus (X_{\text{non-sm}} \cap X_v)$ の数論的基本群の最大副 Σ 商の部分群として) "e というカスプに付随する惰性群" を考えることができる. (定義からこの群は $\widehat{\mathbb{Z}}$ の最大副 Σ 商 $\widehat{\mathbb{Z}}^{\Sigma}$ と同型である.) e に対応する連結遠可換型 $\mathcal{G}_e$ を, この惰性群 ($\simeq \widehat{\mathbb{Z}}^{\Sigma}$) から定まる連結遠可換型とする.

(ii-4) $\mathbb{G}$ の頂点 v, v に接する辺 e に対して, 射 $\mathcal{G}_e \to \mathcal{G}_v$ を, それぞれの連結遠可換型を定義している副有限群 ((ii-2), (ii-3) を参照) の間の自然な埋め込みから定まる射とする.

---

[16] つまり Galois 圏.

[17] $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ を Galois 圏, $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ をそれぞれ $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ を連結遠可換型とみなしたものとすると, $\mathcal{G}_1$ から $\mathcal{G}_2$ への連結遠可換型の射とは, $\mathcal{C}_2$ から $\mathcal{C}_1$ への完全関手のことである.

また, このようにして得られる遠半グラフを一般に, 副 Σ PSC 型遠半グラフという.

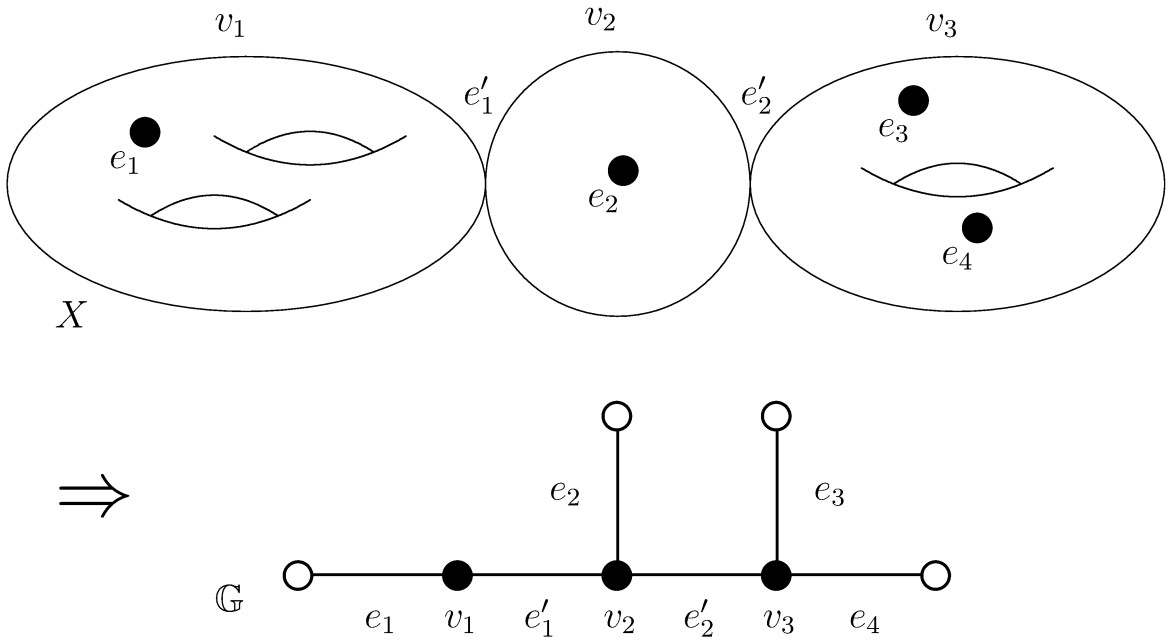


図 7: 双対半グラフ

(iii) Σ を空でない素数の集合, 副 Σ PSC 型遠半グラフ

$$\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{G}\,;\ \mathcal{G}_v\,;\ \mathcal{G}_e\,;\ b_{e\to v}\colon \mathcal{G}_e \to \mathcal{G}_v)$$

に対して, 圏 $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ を, データ $\{A_v; \phi_e\}$ (v, e はそれぞれ $\mathbb{G}$ の頂点, 閉辺すべてを動く) のなす圏とする. ここで, A_v は $\mathcal{G}_v$ から定まる Galois 圏の対象であり, e を頂点 v_1, v_2 に接する閉辺とすると, ϕ_e は, $\mathcal{G}_e$ から定まる Galois 圏の中での, 対象 $b^*_{e\to v_1}(A_{v_1})$ と対象 $b^*_{e\to v_2}(A_{v_2})$ との間の同型射. このとき, $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ は Galois 圏となることが確認できる. この Galois 圏 $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ の Galois 群の副 Σ 完備化を $\mathcal{G}$ の**基本群**と呼び, $\Pi_{\mathcal{G}}$ と書く[18].

(iv) Σ を空でない素数の集合, $\mathcal{G}$ を副 Σ PSC 型遠半グラフ, $\mathbb{G}$ を $\mathcal{G}$ の下部半グラフ, $\Pi_{\mathcal{G}}$ を $\mathcal{G}$ の基本群とする. このとき, $\mathbb{G}$ の頂点, 開辺, 閉辺を, それぞれ $\mathcal{G}$ の**頂点** (vertex), **カスプ** (cusp), **ノード** (node) と呼ぶ. また, $\mathcal{G}$ の頂点 v, カスプ e, ノード e' に対して, 遠可換型 $\mathcal{G}_v$, $\mathcal{G}_e$, $\mathcal{G}_{e'}$ から ($\Pi_{\mathcal{G}}$ の元による共役を除いて) 定まる $\Pi_{\mathcal{G}}$ の部分群を, それぞれ $\Pi_{\mathcal{G}}$ の v に付随する**頂点部分群**, e に付随する**カスプ部分群**, e' に付随する**ノード部分群**と呼ぶ.

[18] ここで述べられている "$\mathcal{G}$ の副 Σ PSC 型遠半グラフとしての基本群" は, "$\mathcal{G}$ の遠半グラフとしての基本群" とは異なる. 実際, "$\mathcal{G}$ の遠半グラフとしての基本群" は [Mzk2], §2, で定義されているように, Galois 圏 $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ の基本群それ自身であるが, "$\mathcal{G}$ の副 Σ PSC 型遠半グラフとしての基本群" は, 上述のとおり, (そして [Mzk3], §1, で定義されているように) Galois 圏 $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ の基本群の副 Σ 完備化である.

定義 3.2. Σ を空でない素数の集合, $\mathcal{G}$ を副 Σ PSC 型遠半グラフとする. また, $\mathcal{G}$ の普遍被覆[19] $\widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ を 1 つ固定する.

(i) $\mathcal{G}$ の頂点全体のなす集合, カスプ全体のなす集合, ノード全体のなす集合, 辺全体のなす集合をそれぞれ $\mathrm{Vert}(\mathcal{G})$, $\mathrm{Cusp}(\mathcal{G})$, $\mathrm{Node}(\mathcal{G})$, $\mathrm{Edge}(\mathcal{G})$ と書く.

(ii) 集合 $\mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}})$ を, (有限) 集合の射影系 $\{\mathrm{Vert}(\mathcal{G}')\}_{\mathcal{G}'}$ ($\mathcal{G}'$ は固定された普遍被覆 $\widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ の中間連結有限エタール被覆全体を走る) の射影極限として定義する. また, 同様に, $\mathrm{Cusp}(\widetilde{\mathcal{G}})$, $\mathrm{Node}(\widetilde{\mathcal{G}})$, $\mathrm{Edge}(\widetilde{\mathcal{G}})$ を定義する.

$\widetilde{v} \in \mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}})$, $\widetilde{e} \in \mathrm{Edge}(\widetilde{\mathcal{G}})$, 及び, 普遍被覆 $\widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ の中間連結有限エタール被覆 $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ に対して, $\widetilde{v}$, $\widetilde{e}$ から定まる $\mathrm{Vert}(\mathcal{G}')$, $\mathrm{Edge}(\mathcal{G}')$ の元を, それぞれ $\widetilde{v}(\mathcal{G}')$, $\widetilde{e}(\mathcal{G}')$ とする.

(iii) 集合の射 $\mathcal{V}_{\mathcal{G}} \colon \mathrm{Edge}(\mathcal{G}) \to 2^{\mathrm{Vert}(\mathcal{G})}$ [20] を以下のように定義する: $e \in \mathrm{Edge}(\mathcal{G})$ に対して, $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}(e) \subseteq \mathrm{Vert}(\mathcal{G})$ を, e が接する頂点全体のなす集合とする.

また, $\mathcal{C}_{\mathcal{G}} \colon \mathrm{Vert}(\mathcal{G}) \to 2^{\mathrm{Cusp}(\mathcal{G})}$, $\mathcal{N}_{\mathcal{G}} \colon \mathrm{Vert}(\mathcal{G}) \to 2^{\mathrm{Node}(\mathcal{G})}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} \colon \mathrm{Vert}(\mathcal{G}) \to 2^{\mathrm{Edge}(\mathcal{G})}$ を以下のようにして定義する: $v \in \mathrm{Vert}(\mathcal{G})$ に対して, $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}(v) \subseteq \mathrm{Cusp}(\mathcal{G})$, $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(v) \subseteq \mathrm{Node}(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}(v) \subseteq \mathrm{Edge}(\mathcal{G})$ をそれぞれ, 頂点 v に接するカスプ, ノード, 辺全体のなす集合とする.

誤解の恐れがないときには, 簡単のために, $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$, $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}$ をそれぞれ $\mathcal{V}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{E}$ と書く.

(iv) 固定された普遍被覆 $\widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ の中間連結有限エタール被覆 $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ に対する $\mathcal{V}_{\mathcal{G}'}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{G}'}$, $\mathcal{N}_{\mathcal{G}'}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{G}'}$ たちから誘導される射 $\mathrm{Edge}(\widetilde{\mathcal{G}}) \to 2^{\mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}})}$, $\mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}}) \to 2^{\mathrm{Cusp}(\widetilde{\mathcal{G}})}$, $\mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}}) \to 2^{\mathrm{Node}(\widetilde{\mathcal{G}})}$, $\mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}}) \to 2^{\mathrm{Edge}(\widetilde{\mathcal{G}})}$ をそれぞれ, $\mathcal{V}_{\widetilde{\mathcal{G}}}$, $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{G}}}$, $\mathcal{N}_{\widetilde{\mathcal{G}}}$, $\mathcal{E}_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ と書く.

誤解の恐れがないときには, 簡単のために, $\mathcal{V}_{\widetilde{\mathcal{G}}}$, $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{G}}}$, $\mathcal{N}_{\widetilde{\mathcal{G}}}$, $\mathcal{E}_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ をそれぞれ $\mathcal{V}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{E}$ と書く.

(v) $\widetilde{v} \in \mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に対して, $\widetilde{v}(\mathcal{G})$ に付随する様々な頂点部分群の中から, 以下の条件によってただ 1 つ定まる頂点部分群 $\Pi_{\widetilde{v}} \subseteq \Pi_{\mathcal{G}}$ が存在する. これを, **$\widetilde{v}$ に付随する頂点部分群**と呼び, $\Pi_{\widetilde{v}}$ を書く: $\widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ の任意の中間連結有限エタール被覆 $\mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ に対して, $\Pi_{\widetilde{v}} \cap \Pi_{\mathcal{G}'} \subseteq \Pi_{\mathcal{G}'}$ は $\widetilde{v}(\mathcal{G}')$ に付随するある頂点部分群.

同様に, $\widetilde{e} \in \mathrm{Cusp}(\widetilde{\mathcal{G}})$, $\widetilde{e}' \in \mathrm{Node}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に対して, **$\widetilde{e}$ に付随するカスプ部分群**, **$\widetilde{e}'$ に付随するノード部分群**を定義して, それぞれ $\Pi_{\widetilde{e}}$, $\Pi_{\widetilde{e}'}$ と書く.

---

[19] ここで考えられている "普遍被覆" とは, $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ の Galois 群そのものに対応する被覆ではなく, "副 Σ 商 $\Pi_{\mathcal{G}}$ に対応する被覆" のことである (脚注 18 を参照).

[20] 本稿では, 集合 S に対してその冪集合を 2^S と書く.

頂点部分群, カスプ部分群, ノード部分群の非常に重要な性質の 1 つとして, それらが $\Pi_{\mathcal{G}}$ の中で**正規端末的**[21]であるという事実があげられる ([Mzk3], Proposition 1.2, (ii), を参照).

§4. ノード非退化外表現

この § では, NN 型外表現 (ここで, “NN” とはノード非退化 [nodally nondegenerate] の略である) という概念を定義して, その基本的な性質を述べる. この § では, Σ を空でない素数の集合, $\mathcal{G}$ を副 Σ PSC 型遠半グラフ, $\Pi_{\mathcal{G}}$ を $\mathcal{G}$ の基本群とする.

$\Pi_{\mathcal{G}}$ は位相的有限生成であるので, $\Pi_{\mathcal{G}}$ の副有限位相は $\mathrm{Out}(\Pi_{\mathcal{G}})$ の (副有限) 位相を誘導する. 一方, $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ を $\mathcal{G}$ の遠半グラフとしての自己同型全体のなす群とすると, 自然な射 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Out}(\Pi_{\mathcal{G}})$ は単射となる ([Mzk3], Proposition 1.5, (ii), を参照): $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{Out}(\Pi_{\mathcal{G}})$. 以下では, $\mathrm{Out}(\Pi_{\mathcal{G}})$ の位相が誘導する位相によって, $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ を位相群とみなす.

I を副有限群, $\rho\colon I \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ を連続な準同型射, $\rho_I\colon I \to \mathrm{Out}(\Pi_{\mathcal{G}})$ を ρ と前述の自然な埋め込み $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_{\mathcal{G}})$ との合成として得られる連続な準同型射とし, Π_I を自然な完全系列

$$1 \longrightarrow \Pi_{\mathcal{G}}\,(\simeq \mathrm{Inn}(\Pi_{\mathcal{G}})) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Pi_{\mathcal{G}}) \longrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_{\mathcal{G}}) \longrightarrow 1$$

を ρ_I で引き戻すことによって得られる副有限群とする:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \Pi_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \Pi_I & \longrightarrow & I & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_I} & & \\
1 & \longrightarrow & \Pi_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\Pi_{\mathcal{G}}) & \longrightarrow & \mathrm{Out}(\Pi_{\mathcal{G}}) & \longrightarrow & 1\,.
\end{array}$$

定義 4.1.

(i) v を $\mathcal{G}$ の頂点, $\Pi_v \subseteq \Pi_{\mathcal{G}}$ を v に付随するある頂点部分群とする. このとき, $D_v \overset{\mathrm{def}}{=} N_{\Pi_I}(\Pi_v) \subseteq \Pi_I$, $I_v \overset{\mathrm{def}}{=} Z_{\Pi_I}(\Pi_v) \subseteq D_v$ をそれぞれ v に付随する**分解群** (decomposition group), **惰性群** (inertia group) と呼ぶ. また, $\Pi_v \subseteq \Pi_{\mathcal{G}}$ が $\widetilde{v} \in \mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に付随する頂点部分群であるとき, D_v, I_v をそれぞれ **$\widetilde{v}$ に付随する分解群**, **$\widetilde{v}$ に付随する惰性群**と呼び, $D_{\widetilde{v}}$, $I_{\widetilde{v}}$ と書く.

(ii) e を $\mathcal{G}$ のカスプ, $\Pi_e \subseteq \Pi_{\mathcal{G}}$ を e に付随するあるカスプ部分群とする. このとき, $D_e \overset{\mathrm{def}}{=} N_{\Pi_I}(\Pi_e) \subseteq \Pi_I$, $I_e \overset{\mathrm{def}}{=} \Pi_e \subseteq D_e$ をそれぞれ e に付随する**分解群** (decomposition group), **惰性群** (inertia group) と呼ぶ. また, $\Pi_e \subseteq \Pi_{\mathcal{G}}$ が $\widetilde{e} \in \mathrm{Cusp}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に付随するカスプ部分群であるとき, D_e, I_e をそれぞれ **$\widetilde{e}$ に付随する分解群**, **$\widetilde{e}$ に付随する惰性群**と呼び, $D_{\widetilde{e}}$, $I_{\widetilde{e}}$ と書く.

[21] 群 G の部分群 H に対して, H の G における正規化部分群が H 自身と等しいとき (つまり $N_G(H) = H$), H は G の中で正規端末的であるという.

(iii) e を $\mathcal{G}$ のノード, $\Pi_e \subseteq \Pi_{\mathcal{G}}$ を e に付随するあるノード部分群とする. このとき, $D_e \stackrel{\mathrm{def}}{=} N_{\Pi_I}(\Pi_e) \subseteq \Pi_I$, $I_e \stackrel{\mathrm{def}}{=} Z_{\Pi_I}(\Pi_e) \subseteq D_e$[22] をそれぞれ e に付随する**分解群** (decomposition group), **惰性群** (inertia group) と呼ぶ. また, $\Pi_e \subseteq \Pi_{\mathcal{G}}$ が $\widetilde{e} \in \mathrm{Node}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に付随するノード部分群であるとき, D_e, I_e をそれぞれ **$\widetilde{e}$ に付随する分解群**, **$\widetilde{e}$ に付随する惰性群**と呼び, $D_{\widetilde{e}}$, $I_{\widetilde{e}}$ と書く.

補題 4.2.

(i) 任意の $\widetilde{v} \in \mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に対して, 合成 $I_{\widetilde{v}} \hookrightarrow \Pi_I \twoheadrightarrow I$ は単射.

(ii) 任意の $\widetilde{e} \in \mathrm{Node}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に対して, $\widetilde{v} \in \mathcal{V}(\widetilde{e})$ ならば, $I_{\widetilde{v}} \subseteq I_{\widetilde{e}}$.

証明. (i) は $\Pi_{\widetilde{v}}$ の中心自明性, 及び, $\Pi_{\widetilde{v}}$ が $\Pi_{\mathcal{G}}$ の中で正規端末的であることから直ちに従う. また (ii) は $\Pi_{\widetilde{e}} \subseteq \Pi_{\widetilde{v}}$ であることから直ちに従う. □

定義 4.3.

(i) 準同型射 $\rho\colon I \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ が以下の条件を満たすときに, 準同型射 ρ (あるいは外表現 ρ_I) は **NN 型** (of NN-type) であるという (ここで, "NN" とは**ノード非退化** [nodally nondegenerate] の略である):

(1) $I \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^{\Sigma}$.

(2) 任意の $\widetilde{v} \in \mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に対して, 合成 $I_{\widetilde{v}} \hookrightarrow \Pi_I \twoheadrightarrow I$ として得られる単射 (補題 4.2, (i), を参照) の像は I の開部分群.

(3) 任意の $\widetilde{e} \in \mathrm{Node}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に対して, $\{\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2\} = \mathcal{V}(\widetilde{e})$ とすると (このとき, $\widetilde{v}_1 \neq \widetilde{v}_2$ となることに注意), 埋め込み $I_{\widetilde{v}_1}$, $I_{\widetilde{v}_2} \subseteq I_{\widetilde{e}}$ (補題 4.2, (ii), を参照) は, 像が開部分群となるような単射 $I_{\widetilde{v}_1} \times I_{\widetilde{v}_2} \hookrightarrow I_{\widetilde{e}}$ を誘導する.

また, 準同型射 ρ が前述の条件 (1) と (3) を満たし, 更に, 条件 (2) の中の合成 $I_{\widetilde{v}} \to I$ が任意の $\widetilde{v} \in \mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に対して同型射となるとき, 準同型射 ρ (あるいは外表現 ρ_I) は**狭義 NN 型**であるという.

(ii) 準同型射 $\rho\colon I \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ が以下の条件を満たすときに, 準同型射 ρ (あるいは外表現 ρ_I) は **IPSC 型** (of IPSC-type) であるという (ここで, "IPSC" とは**惰性的標点付安定曲線** [inertial pointed stable curve] の略である): ρ によって定まる拡大

$$1 \longrightarrow \Pi_{\mathcal{G}} \longrightarrow \Pi_I \longrightarrow I \longrightarrow 1$$

が IPSC 拡大 ([Mzk4], Definition 1.2, (ii), を参照)[23]となっている.

[22] カスプとノードで, "I_e" の定義が違うことに注意.

[23] 対数的点上の安定対数曲線の対数的基本群から生じる群の拡大と同型である, ということ.

[Mzk4], Proposition 1.3, より, IPSC 型の外表現は狭義 NN 型である.

下記の命題は, 局所普遍外モノドロミー表現の引き戻しとして得られる外表現が狭義 NN 型になるための必要充分条件に関する命題である.

命題 4.4. (g,r) を非負整数の組であって $2-2g-r<0$ を満たすもの, $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ を種数 g の (順序付けられた) r 標点付安定曲線のモジュライスタック, $\mathcal{M}_{g,r}\subseteq\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ を種数 g の r 標点付平滑曲線のモジュライスタック, $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}^{\log}$ を $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ に正規交差因子 $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}\backslash\mathcal{M}_{g,r}\subseteq\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$ に付随した対数構造を与えることで得られる対数スタック, k を代数閉体であって標数が Σ の元ではないもの, $s\in\overline{\mathcal{M}}_{g,r}(k)$ を k に値を取る幾何的点, $s^{\log}\colon S^{\log}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\operatorname{Spec}k^{\log}\to\overline{\mathcal{M}}_{g,r}^{\log}$ を下部スタックの間の射が s となる狭義射とする.

このとき, $s^{\log}$ に対応する ((g,r) 型の) 安定対数曲線を考えることで, 副 Σ PSC 型遠半グラフが得られる (詳しくは [Mzk3], Example 2.5, を参照). これを $\mathcal{G}_s$ とする. また, s でのモノドロミーを考えることで, $\rho_s\colon\pi_1(S^{\log})^{\Sigma}\to\operatorname{Aut}(\mathcal{G}_s)$ を得る.

一方, $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}^{\log}$ の対数構造の定義を考えることで, 対数的基本群 $\pi_1(S^{\log})^{\Sigma}$ は自然な直和分解

$$\pi_1(S^{\log})^{\Sigma}\simeq\bigoplus_{e\in\mathrm{Node}(\mathcal{G}_s)}I[e]$$

を持つ. ここで, $I[e]$ は $e\in\mathrm{Node}(\mathcal{G}_s)$ で添字付けられた $\widehat{\mathbb{Z}}^{\Sigma}(1)$ のコピー.

$I\stackrel{\mathrm{def}}{=}\widehat{\mathbb{Z}}^{\Sigma}$ として, $\phi\colon I\to\pi_1(S^{\log})^{\Sigma}$ を連続な準同型射とする. このとき, 以下の 3 つの条件は同値 :

(i) 合成 $\rho_s\circ\phi\colon I\to\operatorname{Aut}(\mathcal{G}_s)$ は NN 型.

(ii) 合成 $\rho_s\circ\phi\colon I\to\operatorname{Aut}(\mathcal{G}_s)$ は狭義 NN 型.

(iii) 任意の $f\in\mathrm{Node}(\mathcal{G}_s)$ に対して, 合成

$$I\stackrel{\phi}{\to}\pi_1(S^{\log})^{\Sigma}\simeq\bigoplus_{e\in\mathrm{Node}(\mathcal{G}_s)}I[e]\stackrel{\mathrm{proj.}}{\twoheadrightarrow}I[f]$$

の像は $I[f]$ の開部分群.

この命題 4.4 から, 以下の系が得られる.

系 4.5. §2 のステップ 4 の条件 $(*)^{\mathrm{comb}}$ の中に登場した外表現 $\rho_{\mathcal{X}_2/\mathcal{X}}|_{\Pi_e}$ (ただし e はノード) は狭義 NN 型外表現である.

証明. $Z^{\log}$ のノードは e のみであるので (図 3 を参照), ノード e の近傍での $Z^{\log}$ の対数構造を考えれば, この外表現が命題 4.4 の条件 (iii) を満たすことが確認できる. □

狭義 NN 型の外表現に対して, 以下の補題が成立することが確かめられる. ((v) 以外は比較的容易に証明することができる.)

補題 4.6. ρ が狭義 NN 型ならば, 以下が成立する :

(i) 任意の $\widetilde{v} \in \mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に対して, $I_{\widetilde{v}} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^{\Sigma}$.

(ii) 任意の $\widetilde{v} \in \mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に対して, $D_{\widetilde{v}} = \Pi_{\widetilde{v}} \times I_{\widetilde{v}}$. 特に (i) より, $D_{\widetilde{v}} \simeq \Pi_{\widetilde{v}} \times \widehat{\mathbb{Z}}^{\Sigma}$.

(iii) 任意の $\widetilde{e} \in \mathrm{Edge}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に対して, $\widetilde{v} \in \mathcal{V}(\widetilde{e})$ ならば, $D_{\widetilde{e}} = \Pi_{\widetilde{e}} \times I_{\widetilde{v}}$. 特に (i) より, $D_{\widetilde{e}} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^{\Sigma} \times \widehat{\mathbb{Z}}^{\Sigma}$.

(iv) 任意の $\widetilde{e} \in \mathrm{Node}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に対して, $D_{\widetilde{e}} = I_{\widetilde{e}}$.

(v) 任意の $\widetilde{v} \in \mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に対して, $Z_{\Pi_I}(I_{\widetilde{v}}) = D_{\widetilde{v}}$.

以下の補題は, [Mzk4], Proposition 1.3, (iv), の, 狭義 NN 型外表現に対する一般化である. この補題は, NN 型外表現に対する組み合わせ論版 Grothendieck 予想の証明で重要な役割を果たす.

補題 4.7. ρ を狭義 NN 型であるとする. このとき, 任意の $\widetilde{v}, \widetilde{v}' \in \mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}})$ に対して, 互いに排他的な以下の条件のいずれか 1 つが必ず成立する :

(i) $\widetilde{v} = \widetilde{v}'$.

(ii) $\widetilde{v} \neq \widetilde{v}'$ であって, $\mathcal{N}(\widetilde{v}) \cap \mathcal{N}(\widetilde{v}') \neq \emptyset$.

(iii) $\widetilde{v} \neq \widetilde{v}'$ であって,

$$\mathcal{V}(\widetilde{v}, \widetilde{v}'') \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ \widetilde{v}'' \in \mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}}) \setminus \{\widetilde{v}, \widetilde{v}'\} \mid \mathcal{N}(\widetilde{v}) \cap \mathcal{N}(\widetilde{v}''), \mathcal{N}(\widetilde{v}') \cap \mathcal{N}(\widetilde{v}'') \neq \emptyset \} \neq \emptyset .$$

(iv) (i), (ii), (iii) のどれも満たさない.

ここで, 条件 (i), (ii), (iii), (iv) が成立することと, それぞれ以下の条件 (1), (2), (3), (4) が成立することは同値 :

(1) $D_{\widetilde{v}} = D_{\widetilde{v}'}$.

(2) $D_{\widetilde{v}} \cap D_{\widetilde{v}'}$ は, ある $\mathrm{Node}(\widetilde{\mathcal{G}})$ の元に付随する惰性群と一致.

(3) $D_{\widetilde{v}} \cap D_{\widetilde{v}'}$ は, ある $\mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}})$ の元に付随する惰性群と一致.

(4) $D_{\widetilde{v}} \cap D_{\widetilde{v}'}$ は自明.

その上, 条件 (ii), (iii) が成立するとき, 集合 $\mathcal{N}(\widetilde{v}) \cap \mathcal{N}(\widetilde{v}')$, $\mathcal{V}(\widetilde{v}, \widetilde{v}'')$ はただ 1 つの元からなり, 条件 (2), (3) にあらわれる $\mathrm{Node}(\widetilde{\mathcal{G}})$, $\mathrm{Vert}(\widetilde{\mathcal{G}})$ の元はそのただ 1 つの元.

注意 3. 補題 4.2, (i); 4.6, (iii), (iv), より, 補題 4.7 の条件 (1), (2), (3), (4) が成立することと, それぞれ以下の条件 (1′), (2′), (3′), (4′) が成立することは同値:

(1′) $D_{\widetilde{v}} = D_{\widetilde{v}'}$.

(2′) $D_{\widetilde{v}} \cap D_{\widetilde{v}'} \neq \{1\}$ かつ $D_{\widetilde{v}} \cap D_{\widetilde{v}'} \cap \Pi_{\mathcal{G}} \neq \{1\}$.

(3′) $D_{\widetilde{v}} \cap D_{\widetilde{v}'} \neq \{1\}$ かつ $D_{\widetilde{v}} \cap D_{\widetilde{v}'} \cap \Pi_{\mathcal{G}} = \{1\}$.

(4′) $D_{\widetilde{v}} \cap D_{\widetilde{v}'} = \{1\}$.

§5. ノード非退化外表現に対する組み合わせ論版 Grothendieck 予想

この § では NN 型外表現に対する組み合わせ論版 Grothendieck 予想について解説をする. この § の目的は以下の定理の証明の解説を行うことである.

定理 5.1. Σ を空でない素数の集合, $\mathcal{G}$ と $\mathcal{H}$ を副 Σ PSC 型遠半グラフ, $\Pi_{\mathcal{G}}$ を $\mathcal{G}$ の基本群, $\Pi_{\mathcal{H}}$ を $\mathcal{H}$ の基本群, $\rho^{\mathcal{G}}\colon I \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ と $\rho^{\mathcal{H}}\colon J \to \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ を NN 型準同型射, $\xi\colon I \xrightarrow{\sim} J$ と $\alpha\colon \Pi_{\mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} \Pi_{\mathcal{H}}$ を同型射であって次の図式を可換にするものとする:

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\rho^{\mathcal{G}}_I} & \mathrm{Out}(\Pi_{\mathcal{G}}) \\ \xi\big\downarrow & & \big\downarrow \text{by } \alpha \\ J & \xrightarrow[\rho^{\mathcal{H}}_J]{} & \mathrm{Out}(\Pi_{\mathcal{H}}). \end{array}$$

このとき, 以下の条件 $(*)^{\mathrm{cusp}}$ が満たされているならば, α はグラフ的[24]:

$(*)^{\mathrm{cusp}}$: $\mathrm{Cusp}(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ であって, α は群性カスプ的 (group-theoretically cuspidal)[25].

§2 のステップ 4 の条件 $(*)^{\mathrm{comb}}$ で考察されている状況を復習しよう. 副有限群 $\Pi_{1/2}$ を生じさせる安定曲線は, 配置空間の間の射影のファイバーとして得られる曲線であるので, (たとえ $r = 0$ であったとしても!) "新しいカスプ" と呼ばれるカスプを持つため (図 5 を参照), 特に, "Cusp(−)"$\neq \emptyset$ である. 一方, 問題とされている $\Pi_{1/2}$ の外部自己同型 ϕ は, $\mathrm{Out}^{\mathrm{FC}}(\Pi_{1/2})$ の元であると仮定されているので, 定義 1.1, (ii), の条件 (C) を満たすため, 特に, 群性カスプ的である. 従って, 系 4.5, 及び, 定理 5.1 から, §2 のステップ 4 の条件 $(*)^{\mathrm{comb}}$ が成立することがわかる. これにより, §2 で与えた議論によって, 定理 1.2 の証明が完結する.

この § の残りの部分で, 定理 5.1 の証明の概略を与える.

Π_I を Π_I の適当な開部分群に取り替えることによって, $\rho^{\mathcal{G}}$ と $\rho^{\mathcal{H}}$ を狭義 NN 型, $\mathcal{G}$ と $\mathcal{H}$ を頑丈 (sturdy)[26] であると仮定しても良い. このとき, [Mzk3], Theorem 1.6, (ii),

[24] α が PSC 型遠半グラフの同型射 $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$ から生じているということ. [Mzk3], Definition 1.4, (i), を参照.

[25] $\Pi_{\mathcal{G}}$ の任意のカスプ部分群の α による像が $\Pi_{\mathcal{H}}$ のカスプ部分群となっていて, $\Pi_{\mathcal{H}}$ の任意のカスプ部分群の α^{-1} による像が $\Pi_{\mathcal{G}}$ のカスプ部分群となっているということ. [Mzk3], Definition 1.4, (iv), を参照.

[26] PSC 型遠半グラフが頑丈であるとは, その PSC 型遠半グラフを定める標点付安定曲線 (定義 3.1, (ii), を参照) の任意の既約成分の正規化の種数が 2 以上であるということである. [Mzk3], Definition 1.1, (ii), を参照.

と "頂点部分群と頂点部分群の交わりは, 自明であるか頂点部分群であるかノード部分群であるかのいずれかである" という観察から, α がグラフ的であることを証明するためには (それを様々な連結有限エタール被覆に適用することによって) 以下の主張 $(*)^{\mathrm{vert}}$ が成立することを証明すれば充分であることがわかる:

$(*)^{\mathrm{vert}}$: $\overline{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{H}}$ をそれぞれ $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ のコンパクト化 (compactification)[27] とすると, 条件 $(*)^{\mathrm{cusp}}$ によって α から誘導される同型射 $\overline{\alpha}\colon \Pi_{\overline{\mathcal{G}}} \xrightarrow{\sim} \Pi_{\overline{\mathcal{H}}}$ は群性頂点的 (group-theoretically verticial)[28].

以下, $(*)^{\mathrm{vert}}$ を証明する. $(*)^{\mathrm{vert}}$ の証明は, 次の 2 つのステップに分かれる:

ステップ 1: カスプが乗っている $\mathcal{G}$ の頂点に対応する $\overline{\mathcal{G}}$ の頂点を $\overline{v}_0$ とする. このとき, 条件 $(*)^{\mathrm{cusp}}$ を用いることで, $\overline{v}_0$ に付随する $\Pi_{\overline{\mathcal{G}}}$ の頂点部分群の $\overline{\alpha}$ による像が, $\Pi_{\overline{\mathcal{H}}}$ の頂点部分群となっていることを証明する.

ステップ 2: 補題 4.7 を用いることで, ($\overline{\mathcal{G}}$ の適切な有限エタール被覆を考えることによって) $\overline{\mathcal{G}}$ の頂点 $\overline{v}, \overline{w}$ に対して, $\mathcal{N}(\overline{v}) \cap \mathcal{N}(\overline{w}) \neq \emptyset$ かつ, $\overline{w}$ に付随する $\Pi_{\overline{\mathcal{G}}}$ の頂点部分群の $\overline{\alpha}$ による像が $\Pi_{\overline{\mathcal{H}}}$ の頂点部分群になるならば, $\overline{v}$ に付随する $\Pi_{\overline{\mathcal{G}}}$ の頂点部分群の $\overline{\alpha}$ による像も $\Pi_{\overline{\mathcal{H}}}$ の頂点部分群となることを証明する.

定理 5.1 の証明のために記号をいくつか用意する. $\mathcal{V}_{\overline{\mathcal{G}}}(\alpha) \subseteq \mathrm{Vert}(\overline{\mathcal{G}})$ を, $\overline{\mathcal{G}}$ の頂点で, その頂点に付随する $\Pi_{\overline{\mathcal{G}}}$ のある頂点部分群 (従ってその頂点に付随する任意の頂点部分群) の $\overline{\alpha}$ による像が $\Pi_{\overline{\mathcal{H}}}$ のある頂点部分群となっているものからなる集合とする. (このとき, "群性頂点的" の定義から,

$$(*)^{\mathrm{vert}} \text{ が成立} \iff \mathcal{V}_{\overline{\mathcal{G}}}(\overline{\alpha}) = \mathrm{Vert}(\overline{\mathcal{G}}) \text{ かつ } \mathcal{V}_{\overline{\mathcal{H}}}(\overline{\alpha}^{-1}) = \mathrm{Vert}(\overline{\mathcal{H}})$$

である.) $\rho^{\mathcal{G}}\colon I \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$, $\rho^{\mathcal{H}}\colon J \to \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ から定まる射 $I \to \mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{G}})$, $J \to \mathrm{Aut}(\overline{\mathcal{H}})$ をそれぞれ $\rho^{\overline{\mathcal{G}}}$, $\rho^{\overline{\mathcal{H}}}$ と書くと, $\rho^{\overline{\mathcal{G}}}$, $\rho^{\overline{\mathcal{H}}}$ は狭義 NN 型となることが確認できる. ここで, "ρ から Π_I を構成した方法" と同様の方法で, この $\rho^{\overline{\mathcal{G}}}$, $\rho^{\overline{\mathcal{H}}}$ から構成される副有限群をそれぞれ $\overline{\Pi}_I, \overline{\Pi}_J$ と書く:

$$1 \longrightarrow \Pi_{\overline{\mathcal{G}}} \longrightarrow \overline{\Pi}_I \longrightarrow I \longrightarrow 1\,;$$

$$1 \longrightarrow \Pi_{\overline{\mathcal{H}}} \longrightarrow \overline{\Pi}_J \longrightarrow J \longrightarrow 1\,.$$

また, 同型射 $\xi\colon I \xrightarrow{\sim} J$, $\alpha\colon \Pi_{\mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} \Pi_{\mathcal{H}}$ から定まる同型射 $\Pi_I \xrightarrow{\sim} \Pi_J$ を β, 同型射 $\xi\colon I \xrightarrow{\sim} J$, $\overline{\alpha}\colon \Pi_{\overline{\mathcal{G}}} \xrightarrow{\sim} \Pi_{\overline{\mathcal{H}}}$ から定まる同型射 $\overline{\Pi}_I \xrightarrow{\sim} \overline{\Pi}_J$ を $\overline{\beta}$ とする:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \Pi_{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \Pi_I & \longrightarrow & I & \longrightarrow & 1 \\
 & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow{\scriptstyle\wr} & & {\scriptstyle\wr}\big\downarrow{\scriptstyle\beta} & & {\scriptstyle\wr}\big\downarrow{\scriptstyle\xi} & & \\
1 & \longrightarrow & \Pi_{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \Pi_J & \longrightarrow & J & \longrightarrow & 1\,;
\end{array}$$

[27]頑丈な PSC 型遠半グラフのコンパクト化とは, その遠半グラフのカスプを取り除くことで得られる PSC 型遠半グラフのことである. [Mzk3], Remark 1.1.6, を参照.

[28]$\Pi_{\overline{\mathcal{G}}}$ の任意の頂点部分群の $\overline{\alpha}$ による像が $\Pi_{\overline{\mathcal{H}}}$ の頂点部分群となっていて, $\Pi_{\overline{\mathcal{H}}}$ の任意の頂点部分群の $\overline{\alpha}^{-1}$ による像が $\Pi_{\overline{\mathcal{G}}}$ の頂点部分群となっているということ. [Mzk3], Definition 1.4, (iv), を参照.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \Pi_{\overline{\mathcal{G}}} & \longrightarrow & \overline{\Pi}_I & \longrightarrow & I & \longrightarrow & 1 \\ & & \overline{\alpha}\downarrow\wr & & \wr\downarrow\overline{\beta} & & \wr\downarrow\xi & & \\ 1 & \longrightarrow & \Pi_{\overline{\mathcal{H}}} & \longrightarrow & \overline{\Pi}_J & \longrightarrow & J & \longrightarrow & 1\,. \end{array}$$

まず最初に, $e \in \mathrm{Cusp}(\mathcal{G})$ (条件 $(*)^{\mathrm{cusp}}$ を参照), $v_0 \in \mathcal{V}(e)$ とする. また, $\overline{v}_0 \in \mathrm{Vert}(\overline{\mathcal{G}})$ を v_0 によって定まる $\overline{\mathcal{G}}$ の頂点とする. このとき,

<u>**ステップ 1**</u>: $\overline{v}_0 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathcal{G}}}(\overline{\alpha})$

となることを証明する. 実際, $D_e \subseteq \Pi_I$ をカスプ e に付随する Π_I のある分解群とすると, 条件 $(*)^{\mathrm{cusp}}$ により, $\beta(D_e) \subseteq \Pi_J$ は $\mathcal{H}$ のあるカスプ $e_{\mathcal{H}}$ に付随するある惰性群 $D_{e_{\mathcal{H}}}$ と一致, つまり $\beta(D_e) = D_{e_{\mathcal{H}}}$. また, 補題 4.6, (iii), によって, $D_e \subseteq \Pi_I$ の $\overline{\Pi}_I$ への像は $\overline{v}_0$ に付随する $\overline{\Pi}_I$ のある惰性群 $I_{\overline{v}_0}$ と一致して, 同様に, $D_{e_{\mathcal{H}}} \subseteq \Pi_J$ の $\overline{\Pi}_J$ への像は ($\mathcal{V}(e_{\mathcal{H}}) \subseteq \mathrm{Vert}(\mathcal{H})$ に属する頂点から定まる) $\overline{\mathcal{H}}$ の頂点 $\overline{v}_{\mathcal{H}}$ に付随する $\overline{\Pi}_J$ のある惰性群 $I_{\overline{v}_{\mathcal{H}}}$ と一致する. この考察と, 図式

$$\begin{array}{ccc} \Pi_I & \xrightarrow{\beta} & \Pi_J \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\Pi}_I & \xrightarrow[\overline{\beta}]{} & \overline{\Pi}_J \end{array}$$

の可換性から (この図式から自然に誘導される図式

$$\begin{array}{ccc} D_e & \xrightarrow{\text{by } \beta} & D_{e_{\mathcal{H}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_{\overline{v}_0} & \xrightarrow[\text{by } \overline{\beta}]{} & I_{\overline{v}_{\mathcal{H}}} \end{array}$$

を考えることで) $\overline{\beta}(I_{\overline{v}_0})$ は惰性群 $I_{\overline{v}_{\mathcal{H}}}$ と一致, つまり,

$(*)$: $\overline{\beta}(I_{\overline{v}_0}) = I_{\overline{v}_{\mathcal{H}}}$.

従って,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}(\Pi_{\overline{v}_0}) &= \overline{\beta}(D_{\overline{v}_0} \cap \Pi_{\overline{\mathcal{G}}}) \quad (\text{補題 } 4.6, \text{(ii)}) \\ &= \overline{\beta}(D_{\overline{v}_0}) \cap \Pi_{\overline{\mathcal{H}}} \\ &= \overline{\beta}(N_{\overline{\Pi}_I}(I_{\overline{v}_0})) \cap \Pi_{\overline{\mathcal{H}}} \quad (\text{補題 } 4.6, \text{(v)}) \\ &= N_{\overline{\Pi}_J}(\overline{\beta}(I_{\overline{v}_0})) \cap \Pi_{\overline{\mathcal{H}}} \\ &= N_{\overline{\Pi}_J}(I_{\overline{v}_{\mathcal{H}}}) \cap \Pi_{\overline{\mathcal{H}}} \quad (*) \\ &= D_{\overline{v}_{\mathcal{H}}} \cap \Pi_{\overline{\mathcal{H}}} \quad (\text{補題 } 4.6, \text{(v)}) \\ &= \Pi_{\overline{v}_{\mathcal{H}}} \quad (\text{補題 } 4.6, \text{(ii)}) \end{aligned}$$

となり, 特にステップ 1 が従う.

次に,

<u>ステップ 2</u>: $\overline{v}, \overline{w} \in \mathrm{Vert}(\overline{\mathcal{G}})$ に対して, $\mathcal{N}(\overline{v}) \cap \mathcal{N}(\overline{w}) \neq \emptyset$ かつ $\overline{w} \in \mathcal{V}_{\overline{\mathcal{G}}}(\overline{\alpha})$ ならば,
$$\overline{v} \in \mathcal{V}_{\overline{\mathcal{G}}}(\overline{\alpha})$$

となることを証明する. $\overline{v} = \overline{w}$ ならば主張は自明なので, $\overline{v} \neq \overline{w}$ とする. このとき, $\mathcal{N}(\overline{v}) \cap \mathcal{N}(\overline{w}) \neq \emptyset$ から, 連結な有限エタール被覆 $\overline{\mathcal{G}}' \to \overline{\mathcal{G}}$ であって, 次の条件を満たすものが存在する (図 8 を参照):

(∗∗): $\overline{v}$ の上にある $\overline{\mathcal{G}}'$ の頂点 $\overline{v}'$, 及び, $\overline{w}$ の上にある $\overline{\mathcal{G}}'$ の頂点 $\overline{w}'_1, \overline{w}'_2$ が存在して, $\overline{w}'_1 \neq \overline{w}'_2$ かつ $\overline{v}' \in \mathcal{V}(\overline{w}'_1, \overline{w}'_2)$ (記号 "$\mathcal{V}(\overline{w}'_1, \overline{w}'_2)$" については, 補題 4.7, (iii), を参照).

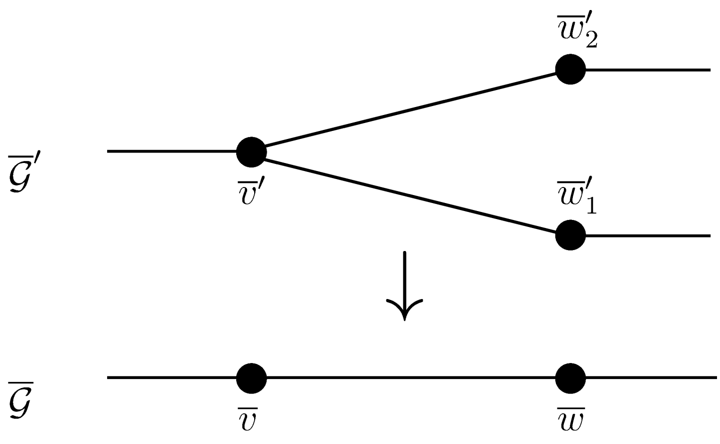


図 8: 条件 (∗∗)

(例えば, $\overline{v}$ 上で "充分に" 非自明であるが, $\overline{w}$ 上では自明となっているような $\overline{\mathcal{G}}$ の有限エタール被覆は上の条件を満たす.) ($\overline{\alpha}$ によって) この有限エタール被覆 $\overline{\mathcal{G}}' \to \overline{\mathcal{G}}$ に対応する $\overline{\mathcal{H}}$ の有限エタール被覆を $\overline{\mathcal{H}}' \to \overline{\mathcal{H}}$, $\overline{\Pi}'_I \subseteq \overline{\Pi}_I$ を $\Pi_{\overline{\mathcal{G}}'} = \overline{\Pi}'_I \cap \Pi_{\overline{\mathcal{G}}}$ となるような $\overline{\Pi}_I$ の開部分群, $\overline{\Pi}'_J \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{\beta}(\overline{\Pi}'_I) \subseteq \overline{\Pi}_J$ とする. (このとき, $\Pi_{\overline{\mathcal{H}}'} = \overline{\Pi}'_J \cap \Pi_{\overline{\mathcal{H}}}$.) 今, $\overline{w} \in \mathcal{V}_{\overline{\mathcal{G}}}(\overline{\alpha})$ であって $\overline{w}'_1, \overline{w}'_2$ は $\overline{w}$ の上にある頂点なので,

(∗∗∗): $\overline{w}'_1, \overline{w}'_2 \in \mathcal{V}_{\overline{\mathcal{G}}'}(\overline{\alpha}|_{\Pi_{\overline{\mathcal{G}}'}})$

が成立することに注意しよう.

ここで, 補題 4.7 と前述 (∗∗) から, それぞれ $\overline{w}'_1, \overline{w}'_2$ に付随する $\overline{\Pi}'_I$ のある分解群 $D_{\overline{w}'_1}$, $D_{\overline{w}'_2} \subseteq \overline{\Pi}'_I$ が存在して, 交わり $D_{\overline{w}'_1} \cap D_{\overline{w}'_2}$ は $\overline{v}'$ に付随するある惰性群 $I_{\overline{v}'} \subseteq \overline{\Pi}'_I$ と一致, つまり $D_{\overline{w}'_1} \cap D_{\overline{w}'_2} = I_{\overline{v}'}$. 一方, 前述 (∗∗∗) から $\overline{\beta}(D_{\overline{w}'_1}), \overline{\beta}(D_{\overline{w}'_2}) \subseteq \overline{\Pi}'_J$ は $\overline{\mathcal{H}}'$ の頂点に付随するある分解群と一致して, しかも, ($D_{\overline{w}'_1} \cap D_{\overline{w}'_2} = I_{\overline{v}'}$ より) $\overline{\beta}(D_{\overline{w}'_1}) \cap \overline{\beta}(D_{\overline{w}'_2}) \neq \{1\}$ かつ $\overline{\beta}(D_{\overline{w}'_1}) \cap \overline{\beta}(D_{\overline{w}'_2}) \cap \Pi_{\overline{\mathcal{G}}'} = \{1\}$ であるので, 再び補題 4.7 (と注意 3) から, $\overline{\beta}(I_{\overline{v}'}) = \overline{\beta}(D_{\overline{w}'_1}) \cap \overline{\beta}(D_{\overline{w}'_2})$ は $\overline{\mathcal{H}}'$ のある頂点 $\overline{v}'_{\mathcal{H}}$ に付随する $\overline{\Pi}'_J$ のある惰性群 $I_{\overline{v}'_{\mathcal{H}}}$ と一致する, つ

まり, $\overline{\beta}(I_{\overline{v}'}) = I_{\overline{v}'_{\mathcal{H}}}$. 従って, ステップ 1 の証明の最後の部分 ((∗) から “$\overline{\alpha}(\Pi_{\overline{v}_0}) = \Pi_{\overline{v}_{\mathcal{H}}}$” を導いた部分) と同様の議論により, $\overline{v}' \in \mathcal{V}_{\overline{\mathcal{G}}'}(\overline{\alpha}|_{\Pi_{\overline{\mathcal{G}}'}})$, 特に, $\overline{v} \in \mathcal{V}_{\overline{\mathcal{G}}}(\overline{\alpha})$ が従う.

$\overline{\mathcal{G}}$ の双対グラフの有限性から, ステップ 1 とステップ 2 によって, $\mathcal{V}_{\overline{\mathcal{G}}}(\overline{\alpha}) = \mathrm{Vert}(\mathcal{G})$ が従うことは容易に確認できる. また, α^{-1} に対して同様の議論を行うことにより, $\mathcal{V}_{\overline{\mathcal{H}}}(\overline{\alpha}^{-1}) = \mathrm{Vert}(\overline{\mathcal{H}})$ が得られ, 従って主張 $(*)^{\mathrm{vert}}$ が成立して, 特に, 定理 5.1 の証明が完結する.

謝辞

“序” に記したとおり, 本稿は, 2008 年 12 月 8 日 ∼ 12 月 12 日に京都大学数理解析研究所で行われた研究集会 “代数的整数論とその周辺” での筆者による講演の補足となっています. 本研究の発表の機会をいただいたことに対して, “代数的整数論とその周辺” 研究集会運営委員会の皆様, 特に, 研究代表者の中村博昭氏に感謝いたします. 本原稿の内容に対して適切かつ有益なコメントを与えてくださった松本眞氏, 及び, レフェリーの方に感謝申し上げます. また, 再び前述のとおり, 本稿の内容は望月新一氏との共同研究によるものです. この場をお借りして, 望月新一氏に感謝申し上げます. 最後に, 講演後に講演内容に関連する先行研究の文献をご紹介くださり (注意 1, (iii), を参照), また, 講演自体に対する有難いコメントをくださった伊原康隆氏に深く感謝いたします.

References

[Bly] G. V. Belyĭ, On Galois extensions of a maximal cyclotomic field, *Math. USSR Izv.* **14** (1980), 247–256.

[HS] D. Harbater and L. Schneps, Fundamental groups of moduli and the Grothendieck-Teichmüller group, *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), no. **7**, 3117–3148.

[Hsh1] Y. Hoshi, The exactness of the log homotopy sequence, *Hiroshima Math. J.* vol. **39**, no. **1**, (2009) 61–121.

[Hsh2] Y. Hoshi, Absolute anabelian cuspidalizations of configuration spaces of proper hyperbolic curves over finite fields, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (2009), no. **3**, 661-744.

[HM] Y. Hoshi and S. Mochizuki, *On the combinatorial anabelian geometry of nodally nondegenerate outer representations*, RIMS Preprint **1677** (August 2009); see `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/papers-english.html` for a revised version.

[Ih1] Y. Ihara, Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations, *The Grothendieck Festschrift*, Vol. II, 353–373, Progr. Math. **87**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Ih2] Y. Ihara, On the stable derivation algebra associated with some braid groups, *Israel J. Math.* **80** (1992), no. **1-2**, 135–153.

[IK] Y. Ihara and M. Kaneko, Pro-l pure braid groups of Riemann surfaces and Galois representations, *Osaka J. Math.* **29** (1992), no. **1**, 1–19.

[Iv] N. Ivanov, Mapping class groups, in *Handbook of geometric topology*, North-Holland, Amsterdam, 2002, 523–633.

[Mts] M. Matsumoto, Galois representations on profinite braid groups on curves, *J. Reine Angew. Math.* **474** (1996), 169–219.

[Mzk1] S. Mochizuki, The geometry of the compactification of the Hurwitz scheme, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **31** (1995), no. **3**, 355–441.

[Mzk2] S. Mochizuki, Semi-graphs of anabelioids, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **42** (2006), no. **1**, 221–322.

[Mzk3] S. Mochizuki, A combinatorial version of the Grothendieck conjecture, *Tohoku Math. J.* (**2**) **59** (2007), no. **3**, 455–479.

[Mzk4] S. Mochizuki, *Topics in Absolute Anabelian Geometry II: Decomposition Groups and Endomorphisms*, RIMS Preprint **1625** (March 2008); see `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki/papers-english.html` for a revised version.

[Mzk5] S. Mochizuki, On the Combinatorial Cuspidalization of Hyperbolic Curves, to appear in *Osaka J. Math.*

[MT] S. Mochizuki and A. Tamagawa, The algebraic and anabelian geometry of configuration spaces, *Hokkaido Math. J.* **37** (2008), no. **1**, 75–131.

[Naka] H. Nakamura, Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **1** (1994), no. **1**, 71–136.

[NTU] H. Nakamura, N. Takao, and R. Ueno, Some stability properties of Teichmüller modular function fields with pro-l weight structures, *Math. Ann.* **302** (1995), no. **2**, 197–213.

[Tk] N. Takao, Braid monodromies on proper curves and pro-l Galois representations, to appear in *J. Inst. Math. Jussieu.*

[Tsn] H. Tsunogai, The stable derivation algebras for higher genera, *Israel J. Math.* **136** (2003), 221–250.