RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B19 (2010), 171–186

楕円尖点形式に付随する $GL(3,R)$ 上の Eisenstein 級数の Fourier 展開
(Fourier expansions of the Eisenstein series on $GL(3,R)$ attached to elliptic cusp forms)

By

宮崎　直 (Tadashi MIYAZAKI)*

Abstract

In this article, we compute the explicit formula of the Fourier-Whittaker coefficients of the Eisenstein series induced from elliptic cusp forms. As an application, we give another proof of the analytic continuation and the functional equation, which is originally proved by Langlands.

§1. 序論

本稿では $GL(3,\mathbf{R})$ 上の Eisenstein 級数の Fourier-Whittaker 展開について述べる．$GL(3,\mathbf{R})$ 上の $GL(3,\mathbf{Z})$ に関する Eisenstein 級数としては

1. 極小放物型部分群の指標から誘導された Eisenstein 級数,
2. 極大放物型部分群の指標から誘導された Eisenstein 級数,
3. 極大放物型部分群の尖点形式から誘導された Eisenstein 級数,

の 3 種類が考えられる．この中で 1. と 2. の場合については，それぞれ Bump([1]) と Friedberg([3]) によって Fourier-Whittaker 係数の明示式が与えられている．今回は残る 3. の場合について Fourier-Whittaker 係数の明示式を与える．本稿では楕円尖点形式の場合しか扱わないが，Maass 波動尖点形式の場合もまったく同様に扱う事ができる．(詳しくは，[9] 参照)

Received March 31, 2009. Revised August 11, 2009.
2000 Mathematics Subject Classification(s): 22E46,11F70
Key Words: Automorphic form, Whittaker function, Eisenstein series.
*Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan.
e-mail: miyaza@ms.u-tokyo.ac.jp

また，Langlands([7]) によって一般の場合に証明されている Eisenstein 級数の解析接続と関数等式について，§6 で Fourier-Whittaker 係数の明示式を用いた別証明を与える．

§ 2. Eisenstein 級数と Fourier-Whittaker 展開の定義

§ 2.1. $GL(3,\mathbf{R})$ の構造

$G = GL(3,\mathbf{R})$ とし，$\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とする．G の岩澤分解 $G = N_0A_0K$ を

$$N_0 = \left\{ n[x_1,x_2,x_3] = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1,x_2,x_3 \in \mathbf{R} \right\},$$

$$A_0 = \left\{ a[y_1,y_2,y_3] = \begin{pmatrix} y_1y_2y_3 & 0 & 0 \\ 0 & y_2y_3 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; y_1,y_2,y_3 \in \mathbf{R}_{>0} \right\},$$

$$K = O(3)$$

とする．ここで，$\mathbf{R}_{>0}$ は正の実数全体の集合を表す．G の Weyl 群 $W = N_K(A_0)/Z_K(A_0)$ の完全代表系 $\{w_i \in K \mid 0 \le i \le 5\}$ を以下のようにとり，固定しておく．

$$w_0 = 1_3, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$w_3 = w_1w_2, \qquad w_4 = w_2w_1, \qquad w_5 = w_1w_2w_1 = w_2w_1w_2.$$

また，P_1 を

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}$$

で定義される G の極大放物型部分群とし，その Langlands 分解 $P_1 = N_1A_1M_1$ を

$$N_1 = \{ n[0,x_2,x_3] \mid x_2,x_3 \in \mathbf{R} \} \subset N_0,$$

$$A_1 = \{ a[1,y_2,y_3] \mid y_2,y_3 \in \mathbf{R}_{>0} \} \subset A_0,$$

$$M_1 = \left\{ m[h_1,h_2] = \left(\begin{array}{c|c} h_1 & O_{2,1} \\ \hline O_{1,2} & h_2 \end{array} \right) \;\middle|\; \begin{array}{l} h_1 \in SL^{\pm}(2,\mathbf{R}), \\ h_2 \in \{\pm 1\} \end{array} \right\},$$

$$SL^{\pm}(2,\mathbf{R}) = \{ g \in GL(2,\mathbf{R}) \mid \det(g) = \pm 1 \}$$

とする．ここで，$O_{m,n}$ は $m \times n$ の零行列とする．

§ 2.2. $\Gamma = GL(3,\mathbf{Z})$ に関する G 上の保型形式

$x, g \in G$ と G 上の関数 F に対して，

$$(R(g)F)(x) = F(xg)$$

とおく．また，R の微分によって定まる $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$(または，$U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$) の G 上の滑らかな関数への作用を同様に R と書く事にする．

Definition 2.1. $\Gamma = GL(3,\mathbf{Z})$ に関する G 上の保型形式とは，G 上の滑らかな関数 ϕ: $G \to \mathbf{C}$ で，次の性質をみたすものである：

1. ϕ は左 Γ-不変，即ち，$\phi(\gamma g) = \phi(g)$ $(\gamma \in \Gamma,\ g \in G)$.
2. ϕ は K-有限，即ち，$R(k)\phi$ $(k \in K)$ の張るベクトル空間は有限次元.
3. ϕ は $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$-有限，即ち，$R(D)\phi$ $(D \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$ の張るベクトル空間は有限次元.
4. ϕ は緩増加，即ち，ある $r, C \in \mathbf{R}$ が存在して，$|\phi(g)| < C\|g\|^r$ が勝手な $g \in G$ に対して成り立つ．ここで，$\|\cdot\|$ は，$\|g\|^2 = \sum_{ij} |g_{ij}|^2 + |\det(g)|^{-1}$ $(g = (g_{ij}) \in G)$ で定義される G 上のノルムである．

$\mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ を Γ に関する G 上の保型形式のなす空間とし，右正則作用 R によって $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K)$-加群とみなす.

§ 2.3. G 上の Whittaker 関数

$c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ に対して，N_0 のユニタリ指標 $\psi = \psi_{c_1,c_2}$ を

$$\psi(n[x_1,x_2,x_3]) = \mathbf{e}(c_1x_1 + c_2x_2), \qquad x_1,x_2,x_3 \in \mathbf{R}$$

で定義する．ここで，$\mathbf{e}(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$ である．指標 $\psi = \psi_{c_1,c_2}$ が $c_1c_2 = 0$ をみたすとき，ψ は退化指標であるという．

$$C^\infty_{\mathrm{mg}}(N_0\backslash G;\psi) = \left\{ \varphi \in C^\infty(G) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(ng) = \psi(n)\varphi(g),\ (n,g) \in N_0 \times G, \\ \varphi \text{ は緩増加.} \end{array} \right\},$$

とおいて，右正則作用 R によって $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K)$-加群とみなす.

(Π, H_Π) を許容 $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K)$-加群とする．$H_\Pi$ から $C^\infty_{\mathrm{mg}}(N_0\backslash G;\psi)$ への $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K)$-準同型の像を Π の Whittaker 模型といい，その元を Π の Whittaker 関数という．

§ 2.4. Fourier-Whittaker 展開

$\phi \in \mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ に対して，Fourier-Whittaker 係数 ϕ_{c_1,c_2} を

$$\phi_{c_1,c_2}(g) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \phi(n[\xi_1,\xi_2,\xi_3]g)\mathbf{e}(-c_1\xi_1 - c_2\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

で定義する．このとき，$\phi \mapsto \phi_{c_1,c_2}$ は $\mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ から $C^\infty_{\mathrm{mg}}(N_0\backslash G;\psi_{c_1,c_2})$ への $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)$-準同型である．よって，$\phi_{c_1,c_2}$ は $\mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ の Whittaker 関数である事に注意しておく．

$$\Gamma^2 = SL(2,\mathbf{Z}), \qquad \Gamma^2_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, n \in \mathbf{Z} \right\}$$

とおく．

Proposition 2.2. $\phi \in \mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ は

$$\phi(g) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \phi_{m_1,0}(g) + \sum_{\gamma\in\Gamma^2_\infty\backslash\Gamma^2} \sum_{\substack{(m_1,m_2)\in\mathbf{Z}^2 \\ m_2>0}} \phi_{m_1,m_2}\left(\left(\begin{array}{c|c} \gamma & O_{2,1} \\ \hline O_{1,2} & 1 \end{array} \right) g \right)$$

と展開される．これを ϕ の *Fourier-Whittaker* 展開と呼ぶ．

この Fourier-Whittaker 展開は Shalika [11, Theorem 5.8] によって $GL(n,\mathbf{A})$ 上の保型形式に対して定義されたものを $GL(3,\mathbf{R})$ 上の場合に書き直したものである．また，Bump [1, §4] と同様に直接証明する事もできる．

§ 2.5. 尖点形式から誘導された Eisenstein 級数

$\nu_1 = (\nu_{1,1},\nu_{1,2}) \in \mathbf{C}^2$ に対して，指標 $A_1 \ni a \mapsto a^{\nu_1} \in \mathbf{C}^\times$ を

$$a[1,y_2,y_3]^{\nu_1} = y_2^{2\nu_{1,1}} y_3^{2\nu_{1,1}+\nu_{1,2}}$$

で定義する．また，$\rho_1 = (1/2,-1)$ とおいておく．

$\nu_1 \in \mathbf{C}^2$ と M_1 の許容表現 (π, H_π) に対して，

$$I_{\nu_1}(\pi) = \left\{ \begin{array}{l} F\colon G \to H^\infty_\pi \\ \text{滑らかな関数} \end{array} \middle| \begin{array}{l} F\colon K\text{-有限}, \\ F(namg) = a^{\nu_1+\rho_1}\pi(m)f(g), \\ (n,a,m,g) \in N_1 \times A_1 \times M_1 \times G. \end{array} \right\}$$

とおいて，右正則作用 R によって $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}},K)$-加群とみなす．ここで，$H^\infty_\pi$ は H_π の滑らかなベクトル全体のなす部分空間とする．

$\mathbf{C}^2 \times G \ni (\nu_1, g) \mapsto F_{\nu_1}(g) \in H^\infty_\pi$ が $I_{\nu_1}(\pi)$ の平坦な切断 (flat section) であるとは，

1. 全ての $\nu_1 \in \mathbf{C}^2$ に対して，$F_{\nu_1} \in I_{\nu_1}(\pi)$．
2. $\kappa \in K$ に対して，$F_{\nu_1}(\kappa)$ の値は $\nu_1 \in \mathbf{C}^2$ に依存しない．

をみたす事である．

$\Gamma_{M_1} = \Gamma \cap M_1$ とおく．

$$L^2_\circ(\Gamma_{M_1}\backslash M_1) = \left\{ \varphi \in L^2(\Gamma_{M_1}\backslash M_1) \;\middle|\; \int_0^1 \varphi(n[x,0,0]m)dx = 0,\ m \in M_1 \right\}$$

とおいて，右正則作用 R によって M_1 の表現とみなす．π が $L^2_\circ(\Gamma_{M_1}\backslash M_1)$ の既約な部分表現であるとき，π を M_1 の尖点的表現と呼ぶ．

(π, H_π) を M_1 の尖点的表現とし，$\lambda\colon H_\pi \to \mathbf{C}$ を $\varphi \mapsto \varphi(1_3)$ で定義する．このとき，$F \in I_{\nu_1}(\pi)$ に対して，Eisenstein 級数を

$$E(F;g) = \sum_{\gamma \in (\Gamma\cap P_1)\backslash\Gamma} \lambda(F(\gamma g)) \tag{2.1}$$

で定義する．この級数は $\mathrm{Re}(\nu_{1,1}-\nu_{1,2}) > 3/2$ のときに絶対収束し，$\mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ の元を定める．また，$F \mapsto E(F;g)$ は $I_{\nu_1}(\pi)$ から $\mathcal{A}(\Gamma\backslash G)$ への $(\mathfrak{g}_\mathbf{C}, K)$-準同型である．

ここで，F_{ν_1} を $I_{\nu_1}(\pi)$ の平坦な切断とすると，Eisenstein 級数 $E(F_{\nu_1};g)$ は ν_1 の関数とみなす事ができる．§6 において，$E(F_{\nu_1};g)$ の Fourier-Whittaker 係数の明示式を計算する事で，全ての $\nu_1 \in \mathbf{C}^2$ に解析接続される事と関数等式をみたす事を示す．

§ 3. M_1 の尖点的表現

この節では，M_1 の尖点的表現について述べる．$M_1 \simeq SL^\pm(2,\mathbf{R}) \times \{\pm 1\}$ より，本質的にはよく知られた $GL(2,\mathbf{R})$ の場合 (例えば，[2] 参照) と同様である．

§ 3.1. M_1 の主系列表現

M_1 の岩澤分解 $M_1 = N_{M_1}A_{M_1}K_{M_1}$ を

$$N_{M_1} = \{\tilde{n}[x] = n[x,0,0] \mid x \in \mathbf{R}\}, \qquad A_{M_1} = \{\tilde{a}[y] = a[y, 1/\sqrt{y}, 1] \mid y > 0\},$$
$$K_{M_1} = K \cap M_1,$$

とする．また，

$$K^\circ_{M_1} = \left\{ \tilde{\kappa}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \le \theta < 2\pi \right\} \subset K_{M_1}$$

とおく．$M_0 = \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) \mid \varepsilon_i \in \{\pm1\},\ 1 \le i \le 3\}$ とおいて，M_0 の生成元の集合 $\{m_i \mid 1 \le i \le 3\}$ を

$$m_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \tilde{\kappa}_\pi, \qquad m_3 = -1_3$$

と定義する．

$\tilde{\nu} \in \mathbf{C}$ に対して，指標 $A_{M_1} \ni a \mapsto a^{\tilde{\nu}} \in \mathbf{C}^\times$ を $\tilde{a}[y]^{\tilde{\nu}} = y^{\tilde{\nu}}$ で定義する．また，$\delta_1,\delta_2,\delta_3 \in \{0,1\}$ に対して，M_0 の指標 $\sigma = \sigma_{(\delta_1,\delta_2,\delta_3)}$ を

$$\sigma(\mathrm{diag}(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \varepsilon_2\varepsilon_3, \varepsilon_3)) = \varepsilon_1^{\delta_1}\varepsilon_2^{\delta_2}\varepsilon_3^{\delta_3}, \qquad \varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3 \in \{\pm1\}$$

で定義する．このとき，M_1 の主系列表現 $\pi_{(\tilde{\nu},\sigma)}$ を表現空間

$$H_{(\tilde{\nu},\sigma)} = \left\{ \begin{array}{c} f\colon M_1 \to \mathbf{C} \\ \text{可測関数} \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(namg) = a^{\tilde{\nu}+\frac{1}{2}}\sigma(m)f(g), \\ (n,a,m,g) \in N_{M_1} \times A_{M_1} \times M_0 \times M_1, \\ f|_{K_{M_1}} \in L^2(K_{M_1}) \end{array} \right\}$$

に M_1 が右正則作用で作用する (つまり，$\pi_{(\tilde{\nu},\sigma)}(g) = R(g)$) 表現と定義する．$H_{(\tilde{\nu},\sigma),K_{M_1}}$ を K_{M_1}-有限なベクトルのなす $H_{(\tilde{\nu},\sigma)}$ の部分空間とする．

岩澤分解 $M_1 = N_{M_1}A_{M_1}K_{M_1}$ と $K_{M_1} = M_0 K^{\circ}_{M_1}$ より，$g \in M_1$ は

$$g = \tilde{n}(g)\tilde{a}(g)\tilde{m}(g)\tilde{\kappa}_{\theta_g} \qquad (\tilde{n}(g) \in N_{M_1},\ \tilde{a}(g) \in A_{M_1},\ \tilde{m}(g) \in M_0,\ 0 \le \theta_g < 2\pi)$$

と分解できる．ここで，$q \in \delta_2 + 2\mathbf{Z}$ に対して，$f_{(\tilde{\nu},\sigma;q)} \in H_{(\tilde{\nu},\sigma),K_{M_1}}$ を

$$f_{(\tilde{\nu},\sigma;q)}(g) = \tilde{a}(g)^{\tilde{\nu}+\frac{1}{2}}\sigma(\tilde{m}(g))\exp(\sqrt{-1}q\theta_g)$$

で定義すると，$V_{(\tilde{\nu},\sigma;q)} = \mathbf{C}f_{(\tilde{\nu},\sigma;q)} + \mathbf{C}f_{(\tilde{\nu},\sigma;-q)}$ は K_{M_1} の既約表現であり，$H_{(\tilde{\nu},\sigma),K_{M_1}}$ は K_{M_1} の表現として，

$$H_{(\tilde{\nu},\sigma),K_{M_1}} = \bigoplus_{q \in \delta_2 + 2\mathbf{Z}_{\ge 0}} V_{(\tilde{\nu},\sigma;q)}$$

と既約分解される．ここで，集合 $\mathbf{Z}_{\ge l}$ は l 以上の整数全体のなすの集合とする．このとき，K_{M_1} の $V_{(\tilde{\nu},\sigma;q)}$ への作用は以下で与えられる．

$$\pi_{(\tilde{\nu},\sigma)}(\tilde{\kappa}_\theta)f_{(\tilde{\nu},\sigma;\pm q)} = \exp(\pm\sqrt{-1}q\theta)f_{(\tilde{\nu},\sigma;\pm q)}, \tag{3.1}$$

$$\pi_{(\tilde{\nu},\sigma)}(m_1)f_{(\tilde{\nu},\sigma;\pm q)} = \sigma(m_1)f_{(\tilde{\nu},\sigma;\mp q)} = (-1)^{\delta_1}f_{(\tilde{\nu},\sigma;\mp q)}, \tag{3.2}$$

$$\pi_{(\tilde{\nu},\sigma)}(m_3)f_{(\tilde{\nu},\sigma;\pm q)} = \sigma(m_3)f_{(\tilde{\nu},\sigma;\pm q)} = (-1)^{\delta_3}f_{(\tilde{\nu},\sigma;\pm q)}. \tag{3.3}$$

また，$\mathrm{Re}(\tilde{\nu}) > 0$ のとき，$c \in \mathbf{R}$ と $f_{(\tilde{\nu},\sigma;q)}$ に対して，M_1 上の Jacquet 積分 $W_c(f_{(\tilde{\nu},\sigma;q)};g)$ を

$$W_c(f_{(\tilde{\nu},\sigma;q)};g) = \int_{\mathbf{R}} f_{(\tilde{\nu},\sigma;q)}(w_1\tilde{n}[x]g)\mathbf{e}(-cx)dx \quad (g \in M_1)$$

で定義できる．

§ 3.2. 離散系列表現の $\pi_{(\tilde{\nu},\sigma)}$ への埋め込み

$k \in \mathbf{Z}_{\ge 2}$ と M_0 の指標 $\sigma = \sigma_{(\delta_1,\delta_2,\delta_3)}$ に対して，$\delta_2 \equiv k \mod 2$ が成り立つとき，

$$H_{D_{(k,\sigma)}} = \widehat{\bigoplus_{q \in k + 2\mathbf{Z}_{\ge 0}}} V_{(\frac{k-1}{2},\sigma;q)}$$

は $\pi_{(\frac{k-1}{2},\sigma)}$ の既約な部分表現になる．($\widehat{\bigoplus}$ は Hilbert 空間としての直和を表す．) これを $(D_{(k,\sigma)}, H_{D_{(k,\sigma)}})$ と書く事にする．このとき，$D_{(k,\sigma)}$ の M_1 の表現としての構造は δ_1 に依

存しない，つまり，$D_{(k,\sigma_{(0,\delta_2,\delta_3)})} \simeq D_{(k,\sigma_{(1,\delta_2,\delta_3)})}$．また，$M_1$ の勝手な離散系列表現 D に対して，ある (k,σ) が存在して，D は $D_{(k,\sigma)}$ と $(\mathfrak{m}_{1\mathbf{C}}, K_{M_1})$-加群として同型になる．ここで，$\mathfrak{m}_1$ は M_1 の Lie 代数である．

M_1 の尖点的表現 (π, H_π) はユニタリ主系列表現か，離散系列表現のどちらかと同型な表現である事が知られている．本稿では，離散系列表現と同型な表現になる場合について考える．このとき，ある $k \in 2\mathbf{Z}_{\geq 6}$ が存在して，π は $D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})}$ $(\mathbf{0} = (0,0,0))$ と $(\mathfrak{m}_{1\mathbf{C}}, K_{M_1})$-加群として同型になる．

§ 3.3. 尖点的表現の構造

$L^2_\circ(\Gamma_{M_1}\backslash M_1)$ 上の Hecke 作用素 $T(n)$ $(n \in \mathbf{Z}_{\geq 1})$ を

$$(T(n)\varphi)(g) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{a,b,d\in\mathbf{Z}_{\geq 0},\\ ad=n,\ 0\leq b<d}} \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{n}\end{pmatrix} g\right) \qquad (\varphi \in L^2_\circ(\Gamma_{M_1}\backslash M_1))$$

で定義する．M_1 の尖点的表現 (π, H_π) が Hecke 作用素 $T(n)$ $(n \in \mathbf{Z}_{\geq 1})$ の同時固有空間に含まれるとき，π を Hecke 固有尖点的表現と呼ぶ事にする．$L^2_\circ(\Gamma_{M_1}\backslash M_1)$ は Hecke 固有尖点的表現の直和に分解されるから，Hecke 固有尖点的表現のみを考えれば十分である．以下，$(\pi, H_\pi) = (\pi_k, H_{\pi_k})$ は $D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})}$ と $(\mathfrak{m}_{1\mathbf{C}}, K_{M_1})$-加群として同型な Hecke 固有尖点的表現とする．

$n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ に対して，$c_\pi(n)$ を Hecke 作用素 $T(n)$ の H_π 上での固有値とする．各素数 p に対して，$\alpha_\pi(p) + \beta_\pi(p) = c_\pi(p)$ と $\alpha_\pi(p)\beta_\pi(p) = 1$ で定まる 2 つの複素数 $\alpha_\pi(p)$, $\beta_\pi(p)$ をとる．このとき，$c_\pi(n)$ は $\{\alpha_\pi(p), \beta_\pi(p)\}_p$ から，以下のようにして決まる．

1. 互いに素な正の整数 m, n に対して，$c_\pi(mn) = c_\pi(m)c_\pi(n)$.

2. 素数 p と非負整数 e に対して，

$$c_\pi(p^e) = \frac{\alpha_\pi(p)^{e+1} - \beta_\pi(p)^{e+1}}{\alpha_\pi(p) - \beta_\pi(p)}. \tag{3.4}$$

$n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ に対して，$c_\pi(-n) = c_\pi(n)$ とおく．$|q| \geq k$ となる $q \in 2\mathbf{Z}$ に対して，M_1 上の関数 $\varphi_{\pi,q}$ を

$$\varphi_{\pi,q}(g) = \sum_{m\neq 0} c_\pi(m)|m|^{-\frac{k-1}{2}} W_m(f_{(\frac{k-1}{2},\sigma_{\mathbf{0}};q)}; g) \qquad (g \in M_1) \tag{3.5}$$

で定義する．このとき，$\varphi_{\pi,q} \in H_\pi$ であり，$f_{(\frac{k-1}{2},\sigma_\pi;q)} \mapsto \varphi_{\pi,q}$ によって定まる線型写像 $\iota_\pi \colon H_{D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})},K_{M_1}} \to H_{\pi,K_{M_1}}$ は $(\mathfrak{m}_{1\mathbf{C}}, K_{M_1})$-同型写像になる．さらに ι_π は $H^\infty_{D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})}}$ から H^∞_π への M_1-同型写像に拡張できる．

$\mathrm{Re}(s) > 1$ となる $s \in \mathbf{C}$ に対して，π のスタンダード L 関数を

$$L(s,\pi) = \sum_{m>0} c_\pi(m)m^{-s} = \prod_{p\colon \mathrm{prime}} (1-\alpha_\pi(p)p^{-s})^{-1}(1-\beta_\pi(p)p^{-s})^{-1}$$

で定義する．

$$\epsilon_\pi = (-1)^{\frac{k}{2}}, \qquad L_\infty(s,\pi) = \Gamma_{\mathbf{C}}\left(s + \frac{k-1}{2}\right)$$

とおくと，$\Lambda(s,\pi) = L_\infty(s,\pi)L(s,\pi)$ は全ての $s \in \mathbf{C}$ に解析接続され，関数等式

$$\Lambda(s,\pi) = \epsilon_\pi \Lambda(1-s,\pi) \tag{3.6}$$

をみたす．ここで，$\Gamma_{\mathbf{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ とする．

Remark. 離散系列表現と同型な尖点的表現は楕円尖点形式と対応している．実際，$\tilde{\varphi}(x+\sqrt{-1}y) = y^{-\frac{k}{2}}\varphi_{\pi,k}(\tilde{n}[x]\tilde{a}[y])$ とおくと，$\tilde{\varphi}$ は重さ k の $SL(2,\mathbf{Z})$ に関する楕円尖点形式になる．また，留数定理を用いて計算すれば，

$$W_m(f_{(\frac{k-1}{2},\sigma_{\mathbf{0}};k)}; \tilde{n}[x]\tilde{a}[y]) = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^k m^{k-1}}{(\sqrt{-1})^k (k-1)!} y^{\frac{k}{2}} \mathbf{e}(m(x+\sqrt{-1}y)), & \text{if } m > 0, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

となり，(3.5) は古典的な意味での Fourier 展開と一致する事が分かる．また，ユニタリ主系列表現と同型な場合は Maass 波動尖点形式と対応している．

§ 4. $I_{\nu_1}(\pi)$ の平坦な切断の構成

§ 4.1. K の既約表現

$\tilde{V}_l$ を l 次同次多項式のなす $\mathbf{C}[x_1,x_2,x_3]$ の部分空間とし，$SO(3)$ の $\tilde{V}_l$ 上の作用を

$$\tilde{\tau}_l(\kappa)f(x_1,x_2,x_3) = f((x_1,x_2,x_3)\cdot\kappa) \qquad (\kappa \in SO(3),\ f \in \tilde{V}_l)$$

と定義する．ここで，$(x_1,x_2,x_3)\cdot\kappa$ は通常の行列の積である．$r^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2 \in \tilde{V}_2$ とおく．r^2 は $SO(3)$-不変だから，$r^2\cdot\tilde{V}_{l-2}$ は $\tilde{V}_l$ の $SO(3)$-不変部分空間である．τ_l を $V_l = \tilde{V}_l/(r^2\cdot\tilde{V}_{l-2})$ 上に定義される $\tilde{\tau}_l$ の商表現とすると，τ_l は $(2l+1)$ 次元既約表現になり，$SO(3)$ の既約表現の同型類は $\{\tau_l \mid l \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$ で尽くされる．($l<0$ のときは $\tilde{V}_l = 0$ とする．) ここで，τ_l を -1_3 が自明に作用するように $K = O(3) = \{\pm 1_3\}\times SO(3)$ 上に拡張すると，K の既約表現で $m_3 = -1_3$ が自明に作用するものは $\{\tau_l \mid l \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$ で尽くされる．

V_l の基底 $\{v_q^{(l)}\}_{-l\leq q\leq l}$ を

$$v_q^{(l)} = (\mathrm{sgn}(q)x_1 + \sqrt{-1}x_2)^{|q|}x_3^{l-|q|} \mod r^2\cdot\tilde{V}_{l-2}, \quad -l \leq q \leq l.$$

と定義する．(τ_l^*, V_l^*) を (τ_l, V_l) の反傾表現とし，$\{v_q^{(l)*}\}_{-l\leq q\leq l}$ を $\{v_q^{(l)}\}_{-l\leq q\leq l}$ の双対基底とする．平坦な切断を構成するときに必要となるので，$\tilde{\kappa}_\theta, m_1 \in K$ の $\{v_q^{(l)*}\}_{-l\leq q\leq l}$ へ

の作用を計算しておく：

$$\tau_l^*(\tilde{\kappa}_\theta)v_q^{(l)*} = \exp(-\sqrt{-1}q\theta)v_q^{(l)*}, \qquad 0 \le \theta < 2\pi, \tag{4.1}$$

$$\tau_l^*(m_1)v_q^{(l)*} = (-1)^l v_{-q}^{(l)*}. \tag{4.2}$$

§ 4.2. 平坦な切断の構成

まず，$k \in 2\mathbf{Z}_{\ge 6}$ に対して，$I_{\nu_1}(D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})})$ の平坦な切断を構成する．

$$H_{D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})}} = \widehat{\bigoplus_{q\in 2\mathbf{Z},\ |q|\ge k}} \mathbf{C} f_{(\tilde{\nu},\sigma;q)}.$$

であるから，$H_{D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})}}$-値関数 $F \in I_{\nu_1}(D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})})$ は

$$F(x) = \sum_{q\in 2\mathbf{Z},\ |q|\ge k} F_q(x) f_{(\tilde{\nu},\sigma;q)}$$

と分解される．このとき，

$$F(mx) = D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})}(m)F(x) \qquad x \in G,\ m \in M_1$$

であるから，(3.1)，(3.2)，(3.3) より，

$$\begin{aligned} &F_q(\tilde{\kappa}_\theta x) = \exp(\sqrt{-1}q\theta)F_q(x) \quad (0 \le \theta < 2\pi), \\ &F_q(m_1 x) = F_{-q}(x), \qquad F_q(m_3 x) = F_q(x) \end{aligned}$$

が成り立つ．従って，$F|_K$ は

$$\bigoplus_{q\in 2\mathbf{Z}_{\ge k/2}} \{F_q(x)f_{(\tilde{\nu},\sigma;q)} + F_q(m_1x)f_{(\tilde{\nu},\sigma;-q)} \mid F_q \in C_{\mathrm{fin}}(K;q)\}, \tag{4.3}$$

$$C_{\mathrm{fin}}(K;q) = \left\{ F_q \in C_{\mathrm{fin}}(K) \;\middle|\; \begin{array}{l} F_q(\tilde{\kappa}_\theta x) = \exp(\sqrt{-1}q\theta)F_q(x),\ \theta \in \mathbf{R}, \\ F_q(m_3x) = F_q(x),\ x \in K, \end{array} \right\}$$

に含まれる．ここで，$C_{\mathrm{fin}}(K)$ は K 上の K-有限な関数のなす空間を表す．$P_1 \cap K = K_{M_1}$ と $G = P_1K$ より，制限写像 $F \mapsto F|_K$ は $I_{\nu_1}(D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})})$ から (4.3) の空間への K-同型写像を定める事が分かる．

Peter-Weyl の定理より，$C_{\mathrm{fin}}(K)$ は K の既約表現の行列係数で張られる．従って，(4.1) より，$C_{\mathrm{fin}}(K;q)$ は

$$F_{(q,v)}(x) = \langle v_q^{(l)*}, \tau_l(x)v\rangle, \qquad (v \in V_l,\ l \in \mathbf{Z}_{\ge |q|})$$

で張られる事が分かる．ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $V_l^* \times V_l$ 上の標準的なペアリングを表す．さらに (4.2) より，$F_{(q,v)}(m_1x) = (-1)^l F_{(-q,v)}(x)$ である．

$G = N_1A_1M_1K$ であるから，$g \in G$ は

$$g = n_1(g)a_1(g)m_1(g)\kappa_1(g), \qquad (n_1(g) \in N_1, a_1(g) \in A_1, m_1(g) \in M_1, \kappa_1(g) \in K)$$

と分解できる．$q \in 2\mathbf{Z}_{\geq k/2}$ に対して，G 上の $H_{D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})}}$-値関数 $F^1_{(\nu_1,k;q,v)}$ を

$$\begin{aligned} F^1_{(\nu_1,k;q,v)}(g) =& a_1(g)^{\nu_1+\rho_1} D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})}(m_1(g))\{F_{(q,v)}(\kappa_1(g)) f_{(\frac{k-1}{2},\sigma_{\mathbf{0}};q)} \\ &+ (-1)^l F_{(-q,v)}(\kappa_1(g)) f_{(\frac{k-1}{2},\sigma_{\mathbf{0}};-q)}\} \end{aligned}$$

ここで，$g = n_1(g)a_1(g)m_1(g)\kappa_1(g)$ という分解は一意的でないが，この定義は well-defined である．上の議論より，

$$I_{\nu_1}(D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})}) = \bigoplus_{q \in 2\mathbf{Z}_{\geq k/2},\ l \in \mathbf{Z}_{\geq q}} \{F^1_{(\nu_1,k;q,v)} \mid v \in V_l\}.$$

となる．このとき，$\{F^1_{(\nu_1,k;q,v)} \mid v \in V_l\} \simeq V_l$ であり，$F^1_{(\nu_1,k;q,v)}(g)$ は $I_{\nu_1}(D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})})$ の平坦な切断である．

§3.3 で定義した M_1-同型写像 $\iota_\pi \colon H^\infty_{D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})}} \to H^\infty_\pi$ は $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K)$-同型写像 $I_{\nu_1}(D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})}) \ni F \mapsto \iota_\pi \circ F \in I_{\nu_1}(\pi)$ を誘導する．$F^1_{(\nu_1,k;q,v)}(g)$ のこの写像による像は

$$F^1_{(\nu_1,\pi;q,v)}(g) = a_1(g)^{\nu_1+\rho_1}\pi(m_1(g))\{F_{(q,v)}(\kappa_1(g))\varphi_{\pi,q} + (-1)^l F_{(-q,v)}(\kappa_1(g))\varphi_{\pi,-q}\}$$

であり，

$$I_{\nu_1}(\pi) = \bigoplus_{q \in 2\mathbf{Z}_{\geq k/2},\ l \in \mathbf{Z}_{\geq q}} \{F^1_{(\nu_1,\pi;q,v)} \mid v \in V_l\}$$

となる．$F^1_{(\nu_1,\pi;q,v)}$ は $I_{\nu_1}(\pi)$ の平坦な切断である．

§ 5. Eisenstein 級数の Fourier-Whittaker 展開

§ 5.1. G の主系列表現

$\nu_0 = (\nu_{0,1}, \nu_{0,2}, \nu_{0,3}) \in \mathbf{C}^3$ に対して，指標 $A_0 \ni a \mapsto a^{\nu_0} \in \mathbf{C}^\times$ を $a[y_1, y_2, y_3]^{\nu_0} = y_1^{\nu_{0,1}} y_2^{\nu_{0,1}+\nu_{0,2}} y_3^{\nu_{0,1}+\nu_{0,2}+\nu_{0,3}}$ で定義する．$\rho_0 = (1, 0, -1)$ とおく．$\nu_0 \in \mathbf{C}^3$ と M_0 の指標 $\sigma = \sigma_{(\delta_1,\delta_2,\delta_3)}$ に対して，

$$I(\nu_0, \sigma) = \left\{ F \in C^\infty(G) \;\middle|\; \begin{array}{l} F(namg) = a^{\nu_0+\rho_0}\sigma(m)F(g), \\ (n,a,m,g) \in N_0 \times A_0 \times M_0 \times G, \\ F\colon K\text{-有限} \end{array} \right\}.$$

とおいて，右正則作用 R によって，$(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K)$ 加群とみなす．このとき，$I(\nu_0, \sigma)$ は G の主系列表現に付随する $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K)$-加群である．

写像 $\lambda_{(\tilde{\nu},\sigma)}\colon H_{(\tilde{\nu},\sigma)} \to \mathbf{C}$ を $f \mapsto f(1_3)$ で定義する．$\nu_0 = (\nu_{1,1}+\tilde{\nu}, \nu_{1,1}-\tilde{\nu}, \nu_{1,2})$ のとき，$F \in I_{\nu_1}(\pi_{(\tilde{\nu},\sigma)})$ に対して，$\lambda_{(\tilde{\nu},\sigma)} \circ F \in I(\nu_0,\sigma)$ であり，$\Phi_{(\tilde{\nu},\sigma)}\colon I_{\nu_1}(\pi_{(\tilde{\nu},\sigma)}) \ni F \mapsto \lambda_{(\tilde{\nu},\sigma)} \circ F \in I(\nu_0,\sigma)$ は $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K)$-同型写像である．

定義より，$I_{\nu_1}(D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})})$ は $I_{\nu_1}(\pi_{(\frac{k-1}{2},\sigma_{\mathbf{0}})})$ の部分加群である事が分かるから，$\nu_0 = (\nu_{1,1}+\frac{k-1}{2}, \nu_{1,1}-\frac{k-1}{2}, \nu_{1,2})$ のとき，$\Phi_{(\frac{k-1}{2},\sigma_{\mathbf{0}})}$ は $I_{\nu_1}(D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})})$ から $I(\nu_0,\sigma_{\mathbf{0}})$ への埋め込みを定める．よって，$I_{\nu_1}(\pi) \simeq I_{\nu_1}(D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})})$ は $I(\nu_0,\sigma_{\mathbf{0}})$ の $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K)$-部分加群とみなせる．このとき，$\Phi_{(\frac{k-1}{2},\sigma_{\mathbf{0}})}$ による $F^1_{(\nu_1,k;q,v)}$ の像は

$$F^0_{(\nu_1,k;q,v)}(g) = a_0(g)^{\nu_0+\rho_0}\{F_{(q,v)}(\kappa_0(g)) + (-1)^l F_{(-q,v)}(\kappa_0(g))\}$$

となる．ここで，$g = n_0(g)a_0(g)\kappa_0(g)$ は $g \in G$ の岩澤分解である．

§ 5.2. Jacquet 積分

$0 \le i \le 5$, $F \in I(\nu_0,\sigma)$ に対して，G 上の Jacquet 積分 $W_{c_1,c_2}(w_i,F;g)$ を定義する事ができる．本稿では，その中で，

$$W_{c_1,0}(w_1,F;g) = \int_{\mathbf{R}} F(w_1 n[x_1,0,0]g)\mathbf{e}(-c_1x_1)dx_1,$$
$$W_{c_1,c_2}(w_5,F;g) = \int_{\mathbf{R}^3} F(w_5 n[x_1,x_2,x_3]g)\mathbf{e}(-c_1x_1-c_2x_2)dx_1dx_2dx_3$$

を用いる．これらの積分は $\mathrm{Re}(\nu_{0,i}-\nu_{0,i+1}) > 0$ $(i \in \{1,2\})$ のときに絶対収束する．このとき，$F \mapsto W_{c_1,c_2}(w_i,F;g)$ は $I(\nu_0,\sigma)$ から $C^\infty_{\mathrm{mg}}(N_0\backslash G;\psi_{c_1,c_2})$ への $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K)$-準同型となる．よって，Jacquet 積分 $W_{c_1,c_2}(w_i,F;g)$ は $I(\nu_0,\sigma)$ の Whittaker 関数である．

§ 5.3. Eisenstein 級数の Fourier-Whittaker 展開

§5.1 での議論より，$F^1_{(\nu_1,\pi;q,v)}$ と $F^0_{(\nu_1,k;q,v)}$ を同一視する事で，$I_{\nu_1}(\pi)$ は $I(\nu_0,\sigma_{\mathbf{0}})$ の $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}, K)$-部分加群とみなせる．よって，Jacquet 積分は $I_{\nu_1}(\pi)$ の Whittaker 関数とみなす事ができる．この事から，Eisenstein 級数 $E(F^1_{(\nu_1,\pi;q,v)};g)$ の Fourier-Whittaker 係数 $E_{m_1,m_2}(F^1_{(\nu_1,\pi;q,v)};g)$ は $W_{m_1,m_2}(w_i,F^0_{(\nu_1,k;q,v)};g)$ を用いて書き表せる事が期待される．(Whittaker 関数の重複度 1 定理 ([11],[13]) より，$m_1m_2 \neq 0$ のときは必ず可能である．) この事を念頭において計算すると，以下の定理を得る．

Theorem 5.1. $\mathrm{Re}(\nu_{1,1}-\nu_{1,2})>(k+1)/2$ と仮定すると，

$$E_{m_1,m_2}(F^1_{(\nu_1,\pi;q,v)};g)$$
$$=\begin{cases} 0 & \text{if } m_1=0, m_2=0,\\ c_\pi(m_1)|m_1|^{-\frac{k-1}{2}}W_{m_1,0}(w_1,F^0_{(\nu_1,k;q,v)};g) & \text{if } m_1\neq 0, m_2=0,\\ \dfrac{L(\nu_{1,1}-\nu_{1,2},\pi)}{L(\nu_{1,1}-\nu_{1,2}+1,\pi)}c_\pi(m_2)|m_2|^{-\frac{k-1}{2}}W_{0,m_2}(w_5,F^0_{(\nu_1,k;q,v)};g) & \\ & \text{if } m_1=0, m_2\neq 0,\\ \dfrac{C_{(\nu_1,\pi)}(m_1,m_2)|m_1|^{-2\nu_{1,1}}|m_2|^{-\nu_{1,1}-\frac{k-1}{2}}}{L(\nu_{1,1}-\nu_{1,2}+1,\pi)}W_{m_1,m_2}(w_5,F^0_{(\nu_1,k;q,v)};g) & \\ & \text{if } m_1\neq 0, m_2\neq 0. \end{cases}$$

ここで，$C_{(\nu_1,\pi)}(m_1,m_2)$ は

1. $C_{(\nu_1,\pi)}(m_1,m_2)=C_{(\nu_1,\pi)}(|m_1|,|m_2|)$.
2. m_1m_2 と $m_1'm_2'$ が互いに素なとき，
$$C_{(\nu_1,\pi)}(m_1m_1',m_2m_2')=C_{(\nu_1,\pi)}(m_1,m_2)C_{(\nu_1,\pi)}(m_1',m_2').$$
3. 素数 p と非負整数 n_1,n_2 に対して，
$$C_{(\nu_1,\pi)}(p^{n_1},p^{n_2})=S_{n_1,n_2}(\alpha_\pi(p)p^{\nu_{1,1}},\beta_\pi(p)p^{\nu_{1,1}},p^{\nu_{1,2}}).$$

で定義される．ここで，$S_{n_1,n_2}(\alpha,\beta,\gamma)$ は *Schur* 多項式，即ち，

$$S_{n_1,n_2}(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\begin{vmatrix}1 & \alpha^{n_1+1} & \alpha^{n_1+n_2+2}\\ 1 & \beta^{n_1+1} & \beta^{n_1+n_2+2}\\ 1 & \gamma^{n_1+1} & \gamma^{n_1+n_2+2}\end{vmatrix}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

である．

Remark. (i) π がユニタリ主系列表現と同型なときも，まったく同様の Fourier-Whittaker 展開を得る事ができる．但し，Jacquet 積分の収束域からは外れてしまうため，Jacquet 積分の有理型接続の結果 ([5]) を使う必要がある．
(ii) 筆者はこの定理を直接計算によって得たが，アデール化した状況で考えれば，無限素点での局所成分を除いて新しい結果ではない．実際，非退化指標 ψ_{m_1,m_2} $(m_1m_2\neq 0)$ の項については，新谷氏の $GL(n)$ 上の不分岐な p 進 Whittaker 関数の明示式 ([12]) と Shahidi 氏の一般の Eisenstein 級数の Fourier-Whittaker 係数の”正規化因子” の結果 ([4],[10]) か

ら，不分岐有限素点での局所成分が得られる．また，退化指標 ψ_{m_1,m_2} $(m_1m_2=0)$ の項については,

$$\sum_{m_1\in\mathbf{Z}} E_{m_1,0}(F^1_{(\nu_1,\pi;q,v)};g), \qquad \sum_{m_2\in\mathbf{Z}} E_{0,m_2}(F^1_{(\nu_1,\pi;q,v)};g)$$

がそれぞれ極大放物型部分群の冪単根基 N_1 と $N_2=w_5\theta(N_1)w_5^{-1}$ に関する Eisenstein 級数の定数項となる事から，Langlands の定数項の計算 ([6]) から，主張の表示を得られると思われる．

§6. Jacquet 積分の評価

この節では極小 K-タイプでの Jacquet 積分の明示式を計算し，それを利用して Eisenstein 級数の解析接続と関数等式を示す.

§6.1. Whittaker 関数の動径部分

V_l を生成する集合 $\{v_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in S_l}$ を

$$v_{(n_1,n_2,n_3)} = x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3} \mod r^2\cdot\tilde{V}_{l-2},$$
$$S_l=\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbf{Z}^3_{\geq 0}\mid n_1+n_2+n_3=l\}$$

で定義する．$\{v_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n}\in S_l}$ は $l\geq 2$ のとき，線型独立ではないので基底ではないが，Weyl 群の作用について対称性を持っており，Whittaker 関数の明示式を考える上でも都合が良いものである．

K-準同型 $V_l\ni v\mapsto W(v;g)\in C^\infty_{\mathrm{mg}}(N_0\backslash G;\psi)$ に対して，

$$W(v;g)=\psi(n_0(g))W(\tau_l(\kappa_0(g))v;a_0(g)),\quad g\in G$$

となる．ここで，$g=n_0(g)a_0(g)\kappa_0(g)$ は $g\in G$ の岩澤分解とする．よって，K-準同型 $v\mapsto W(v;g)$ は $\{W(v_{\mathbf{n}};a[y_1,y_2,y_3])\}_{\mathbf{n}\in S_l}$ で特徴付けられる．$W(v_{\mathbf{n}};a[y_1,y_2,y_3])$ を K-準同型 $v\mapsto W(v;g)$ の $\mathbf{n}$-成分と呼ぶ事にする．

K-加群 H に対して，τ_l-同型成分を $H[\tau_l]$ と書く事にすると，§4.2 と §5.1 の議論より，次が従う．

Lemma 6.1. $I_{\nu_1}(D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})})$ の K-タイプは $\{\tau_l\mid l\geq k\}$ で与えられる．このとき，極小 K-タイプ τ_k は $I_{\nu_1}(D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})})$ において重複度 1 で現れ，$I_{\nu_1}(D_{(k,\sigma_{\mathbf{0}})})[\tau_k]$ の $\Phi_{(\frac{k-1}{2},\sigma)}$ による像は $\{F^0_{(\nu_1,k;k,v)}\mid v\in V_k\}$ である．

この節の目標は Jacquet 積分から定まる極小 K-タイプでの K-準同型

$$V_k\ni v\mapsto W_{c_1,c_2}(w_i,F^0_{(\nu_1,k;k,v)};g)\in C^\infty_{\mathrm{mg}}(N_0\backslash G)$$

の $\mathbf{n}$-成分の明示式を求める事である.

§6.2. Jacquet 積分の明示式

$\delta_{i,j}$ を Kronecker のデルタ記号，即ち,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とし，$\Gamma_{\mathbf{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ とおいておく．[1] と [8] の計算を参考にして計算すると以下の明示式を得る.

Proposition 6.2. $\mathrm{Re}(\nu_{1,1} - \nu_{1,2}) > (k+1)/2$ と仮定する.

$$\begin{aligned} &W_{c_1,c_2}(w_i, F^0_{(\nu_1,k;k,v_{\mathbf{n}})}; a[y_1,y_2,y_3]) \\ &= (-1)^{n_1}(\sqrt{-1})^{n_2} y_1 y_2 (y_2 y_3)^{2\nu_{1,1}+\nu_{1,2}} \tilde{W}^{(k;i)}_{c_1,c_2,\mathbf{n}}(y_1,y_2) \end{aligned}$$

とおく．このとき，$c_1, c_2 \neq 0$ と $\mathbf{n} = (n_1,n_2,n_3) \in S_k$ に対して,

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{(k;1)}_{c_1,0,\mathbf{n}}(y_1,y_2) &= \delta_{n_3,0} \frac{(\sqrt{-1})^k \operatorname{sgn}(c_1)^{n_2} |c_1|^{k-1}}{\Gamma_{\mathbf{R}}(2k)} \\ &\quad \times y_1^{\nu_{1,1}+\frac{k-1}{2}} y_2^{-\nu_{1,2}} \exp(-2\pi|c_1|y_1), \\ \tilde{W}^{(k;5)}_{0,c_2,\mathbf{n}}(y_1,y_2) &= \delta_{n_1,0} \frac{\operatorname{sgn}(c_2)^{n_2} \Gamma_{\mathbf{C}}\big(\nu_{1,1} - \nu_{1,2} + \frac{k-1}{2}\big)|c_2|^{k-1}}{\Gamma_{\mathbf{C}}\big(\nu_{1,1} - \nu_{1,2} + \frac{k+1}{2}\big)\Gamma_{\mathbf{R}}(2k)} \\ &\quad \times y_1^{\nu_{1,2}} y_2^{-\nu_{1,1}+\frac{k-1}{2}} \exp(-2\pi|c_2|y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{(k;5)}_{c_1,c_2,\mathbf{n}}(y_1,y_2) &= \frac{\operatorname{sgn}(c_1)^{n_2+n_3} \operatorname{sgn}(c_2)^{n_1+n_2} |c_1|^{-\nu_{1,2}} |c_2|^{\nu_{1,1}+\frac{k-1}{2}}}{\Gamma_{\mathbf{C}}\big(\nu_{1,1} - \nu_{1,2} + \frac{k+1}{2}\big)\Gamma_{\mathbf{R}}(2k)} \\ \times \frac{1}{(4\pi\sqrt{-1})^2} &\int_{s_2}\int_{s_1} V^{(k)}_{\mathbf{n}}(s_1,s_2)(2\pi|c_1|y_1)^{-s_1}(2\pi|c_2|y_2)^{-s_2} ds_1 ds_2 \end{aligned}$$

となる．ここで，$V^{(k)}_{\mathbf{n}}(s_1,s_2)$ は

$$\begin{aligned} V^{(k)}_{\mathbf{n}}(s_1,s_2) =& \frac{\Gamma_{\mathbf{R}}(s_1+\nu_{1,2}+n_1)\Gamma_{\mathbf{R}}(s_2-\nu_{1,2}+n_3)}{\Gamma_{\mathbf{R}}(s_1+s_2+n_1+n_3)} \\ &\times \Gamma_{\mathbf{C}}\left(s_1+\nu_{1,1}+\frac{k-1}{2}\right)\Gamma_{\mathbf{C}}\left(s_2-\nu_{1,1}+\frac{k-1}{2}\right) \end{aligned}$$

で定義されるものとし，$\int_{s_i}$ は十分大きく実部を固定して，$\mathrm{Re}(s_i) - \sqrt{-1}\infty$ から $\mathrm{Re}(s_i) + \sqrt{-1}\infty$ への直線に沿って積分するものとする.

§6.3. 極小 K-タイプでの Eisenstein 級数の明示式

Eisenstein 級数 $E(F^1_{(\nu_1,\pi;q,v)};g)$ を正規化して

$$\tilde{E}(F^1_{(\nu_1,\pi;q,v)};g)=\Gamma_{\mathbf{R}}(2k)\Lambda(\nu_{1,1}-\nu_{1,2}+1,\pi)E(F^1_{(\nu_1,\pi;k,v)};g)$$

とおく．Theorem 5.1 と前節の結果より，次の結果を得る．

Theorem 6.3. $v\in V_k$ に対して，正規化した *Eisenstein* 級数 $\tilde{E}(F^1_{(\nu_1,\pi;k,v)};g)$ の *Fourier-Whittaker* 係数 $\tilde{E}_{m_1,m_2}(F^1_{(\nu_1,\pi;k,v)};g)$ は

$$\begin{aligned}&\tilde{E}_{m_1,m_2}(F^1_{(\nu_1,\pi;k,v)};g)\\&=\begin{cases}0 & \textit{if } m_1=0,m_2=0,\\ \epsilon_\pi\Lambda(\nu_{1,1}-\nu_{1,2}+1,\pi)c_\pi(|m_1|)|m_1|^{-\nu_{1,1}}W^{(\nu_1,\pi;v)}_{m_1,0}(g) & \textit{if } m_1\neq 0,m_2=0,\\ \Lambda(\nu_{1,1}-\nu_{1,2},\pi)c_\pi(|m_2|)|m_2|^{\nu_{1,1}}W^{(\nu_1,\pi;v)}_{0,m_2}(g) & \textit{if } m_1=0,m_2\neq 0,\\ C_{(\nu_1,\pi)}(|m_1|,|m_2|)|m_1|^{-2\nu_{1,1}-\nu_{1,2}}W^{(\nu_1,\pi;v)}_{m_1,m_2}(g) & \textit{if } m_1\neq 0,m_2\neq 0,\end{cases}\end{aligned}$$

となる．$V_k\ni v\mapsto W^{(\nu_1,\pi;v)}_{m_1,m_2}\in C^\infty_{mg}(N_0\backslash G;\psi_{m_1,m_2})$ は K-準同型で，$\mathbf{n}$-成分は

$$\begin{aligned}&W^{(\nu_1,\pi;v_{\mathbf{n}})}_{m_1,m_2}(a[y_1,y_2,y_3])\\&=(-1)^{n_1}(\sqrt{-1})^{n_2}y_1y_2(y_2y_3)^{2\nu_{1,1}+\nu_{1,2}}\tilde{W}^{(\nu_1,\pi;\mathbf{n})}_{m_1,m_2}(y_1,y_2).\end{aligned}$$

で与えられる．ここで，$m_1,m_2\neq 0$ に対して，

$$\begin{aligned}\tilde{W}^{(\nu_1,\pi;\mathbf{n})}_{m_1,0}(y_1,y_2)&=\delta_{n_3,0}\,\mathrm{sgn}(m_1)^{n_2+n_3}\frac{y_2^{-\nu_{1,2}}}{4\pi\sqrt{-1}}\int_{s_1}L_\infty\big(s_1+\nu_{1,1},\pi\big)(|m_1|y_1)^{-s_1}ds_1,\\ \tilde{W}^{(\nu_1,\pi;\mathbf{n})}_{0,m_2}(y_1,y_2)&=\delta_{n_1,0}\,\mathrm{sgn}(m_2)^{n_1+n_2}\frac{y_1^{\nu_{1,2}}}{4\pi\sqrt{-1}}\int_{s_2}L_\infty\big(s_2-\nu_{1,1},\pi\big)(|m_2|y_2)^{-s_2}ds_2,\\ \tilde{W}^{(\nu_1,\pi;\mathbf{n})}_{m_1,m_2}(y_1,y_2)&=\mathrm{sgn}(m_1)^{n_2+n_3}\,\mathrm{sgn}(m_2)^{n_1+n_2}\\&\qquad\times\frac{1}{(4\pi\sqrt{-1})^2}\int_{s_2}\int_{s_1}\frac{\Gamma_{\mathbf{R}}\big(s_1+\nu_{1,2}+n_1\big)\Gamma_{\mathbf{R}}\big(s_2-\nu_{1,2}+n_3\big)}{\Gamma_{\mathbf{R}}(s_1+s_2+n_1+n_3)}\\&\qquad\times L_\infty\big(s_1+\nu_{1,1},\pi\big)L_\infty\big(s_2-\nu_{1,1},\pi\big)ds_1ds_2\end{aligned}$$

であり，$\int_{s_i}$ は十分大きく実部を固定して，$\mathrm{Re}(s_i)-\sqrt{-1}\infty$ から $\mathrm{Re}(s_i)+\sqrt{-1}\infty$ への直線に沿って積分するものとする．

Theorem 5.1 の Remark (ii) でも述べたように Eisenstein 級数の Fourier-Whittaker 係数の不分岐有限素点での局所成分は一般の簡約群の場合に計算されているが，今回のように平坦な切断を具体的に構成し，無限素点での局所成分まで計算した例は少ないように

思われる．(今回は $\Gamma = GL(3,\mathbf{Z})$ として扱ってないが，分岐有限素点の局所成分についても計算された例は少ないと思われる．) 上の定理の明示式は Bump の明示式 ([1]) の類似であり，筆者は Rankin-Selberg 法等に応用できる事を期待している．

また，上の定理で与えた積分表示によって，$\tilde{E}_{m_1,m_2}(F^1_{(\nu_1,\pi;k,v)};g)$ は ν_1 について $\mathbf{C}^2$ 上で正則な関数に解析接続され，さらに勝手な $\nu_1 \in \mathbf{C}^2$ で $\tilde{E}(F^1_{(\nu_1,\pi;q,v)};g)$ の Fourier-Whittaker 展開は絶対収束する事が分かる．また，関数等式 (3.6) を用いれば，関数等式 $\tilde{E}_{m_1,m_2}(F^1_{(\nu_1,\pi;k,v)};g) = \tilde{E}_{m_1,m_2}(F^1_{(-\nu_1,\pi;k,v)};w_5{}^tg^{-1})$ をみたす事が分かる．よって，次の Corollary が成り立つ.

Corollary 6.4. $v \in V_k$ に対して，$\tilde{E}(F^1_{(\nu_1,\pi;k,v)};g)$ は全ての $\nu_1 \in \mathbf{C}^2$ に解析接続され，関数等式 $\tilde{E}(F^1_{(\nu_1,\pi;k,v)};g) = \tilde{E}(F^1_{(-\nu_1,\pi;k,v)};{}^tg^{-1})$ をみたす.

References

[1] Daniel Bump. *Automorphic forms on* GL$(3,\mathbf{R})$, volume 1083 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] Daniel Bump. *Automorphic forms and representations*, volume 55 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] Solomon Friedberg. A global approach to the Rankin-Selberg convolution for GL$(3,\mathbf{Z})$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 300(1):159–174, 1987.

[4] Stephen Gelbart and Freydoon Shahidi. *Analytic properties of automorphic L-functions*, volume 6 of *Perspectives in Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

[5] Hervé Jacquet. Fonctions de Whittaker associées aux groupes de Chevalley. *Bull. Soc. Math. France*, 95:243–309, 1967.

[6] Robert P. Langlands. *Euler products*. Yale University Press, New Haven, Conn., 1971. A James K. Whittemore Lecture in Mathematics given at Yale University, 1967, Yale Mathematical Monographs, 1.

[7] Robert P. Langlands. *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 544. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[8] Hiroyuki Manabe, Taku Ishii, and Takayuki Oda. Principal series Whittaker functions on SL$(3,R)$. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 30(1):183–226, 2004.

[9] Tadashi Miyazaki. The Eisenstein series for GL$(3,\mathbf{Z})$ induced from cusp forms. *submitted*.

[10] Freydoon Shahidi. On certain L-functions. *Amer. J. Math.*, 103(2):297–355, 1981.

[11] J. A. Shalika. The multiplicity one theorem for GL$_n$. *Ann. of Math. (2)*, 100:171–193, 1974.

[12] Takuro Shintani. On an explicit formula for class-1 "Whittaker functions" on GL_n over P-adic fields. *Proc. Japan Acad.*, 52(4):180–182, 1976.

[13] Nolan R. Wallach. Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups. In *Lie group representations, I (College Park, Md., 1982/1983)*, volume 1024 of *Lecture Notes in Math.*, pages 287–369. Springer, Berlin, 1983.