RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B25 (2011), 211–253

高次合成則入門
(An Introduction to higher composition laws)

By

谷口 隆 (Takashi TANIGUCHI)*

Abstract

We give an introduction to the theory of higher composition laws established by M. Bhargava.

Contents

Received June 29, 2010.
2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 11R29; Secondary 11R45.
著者は日本学術振興会の海外特別研究員制度から助成を受けている.
*神戸大学大学院理学研究科 (Departiment of Mathematics, Kobe University)/プリンストン大学数学科 (Department of Mathematics, Princeton University). e-mail: tani@math.kobe-u.ac.jp

§1. はじめに

本稿の目的は Bhargava の一連の論文 [3, 4, 5, 6, 7] によって展開されている，高次合成則 (Higher composition laws) の理論について入門的解説を行うことである．Gauss は [24] において，整数係数 2 元 2 次形式の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 同値類について合成が定義できることを示し，その理論を展開した．この合成は現代の用語で言えば 2 次体のイデアル類群の積を考えることに相当している．一言で言えば高次合成則とはこの理論の大幅な一般化であり，2 元 2 次形式の空間以外にも，線形表現 (G, V) の整数点の軌道 $G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ が拡大体やそのイデアル類群と対応するようなものがいくつもあることを示したものである．これまで出版された第 I-IV 部 [3, 4, 5, 6] において扱われた表現は全部で 12 個あり，それらを $V_{\mathbb{Z}}$ だけ記すと以下になる．

$$\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2, \quad \mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^2, \quad \mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2, \quad \mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^2, \quad \mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^4, \quad \wedge^3\mathbb{Z}^6,$$
$$\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2, \quad \mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3, \quad \mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^3, \quad \mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^6,$$
$$\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^2, \quad \wedge^2\mathbb{Z}^5\otimes\mathbb{Z}^4$$

群 $G_{\mathbb{Z}}$ は各々に自然に作用する $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ または $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ の直積であり，$G_{\mathbb{Z}} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), V_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2$ が上述の Gauss の場合である．いずれも整軌道が適当な代数的対象の族をパラメータ付けすることが示され，その対応が明示的に構成される．また，これらの空間の間の共変写像に対し，そのパラメータ付けが代数的に自然な操作によって対応することも示される．これによって，もともとの Gauss の合成則についても新しい視点が与えられ (7.1 節 “立方体の話”)，Gauss の合成則がこの枠組みの一断面であったことが明らかになる．

これまで出版されている 4 部の論文 I-IV[3, 4, 5, 6] では，順に $2, 3, 4, 5$ 次の拡大に対応する表現が扱われている．また，準備中の第 V 部 [7] では，

$$\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^3, \quad \wedge^2\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^2, \quad \wedge^2\mathbb{Z}^3\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^4, \quad \wedge^4\mathbb{Z}^7, \quad \wedge^3\mathbb{Z}^8$$

などの表現の整軌道が，4 元数環・8 元数環・9 次元の中心的単純環等の非可換環を分類することが示されるようである．[3, 4, 5, 6] の 120 ページ余りに及ぶ全体をここで再現するのは不可能なので，本稿では，基本的でまた既知の 2 元 2 次形式の空間 $\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2$ と 2

元 3 次形式の空間 $\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2$ の場合を再定式化し，それが [3, 4, 5, 6] で一般化される様子を説明することに重点を置いた．解説する順序が第 III 部 [5], 第 IV 部 [6], 第 I 部 [3], 第 II 部 [4] とやや変則的になってしまったが，ご容赦いただきたい．Bhargava 自身による ICM の報告記事 [10] や，Bourbaki セミナーの講義録 [1] もあるので，本稿を読まれる際はこれらも見比べながら読んでいただくとよいと思う．

上述の $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}})$ はすべて佐藤幹夫氏により考案された概均質ベクトル空間 ([35], [34]) の $\mathbb{Z}$ 上のモデルであるが，1992 年の Wright-Yukie の論文 [50] ではそれらの表現の体 k 上の軌道が考察されており，“非退化” な軌道が k の次数 $2, 3, 4, 5$ の分離代数と対応することが示されていた．Bhargava が明らかにした豊富な整軌道の構造は予期されていなかったものであるが，[50] は高次合成則の先駆的研究と言える理論である．より単純な体上の軌道との比較は有用であると思われるため，本稿では [50] の理論も簡単に解説した．

また最近，概均質ベクトル空間の一般化である余正則空間の研究が，Bhargava を中心とするグループによって推進されている．その軸となっているのは

$$\mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2, \qquad \mathbb{Q}^3 \otimes \mathbb{Q}^3 \otimes \mathbb{Q}^3, \qquad \mathrm{Sym}^2\mathbb{Q}^4 \otimes \mathbb{Q}^2, \qquad \wedge^2\mathbb{Q}^5 \otimes \mathbb{Q}^5$$

の 4 つの空間と，これらから対称化や歪対称化などによって得られる $\mathrm{Sym}^4\mathbb{Q}^2$, $\mathrm{Sym}^3\mathbb{Q}^3$ などの多数の空間である．まだ公表されている論文やプレプリントは多くないが，楕円曲線の平均階数の評価などで特筆に値する成果が挙がっており，今後も理論が大きく発展する可能性があるため，筆者の知り得た範囲で簡単に記した．

本稿の構成は次のとおりである．まず次節で環の用語と基本性質を簡単にまとめる．3 節では 2 元 2 次形式の空間 $\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2$ と 2 元 3 次形式の空間 $\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2$ の場合の既知の理論を再定式化する．4 節では第 III 部 [5] の，空間 $\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^2$ による 4 次環の分類の結果を解説する．5 節で Wright-Yukie 理論を紹介し，これらの表現が体上では分離代数を分類していることを見る．また概均質ベクトル空間についても解説し，今回問題になっている表現各々が，(主に) 例外群とある方法で結びついていることを説明する．6 節では第 IV 部 [6] の，空間 $\wedge^2\mathbb{Z}^5 \otimes \mathbb{Z}^4$ による 5 次環の分類の結果を解説する．その後，7 節では第 I 部 [3] に戻り，6 種類の表現が 2 次環のさまざまなイデアル類と関係する様子を解説し，また 8 節では第 II 部 [3] の，3 次環のイデアル類と関係する 3 種類の表現について解説する．9 節では 7 節と 8 節の議論の (驚くべき) 並行性を踏まえ，概均質ベクトル空間が相互に密接な繋がりをもつ “網” をなしていることを説明する．そして，余正則空間について簡単に触れる．最後の 10 節では，応用と一般化について触れた．本稿の 4, 6 節と 7, 8, 9 節は独立なので，3 節の後，先に 7, 8, 9 節を読んでいただくこともできる．また，5 節は背景の解説で，論理的には他の節と独立である．

高次合成則の豊富で示唆に富む内容をすべて解説することは難しく，本稿で紹介できたことはその一部にとどまっている．4 部すべての解説を書いたため，比較的長い記事となった．一方，完全な証明はほとんどの場合につけることができなかった．これらの点で不完全な記事であるかも知れないが，本稿が高次合成則の理論を理解する助けになれば幸いである．本稿を読んでこの理論に更なる興味を持たれた方は，ぜひ原論文を読んでいただきたいと思う．

§2. 準備

以降の議論で必要になる環の用語とその基本性質を簡単にまとめておく．単位的可換環であって，$\mathbb{Z}$-加群として階数 n の自由加群となるものを n 次環とよぶ．R を n 次環とする．$\alpha \in R$ が定める R の $\mathbb{Z}$-加群としての準同型 $R \ni x \mapsto \alpha x \in R$ の 跡 (trace), 行列式をそれぞれ $\mathrm{Tr}(\alpha), \mathrm{N}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ で表す．R を明示したいときは $\mathrm{Tr}_{R/\mathbb{Z}}(\alpha), \mathrm{N}_{R/\mathbb{Z}}(\alpha)$ のようにも書く．R の $\mathbb{Z}$-加群としての基底 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ をとる．このとき行列式 $\det(\mathrm{Tr}(\alpha_i\alpha_j)) \in \mathbb{Z}$ は基底の取り方に依らずに定まる．これを R の判別式とよび $D(R)$ で表す．$D(R) = 0$ のときは R は退化しているという．n 次環の同型類の集合を $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(\mathbb{Z})$ で表す．

例えば，n 次の代数体 F の整数環 $\mathcal{O}_F$ は n 次環で，その判別式が F の判別式とよばれるものである．また $\mathcal{O}_F$ の部分環で階数 n であるものが F の整環 (order) と呼ばれるものである．他にも，$\mathbb{Z}$ の n 個の直積 $\mathbb{Z}^n$ は n 次環の例である．簡単な計算で $D(\mathbb{Z}^n) = 1$ が分かる．また，$\mathbb{Z}[X]/(X^n)$ は退化した n 次環の例である．

次の補題は以下断りなしに用いる．

補題 2.1. R を n 次環とする．R の $\mathbb{Z}$ 加群としての基底を 1 を含むように取ることができる．特に，$\mathbb{Z}$ 加群としての商加群 $R/(\mathbb{Z} \cdot 1)$ は $\mathbb{Z}^{n-1}$ と同型である．

(証明) $R/(\mathbb{Z} \cdot 1)$ がねじれ元をもたないことを示す．$\overline{r} \in R/(\mathbb{Z} \cdot 1)$ がある $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ に対して $m\overline{r} = 0 \in R/(\mathbb{Z} \cdot 1)$ であるとする．$r \in R$ を $\overline{r}$ の持ち上げとすると，$mr \in \mathbb{Z}$ すなわち $r \in \mathbb{Q} \subset R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ である．もし $r \notin \mathbb{Z}$ であるとすると，$\mathbb{Z}[r]$ は $\mathbb{Z}$ 上の有限生成加群にならない．これは R が有限生成加群であることに反する．したがって $r \in \mathbb{Z}$ となる．よって $\overline{r} = 0$ となり，$R/(\mathbb{Z} \cdot 1)$ がねじれ元をもたないことがわかった．

したがって PID 上の有限生成加群の構造定理によって $R/(\mathbb{Z} \cdot 1)$ は階数 $n-1$ の自由加群となる．よって $R/(\mathbb{Z} \cdot 1) \cong \mathbb{Z}^{n-1}$ であり，これによる $\mathbb{Z}^{n-1}$ の基底の任意の R への持ちあげを考えると，それと 1 をあわせたものは R の基底となる． (証明終)

1 次環は $\mathbb{Z}$ しかない．正確には，1 次環 R は $\mathbb{Z}$ と標準的に同型である．では 2 次環はどのように分類されるだろうか．答えは次のようになる．

定理 2.2. $\mathbb{D} := \{D \in \mathbb{Z} \mid D \equiv 0, 1 \mod 4\}$ とおくと，

$$\mathcal{A}_2 \ni S \mapsto D(S) \in \mathbb{D}$$

は全単射である．具体的には，各 $D \in \mathbb{D}$ に対し

$$S(D) := \begin{cases} \mathbb{Z}[X]/(X^2 - D/4) & D \equiv 0 \mod 4, \\ \mathbb{Z}[X]/(X^2 - X - (D-1)/4) & D \equiv 1 \mod 4 \end{cases} \tag{1}$$

が判別式を D にもつ唯一の 2 次環であり[1]，2 次環はこれらで尽くされる．

[1]すべての $D \in \mathbb{D}$ について同じ公式で表すこともできる．例えば $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - DX + D(D-1)/4)$ など．

この証明は難しくない．S を 2 次環とし，基底を取って $S = \mathbb{Z}\cdot 1 \oplus \mathbb{Z}\cdot\tau$ とすれば，$\tau^2 = a\tau + b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ と書けて，このとき $D(S) = a^2 + 4b$ となる．また，τ を $\tau + m (m \in \mathbb{Z})$ に置き換えることで，$a = 0, 1$ のいずれかに取ることがただ一通りの m に対して可能である．以上のことから定理がしたがう．

この 2 次環の分類は簡明であるが，すぐに想像されるように 3 次環以上には適用できない．3 次以上の環については，同型でなく判別式が一致するものが存在する．そこで，一般に n 次環をどのように分類し記述することができるかという問題が起きる．高次合成則の理論は $n \leq 5$ に対して，代数群の線形表現 (G, V) の整軌道 $G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ によってこの問題への一つの見事な解答[2]を与える．次節以降で，その理論を順を追って説明していきたい．

話が前後するが，節を改める前に定理 2.2 の 2 次環の分類について補足しておく．任意の 2 次環は自明でない自己同型を唯一つ持っている．実際，(1) の $S(D)$ に対しては $D \equiv 0 \mod 4$ のときは $X \mapsto -X$，$D \equiv 1 \mod 4$ のときは $X \mapsto 1 - X$ で与えられる．したがって，判別式の同じ 2 次環は互いに同型であるが，標準的に同型[3] ではない．(2 つある同型写像のいずれか一方を特別に選ぶ方法がない．) 2 次環のイデアル類を分類するとき，2 次環の同型を固定しておきたい場面が出てくる．このために分類を以下のように書き直しておく．

定義 2.3. 向き付けられた 2 次環とは，2 次環 S と同型 $\iota\colon S/(\mathbb{Z}\cdot 1) \to \mathbb{Z}$ の組 (S, ι) のことである．ι を S の向きという．

誤解がなければ (S, ι) を単に S と書く．向き付けられた 2 次環の間の準同型は，向きを保つものだけを考える．2 次環の自明でない自己同型は向きを保たない．したがって定理 2.2 は次のようにも述べられる．

定理 2.4. 向き付けられた 2 次環の同型類は

$$S \leftrightarrow D(S)$$

によって $\mathbb{D}$ と一対一に対応する．判別式の等しい向き付けられた 2 次環は *(*その間に同型写像が唯一存在するという意味で*)* 互いに標準的に同型である．

§3. 2 元 2 次形式の空間と 2 元 3 次形式の空間

本節では 2 元 2 次形式の空間と 2 元 3 次形式の空間の場合の既知の理論を再定式化する．

---

[2] $n = 1, 2$ のときは上述の通り問題は "容易" だが，$n = 1$ のときは 0 次元格子 $V_{\mathbb{Z}} = \{0\}$(この場合 $G_{\mathbb{Z}}$ はなし), $n = 2$ のときは $V_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}, G_{\mathbb{Z}} = \mathrm{SL}_1(\mathbb{Z})$ によって分類したと考えることもできる．

[3] "標準的に同型" とは，2 つの対象の間に誰が見ても特別視すると考えられる同型写像があり，その同型によって同一視しても不都合が起こらないことが事前に経験的に分かっている状況をいう．(これは主観的な用語で，一般には厳密に定式化することはできないと思われる．)

§3.1. 2元2次形式の空間と2次環のイデアル類

2元2次形式の空間

$$
(2)\qquad \begin{aligned} V_{\mathbb{Z}} &:= \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2 = \{f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \mid a,b,c \in \mathbb{Z}\}, \\ G_{\mathbb{Z}} &:= \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \end{aligned}
$$

について考えよう．$G_{\mathbb{Z}}$ の $V_{\mathbb{Z}}$ への作用は変数の線形変換で定める．$f \in V_{\mathbb{Z}}$ に対し $P(f) = b^2 - 4ac$ とおくとこれは $G_{\mathbb{Z}}$ の作用で不変である．この表現が2次環のイデアル類を記述していることは Gauss によって発見された．このことを正確に定式化しよう．

S を向き付けられた非退化な2次環とする．S の向き付けられた (分数) イデアルとは，$K = S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の S-部分加群であって $\mathbb{Z}$-加群としての階数が2であるようなもの I と，符号 $\varepsilon = \pm 1$ の組 (I, ε) のことである．このイデアルノルム $N(I,\varepsilon)$ は $\varepsilon|L/I||L/S|^{-1}$ として定める．ただし $L \subset K$ は I, S を共に含む S の (分数) イデアルである．$\kappa \in K^\times$ に対し，$\kappa \cdot (I,\varepsilon) = (\kappa I, \mathrm{sgn}(N_{K/\mathbb{Q}}(\kappa))\varepsilon)$ と定め，二つの向き付けられたイデアル $(I_1,\varepsilon_1), (I_2,\varepsilon_2)$ はある $\kappa \in K^\times$ によって $(I_2,\varepsilon_2) = \kappa \cdot (I_1,\varepsilon_1)$ となるとき，同一の "向き付けられたイデアル類" に属するという．以下，誤解がなければ (I,ε) を単に I と書く．

注 3.1. "向き付けられたイデアル類" は判別式が正の2次環に対しては狭義イデアル類の概念と一致する．後述の定理 3.2 は，"向き付けられたイデアル類" を考えることで最も明瞭に記述される．

向き付けられた2次環とその向き付けられたイデアル類の同値類のなす集合を

$$
\mathcal{B}_2' := \left\{ (S,I) \;\middle|\; \begin{array}{l} S: \text{向き付けられた非退化な 2 次環}, \\ I: S \text{ の向き付けられたイデアル類} \end{array} \right\} / \sim
$$

とおく．$V'_{\mathbb{Z}} = \{f \in V_{\mathbb{Z}} \mid P(f) \neq 0\}$ とおくと，次が成り立つ．

定理 3.2. 判別式を保つ標準全単射 $\mathcal{B}_2' \to G_{\mathbb{Z}} \backslash V'_{\mathbb{Z}}$ が存在する．すなわち可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_2' \arrow[r, "1:1"] \arrow[d, "D"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G_{\mathbb{Z}} \backslash V'_{\mathbb{Z}} \arrow[d, "P"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, equal] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．ここで左の縦の写像は2次環の判別式をとる写像で，右の縦の写像は2元2次形式の判別式をとる写像である．

写像の構成を与えよう．$(S,I) \in \mathcal{B}_2'$ に対して2元2次形式を構成する．$\tau \in S$ を $S = \mathbb{Z}\cdot 1 \oplus \mathbb{Z}\cdot\tau$ で，S の向き ι(定義 2.3 参照) による $\overline{\tau} \in S/(\mathbb{Z}\cdot 1)$ の像が1となるようなものとする．イデアル I について $I = \mathbb{Z}\cdot\alpha \oplus \mathbb{Z}\cdot\beta$ と基底をとる．ここで，(α,β) の順序はその $(1,\tau)$ との変換行列 $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ について，$\det(g)$ の符号が ε と同じになるようにとる．(もし符号が反対ならば，(β,α) と順序を変えればよい.)

このとき $\mathbb{Z}^2$ から $\mathbb{Z}$ への 2 次の写像

$$f\colon \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (x,y) \longmapsto \frac{\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha x - \beta y)}{N(I)} \tag{3}$$

は $V'_{\mathbb{Z}}$ の元となる．I の基底の取り替えは $G_{\mathbb{Z}} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の作用を考えることに相当し，またイデアル類の代表の取り方にもよらない．以上のことから，$\mathcal{B}'_2 \to G_{\mathbb{Z}}\backslash V'_{\mathbb{Z}}$ が構成された．これが判別式を保つことは簡単な計算で確かめられる．

基底に依らない記述も与えておこう．$(S,I) \in \mathcal{B}'_2$ に対し，上のように $\tau \in S$ を取る．このとき

$$f_{(S,I)}\colon I \longrightarrow \wedge^2 I, \qquad \xi \longmapsto \xi \wedge \tau\xi \tag{4}$$

とするとこれは τ の取り方によらずに定まる 2 次写像で，I は階数 2 である．$I \cong \mathbb{Z}^2$, $\wedge^2 I \cong \mathbb{Z}$ を上述のように S, I の向き付けと両立するように取れば，$[f_{(S,I)}\colon I \to \wedge^2 I] \in G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ となる．これは (3) と同等である．

この定理のポイントは，この写像 $\mathcal{B}'_2 \to G_{\mathbb{Z}}\backslash V'_{\mathbb{Z}}$ が全単射となることである．逆写像は以下のように構成される．$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \in V'_{\mathbb{Z}}$, $a \neq 0$ とする．($V'_{\mathbb{Z}}$ 内の任意の $G_{\mathbb{Z}}$-軌道はこの形の元を含む．) このとき

$$\begin{aligned} &S = \mathbb{Z}\cdot 1 \oplus \mathbb{Z}\cdot\tau, \quad \tau^2 + b\tau + ac = 0, \qquad S/(\mathbb{Z}\cdot 1) \cong \mathbb{Z}, \quad \overline{\tau} \mapsto 1, \\ &I = \mathbb{Z}\cdot a \oplus \mathbb{Z}\cdot\tau, \quad \varepsilon = \mathrm{sgn}(a) \end{aligned} \tag{5}$$

なる $(S,I) \in \mathcal{B}'_2$ を考えると，$f \mapsto (S,I)$ が逆写像である．

注 3.3. この定理を退化した環の場合を含むように拡張することは可能である．ただしそのためには，退化した環に対するイデアル類の概念を正確に定式化する必要がある．やや複雑になるので，ここでは述べない．一般に，非退化な場合に標準全単射が構成されていても，それを退化した場合に延長する問題は非自明である．(このことについては後の注 7.11 で少し論ずる．)

定理 3.2 を n 次環のイデアル類の対応に拡張することはできるだろうか．簡単のため向きは考えないことにして，非退化な 3 次環とそのイデアル類の同型類のなす集合を $\mathcal{B}'_3$ とし，対応する表現を考えてみよう．$(S,I) \in \mathcal{B}'_3$ とし，$I = \mathbb{Z}\cdot\alpha \oplus \mathbb{Z}\cdot\beta \oplus \mathbb{Z}\cdot\gamma$ と基底をとると (3) の対応物は

$$f(x,y,z) = N(I)^{-1}\mathrm{N}_{S_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}(\alpha x + \beta y + \gamma z) \in \mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^3,$$

すなわち 3 元 3 次形式となる．そこで素直な一般化として $(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}), \mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^3)$ を考えてみることは自然かもしれないが，これはうまくいかない．それは 3 変数 3 次形式は一般に 1 次式の積に分解されず，$\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^3$ の元は 3 次環のノルム形式になるとは限らないからである．例えば $x^3 + y^3 + z^3$ は $\mathbb{C}$ 上でも 1 次式の積には分解されない．定理 3.2 の場合は任意の 2 元 2 次形式が必ずある 2 次環のノルム形式になっているから全射になっているので

ある．対応 (3) は簡明だが，全単射が成り立つ理由は集合 $\mathcal{B}_2'$, $G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}'$ それぞれの具体的な性質に依存しており，安易な一般化は困難である．

2 元 2 次形式の合成則についても復習しておく．向き付けられた非退化な 2 次環 S を固定し，その向き付けられたイデアル類の間の積を，$(I_1, \varepsilon_1)(I_2, \varepsilon_2) = (I_1 I_2, \varepsilon_1\varepsilon_2)$ として定める．(I, ε) は I が S 上射影的なときに限って可逆である．可逆なイデアル類のなす集合を $\mathrm{Cl}^+(S)$ で表す．これは有限アーベル群をなし，$D(S) > 0$ なら S の狭義イデアル類群になり，$D(S) < 0$ なら S のイデアル類群と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の直積と同型になる．$D \in \mathbb{D}$, $D \neq 0$ とする．$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \in V_{\mathbb{Z}}$ は a, b, c の最大公約数が 1 のとき原始的 (primitive) とよばれる．

$$V_{\mathbb{Z}}(D)^{\mathrm{prim}} = \{ f \in V_{\mathbb{Z}} \mid P(f) = D,\ f \text{ は原始的} \}$$

とおく．定理 3.2 の全単射により $\mathrm{Cl}^+(S(D)) \subset \mathcal{B}_2'$ と対応するのは $G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}(D)^{\mathrm{prim}}$ であることが計算で確かめられる．したがって

系 3.4. $D \in \mathbb{D}, D \neq 0$ とする．定理 *3.2* は全単射 $\mathrm{Cl}^+(S(D)) \leftrightarrow G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}(D)^{\mathrm{prim}}$ を誘導する．特に $G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}(D)^{\mathrm{prim}}$ は自然な有限アーベル群の構造をもつ．

この $G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}(D)^{\mathrm{prim}}$ における積が 2 元 2 次形式の Gauss の合成則と呼ばれるものである．以下，$G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}(D)^{\mathrm{prim}} = \mathrm{Cl}(\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2; D)$ と書く．

注 3.5. ここではイデアルに向きをつけて考えてきたたが，向きを考えないイデアル類をパラメータ付けすることも可能である．それには群を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ から $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ に変えればよい．ただし，$g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ の作用は $(g \cdot f)(x, y) = \frac{1}{\det g} f((x, y)g)$ を考える ((4) を参照)．このとき同様の議論で，$S(D)$ の (通常の) イデアル類群 $\mathrm{Cl}(S(D))$ と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\backslash V_{\mathbb{Z}}(D)^{\mathrm{prim}}$ の間に標準全単射が構成される．

なお，さらに 2 次環の向きも考えない定式化も可能である．群を $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ とし，$\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z})$ はスカラー倍で $V_{\mathbb{Z}}$ に作用させれば，(向き付けられていない)2 次環と (向き付けられていない) イデアル類の組 (S, I) がパラメータ付けされる．ただしこの場合は，2 次環の同型が標準的に決まっていないことに注意しよう．$(S, I), (S', I')$ について，$D(S) = D(S')$ ならば定理 2.2 によって S と S' は同型である．しかし同型の取り方が一通りでなく，この同型の取り方によってイデアル類の積 II' は変わってしまうから，$(S, I), (S', I')$ の積を自然に定めることができない．したがって $(\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}))\backslash V_{\mathbb{Z}}(D)^{\mathrm{prim}}$ にも一般に自然な群構造が入らない．これが 2 次環に向きを指定する理由である．

注 3.6. 式 (4) の "$f_{(S,I)}$ が 2 次写像である" ということの定義を考えておこう．M, N を自由 $\mathbb{Z}$-加群とする．$f\colon M \to N$ が 2 次写像であるとは，M, N それぞれの基底を固定して $M = \mathbb{Z}^m, N = \mathbb{Z}^n$ としたとき，$f(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}^n$ の各成分が $x_1, \ldots, x_m$ の 2 次式で表されること（これは基底の取り方によらない.）と考えればだいたいよい．しかし，もう少し厳密な定式化が大切なこともあるので述べておく．

M から N への 2 次写像とは正確には，M の 2 階対称テンソルから N への $\mathbb{Z}$-線形写像のことである．ところが，M の 2 階対称テンソルは実は 2 種類ある．一つは $M \otimes M$

を $\{m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1 \mid m_1, m_2 \in M\}$ が生成する部分加群で割った商加群であり，本稿ではこれを $\mathrm{Sym}^2 M$ と書く．もう一つは $M \otimes M$ に $\mathfrak{S}_2$ が自然に作用するが，その $\mathfrak{S}_2$-不変な元のなす部分加群であり，本稿ではこれを $\mathrm{Sym}_2 M$ と書く．合成

$$\mathrm{Sym}_2 M \hookrightarrow M \otimes M \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}^2 M$$

は単射になるが，($m \neq 1$ なら) 全射でないことがポイントである．(同じことを $\mathbb{Q}$ 上など標数が 2 でない体の上で考えると全単射になる．) なお，$(\mathrm{Sym}_2 M)^* = \mathrm{Sym}^2(M^*)$ である．ここで一般に N^* で N の双対加群 $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ を表している．

2 つの 2 階対称テンソル $\mathrm{Sym}^2 M$ と $\mathrm{Sym}_2 M$ は $\mathbb{Z}$ 加群としては同型だが，$\mathrm{Aut}\,(M) = \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ の作用と共変な同型はない．つまり，互いに双対的な表現 $(\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}), \mathrm{Sym}^2 \mathbb{Z}^m)$, $(\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}), \mathrm{Sym}_2 \mathbb{Z}^m)$ は異なる．一般に n 階対称テンソルも，$M^{\otimes n}$ の商加群 $\mathrm{Sym}^n M$ と部分加群 $\mathrm{Sym}_n M$ の 2 種類がある．$\mathbb{Q}$ 上の 2 階対称テンソルの空間 $\mathrm{Sym}^2 \mathbb{Q}^n$ を n 次対称行列の空間として実現することがよく行われるが，このときその格子として，半整数係数対称行列のなす格子 L と，整数係数対称行列のなす部分格子 $M \subset L$ とが現れる．これがそれぞれ，$\mathrm{Sym}_2 \mathbb{Z}^m$ と $\mathrm{Sym}^2 \mathbb{Z}^m$ である．

これらが $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 加群として同型でないことは例えば次のように示される．一般に $\mathrm{Sym}^2 \mathbb{Q}^n$ の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 不変な格子 L, L' が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 加群として同型であったとする．このとき同型写像 $f\colon L \to L'$ に $\mathbb{Q}$ をテンソルして，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 共変な $\tilde{f}\colon \mathrm{Sym}^2 \mathbb{Q}^n \to \mathrm{Sym}^2 \mathbb{Q}^n$ が得られる．一方 $\mathrm{Sym}^2 \mathbb{Q}^n$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ の既約表現である．よって Schur の補題によって $\tilde{f}$ はスカラー倍と分かる．したがってその L への制限 f もスカラー倍である．よって同型な $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ 加群を与える格子は互いに他の $\mathbb{Q}^\times$ 倍である．

2 階対称テンソルが 2 種類あることに対応して，2 次写像の定義も二通りある．一つは $\mathbb{Z}$-線形な写像 $\tilde{f}\colon M \otimes M \to N$ を $\mathrm{Sym}_2 M$ に制限して得られる $f\colon \mathrm{Sym}_2 M \to N$ で，このとき $f \in (\mathrm{Sym}_2 M)^* \otimes N = \mathrm{Sym}^2(M^*) \otimes N$ である．もうひとつは $\mathbb{Z}$-線形な写像 $\tilde{f}\colon M \otimes M \to N$ が $\mathrm{Sym}^2 M$ を経由して $f\colon \mathrm{Sym}^2 M \to N$ を誘導するときの f で，このとき $f \in (\mathrm{Sym}^2 M)^* \otimes N = \mathrm{Sym}_2(M^*) \otimes N$ である．(同様に，n 次写像 ($n \geq 2$) も二つある．)

式 (4) の “$f_{(S,I)}$ が 2 次写像である” ことの正確な意味は，$\mathbb{Z}$-線形写像

$$\tilde{f}_{(S,I)}\colon I \otimes I \longrightarrow \wedge^2 I, \qquad \xi_1 \otimes \xi_2 \longmapsto \xi_1 \wedge \tau\xi_2$$

を $\mathrm{Sym}_2 I$ に制限して得られる $f_{(S,I)} \in (\mathrm{Sym}_2 I)^* \otimes (\wedge^2 I) = \mathrm{Sym}^2(I^*) \otimes (\wedge^2 I)$ を考えるということである．本稿ではこれ以上詳しく述べないが，詳細は例えば [17, Chapter 4] を参照いただきたい．

なお，M の 2 階交代テンソルについても同様に二通りの定義が考えられる．$M \otimes M$ を $\{x \otimes x \mid x \in M\}$ が生成する部分加群で割った商加群 $\wedge^2 M$ と，$M \otimes M$ の部分加群 $\wedge_2 M = \{X \in M \otimes M \mid \sigma(X) = \mathrm{sgn}(\sigma) X, \sigma \in \mathfrak{S}_2\}$ である．この場合も合成で得られる単射 $\wedge_2 M \to \wedge^2 M$ は同型でない．しかし，この像は $2 \wedge^2 M$ であって，$\mathrm{Aut}\,(M)$ 加群として $\wedge^2 M$ と同型である．このことから，$\wedge_2 M$, $\wedge^2 M$ は $\mathrm{Aut}\,(M)$ 加群として同型である．n 階の交代テンソルも同様である．

§3.2. 2 元 3 次形式の空間と 3 次環

次に 2 元 3 次形式の空間について考えよう．

$$V_{\mathbb{Z}} := \mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2 \otimes (\wedge^2\mathbb{Z}^2)^* = \{f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}\},$$
$$G_{\mathbb{Z}} := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \tag{6}$$

とする．作用は次で定める．

$$(g\cdot f)(x,y) = \frac{1}{\det(g)}\cdot f(px+ry, qx+sy), \qquad f \in V_{\mathbb{Z}}, \quad g = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

$f \in V_{\mathbb{Z}}$ の判別式を $P(f)$ とおく．$f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ に対して $P(f) = b^2c^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2$ である．$P(f)$ が $G_{\mathbb{Z}}$ の作用に対して不変であることはよく知られている．$G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ が 3 次環を分類していることは Delone-Faddeev により部分的に見出され，Gan-Gross-Savin により完全に示された．

定理 3.7 ([21],[23])**.** 判別式を保つ標準全単射 $\mathcal{A}_3 \to G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ が存在する．すなわち可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_3 \arrow[r, "1:1"] \arrow[d, "D"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}} \arrow[d, "P"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, equal] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

が成り立つ．ここで左の縦の写像は 3 次環の判別式をとる写像である．

(証明) まず写像の構成を与える．$R \in \mathcal{A}_3$ とする．$\tilde{f}_R \colon R \to \wedge^3 R$ を

$$\tilde{f}_R \colon R \to \wedge^3 R, \qquad \xi \mapsto 1 \wedge \xi \wedge \xi^2 \tag{7}$$

で定義すると，$\tilde{f}_R$ は階数 3 自由 $\mathbb{Z}$-加群 R から階数 1 自由 $\mathbb{Z}$-加群 $\wedge^3 R$ への 3 次写像である．また任意の $a \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} \tilde{f}_R(\xi + a) &= 1 \wedge (\xi + a) \wedge (\xi + a)^2 = 1 \wedge (\xi + a) \wedge (\xi^2 + 2a\xi + a^2) \\ &= 1 \wedge \xi \wedge \xi^2 = \tilde{f}_R(\xi) \end{aligned}$$

なので，これは射影 $R \to R/(\mathbb{Z}\cdot 1)$ を経由する．さらに，$\wedge^3 R \cong \wedge^2(R/(\mathbb{Z}\cdot 1))$ を用いてすなわち

$$f_R \colon R/(\mathbb{Z}\cdot 1) \longrightarrow \wedge^2(R/(\mathbb{Z}\cdot 1)), \quad [\xi] \longmapsto [\xi] \wedge [\xi^2] \tag{8}$$

が定まり，f_R は階数 2 自由 $\mathbb{Z}$-加群 $R/\mathbb{Z}$ から階数 1 自由 $\mathbb{Z}$-加群 $\wedge^2(R/\mathbb{Z})$ への 3 次写像である．($R/(\mathbb{Z}\cdot 1)$ を簡単に $R/\mathbb{Z}$ と書いた．) この $[f_R \colon R/\mathbb{Z} \to \wedge^2(R/\mathbb{Z})] \in G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ を R の像として写像が構成された．

この 3 次写像 f_R は R の環構造を記憶している．このことを実際に確認する．$R = \mathbb{Z}\cdot 1 \oplus \mathbb{Z}\cdot\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\cdot\omega_2$ と 1 を含む基底をとる．このとき $\omega_1\omega_2 = p + q\omega_1 + r\omega_2$ と書けるので $(\omega_1 - r)(\omega_2 - q) = p + qr$ になる．したがって ω_1, ω_2 を $\omega_1 - r, \omega_2 - q$ で置き換えることで，$\omega_1\omega_2 \in \mathbb{Z}\cdot 1$ としてよい．このとき

$$\omega_1^2 = k - b\omega_1 + a\omega_2,\quad \omega_2^2 = l - d\omega_1 + c\omega_2,\quad \omega_1\omega_2 = m \tag{9}$$

となる $a, b, c, d, k, l, m \in \mathbb{Z}$ が定まるが，結合法則 $\omega_1^2\cdot\omega_2 = \omega_1\cdot(\omega_1\omega_2), \omega_1\cdot\omega_2^2 = (\omega_1\omega_2)\cdot\omega_2$ から

$$k = -ac, \quad l = -bd, \quad m = -ad \tag{10}$$

が必要である．このもとで $\xi = x\omega_1 + y\omega_2 (x, y \in \mathbb{Z})$ に対し $\tilde{f}_R(\xi)$ を計算すると

$$\begin{aligned}\tilde{f}_R(\xi) &= 1 \wedge (x\omega_1 + y\omega_2) \wedge (x^2\omega_1^2 + 2xy\omega_1\omega_2 + y^2\omega_2^2)\\ &= \cdots = (ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3)\cdot 1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2\end{aligned}$$

が分かる．したがって R の像は $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \in V_{\mathbb{Z}}$ となり，R の乗法構造 (9), (10) を決めるために必要な定数 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ がすべて反映される．

このことにより写像 $R \mapsto f_R$ が単射であることが分かった．逆に任意の a, b, c, d に対し，加群 $\mathbb{Z}\cdot 1 \oplus \mathbb{Z}\cdot\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\cdot\omega_2$ に (9), (10) によって積の構造を入れると，結合律をみたし，$\mathbb{Z}$ 上の 3 次環になることが分かる．これにより写像は全射である．判別式を保つことは，基底 $1, \omega_1, \omega_2$ に対する判別式を計算すれば分かる． (証明終)

この対応も非常に簡明で美しい一方，一般の n 次環に拡張することは困難であることが想像されると思う．(8) に倣い，4 次環 R に対して，写像 $f_R\colon R/\mathbb{Z} \to \wedge^3(R/\mathbb{Z})$ を

$$f_R\colon R/\mathbb{Z} \longrightarrow \wedge^3(R/\mathbb{Z}), \quad [\xi] \longmapsto [\xi] \wedge [\xi^2] \wedge [\xi^3]$$

と定義することはたやすい．しかし今度はパラメータ空間は 3 元 6 次形式の空間 $\mathrm{Sym}^6\mathbb{Z}^3$ となっており，このような大きな空間に全射があるとは考えにくいであろう．

注 3.8. $a = 1$ のときの $f(x, y) = x^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \in V_{\mathbb{Z}}$ に対する自然な 3 次環の構成として $\mathbb{Z}[X]/(X^3 + bX^2 + cX + d)$ が考えられるが，これは定理 3.7 によって f に対応する 3 次環と一致する．より一般に，$a \neq 0$ なる $f \in V_{\mathbb{Z}}$ に対し，$\mathbb{Q}$ 上 3 次の代数 $\mathbb{Q}[X]/(f(X, 1))$ を考えると，この中で $1, aX, aX^2 + bX$ が生成する部分 $\mathbb{Z}$ 加群 R は部分環をなし，R は定理 3.7 によって f と対応する 3 次環に一致する．

§4. 第 III 部：4 次環のパラメータ付け

本節では，第 III 部 [5] で示された，3 元 2 次形式のペアの空間を用いた 4 次環の分類について解説する．

§4.1. 3 元 2 次形式のペアの空間

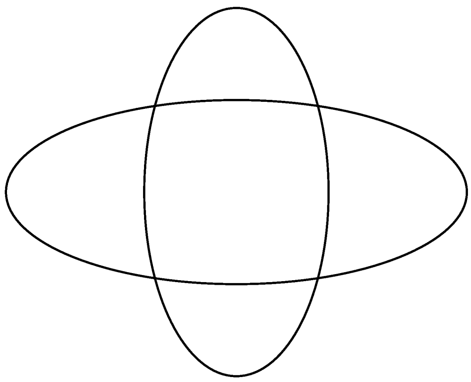
次節で詳しく述べるが，Wright-Yukie [50] は 2 元 2 次形式の空間 (2)，2 元 3 次形式の空間 (6) を含む 8 種類のベクトル空間について $\mathbb{Q}$ などの体上で考察し，その軌道が次数 $2, 3, 4, 5$ の拡大体と対応することを指摘していた．その中で扱われたものの一つが 3 元 2 次形式のペアの空間

$$V_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Sym}^2\mathbb{Q}^3 \otimes \mathbb{Q}^2, \quad G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \tag{11}$$

である．この表現の有理軌道について，次が示されていた．

定理 4.1 ([50]). $G_{\mathbb{Q}}\backslash V'_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ の 4 次分離代数[4]の同型類の集合と一対一に標準的に対応する．*(V' はこの表現の不変式 P の値が消えない Zariski 開集合を表す．P は 4.3 節で与える．)*

幾何学的には $V_{\mathbb{Q}}$ の元は 2 次曲線のペアなので，その交点は $\mathbb{P}^2$ の 4 点を決めている．このことから $\mathbb{Q}$ の 4 次分離代数との関係は想像しやすいであろう．



そこで，この対応が $\mathbb{Z}$ 上に持ち上げられないか考えることは自然である．

$$V_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^2, \quad G_{\mathbb{Z}} = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \tag{12}$$

を問題にしよう．$\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^3$ は整数係数の 3 元 2 次形式全体のなす集合である．基底に依らない言い方としては

$$G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}} = \left\{ f\colon M \to N \;\middle|\; \begin{array}{l} M : \text{階数 3 の自由 } \mathbb{Z}\text{-加群}, N : \text{階数 2 の自由 } \mathbb{Z}\text{-加群} \\ f : M \text{ から } N \text{ への 2 次写像} \end{array} \right\} / \sim$$

と考えることができる．問題は次のように述べられる．

[4] 拡大次数の合計が 4 となる $\mathbb{Q}$ の拡大体の直積のこと．または，$[F:\mathbb{Q}] = 4$ となる $\mathbb{Q}$-代数 F で，判別式が 0 でないもののことと言ってもよい．判別式は $(\mathbb{Q}^\times)^2$ 倍の不定性があるが，0 か 0 でないかはこの不定性によらない．

問題 4.2. 判別式を保つ全単射 $\mathcal{A}_4 \to G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ が存在するか?

しかし，実はこのような全単射は存在しない．実際 4 次環を一つ与えたときに，階数 3 と階数 2 の自由加群の間の 2 次写像を構成する方法と言われてもなかなか難しいであろう[5]．Bhargava [5] はこの表現には 3 次レゾルベント環と付随するレゾルベント写像が隠れていることを見抜き，上の対応に代わる正確な一対一対応を構成した．

§ 4.2. 4 次方程式の解法とレゾルベント写像

$\mathbb{Q}$ 係数の 4 次方程式 $f(t) = t^4 + pt^3 + qt^2 + rt + s = 0$ を解く方法を思い出してみよう．解を $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ とする．$\beta = \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha'''$, $\beta' = \alpha\alpha' + \alpha''\alpha'''$, $\beta'' = \alpha\alpha''' + \alpha'\alpha''$ とおくと β, β', β'' は $t^3 - qt^2 + (pr - 4s)t - (p^2 s - 4qs + r^2) = 0$ の解となる．この 3 次方程式を解いてまず β, β', β'' を求め，それを用いて $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ を求めたのであった．なお，これは群論の言葉でいえば $\mathfrak{S}_4$ の 3 点集合 $\{(13|24), (12|34), (14|23)\}$ への作用，またはそれが定める準同型 $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ を考えていることになる．

この α と β の関係を考える．$f(t)$ の Galois 群が $\mathfrak{S}_4$, すなわち $\mathbb{Q}(\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''')$ が $\mathbb{Q}$ の $\mathfrak{S}_4$ 拡大であるとする．$F = \mathbb{Q}(\alpha)$, $L = \mathbb{Q}(\beta)$ とおくとそれぞれ $\mathbb{Q}$ の 4 次，3 次拡大である．このときの L は F のレゾルベント体と呼ばれる．$x \in F = \mathbb{Q}(\alpha)$ の $\mathbb{Q}(\alpha'), \mathbb{Q}(\alpha''), \mathbb{Q}(\alpha''')$ における共役をそれぞれ x', x'', x''' で表す[6]．そして

$$\tilde{\phi}\colon F \longrightarrow L, \quad x \longmapsto xx'' + x'x'''$$

と定義する．これは $\mathbb{Q}$-加群の間の写像として 2 次である．さらに $c \in \mathbb{Q}$ に対し

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x+c) &= (x+c)(x''+c) + (x'+c)(x'''+c) \\ &= xx'' + x'x''' + c(x + x' + x'' + x''') + 2c^2 \\ &= \phi(x) + c\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(x) + 2c^2\end{aligned}$$

なので $\tilde{\phi}$ は剰余加群の間の 2 次写像

$$\phi\colon F/(\mathbb{Q}\cdot 1) \longrightarrow L/(\mathbb{Q}\cdot 1), \quad [x] \longmapsto [xx'' + x'x'''] \tag{13}$$

を誘導する．このレゾルベント写像が階数 3 の自由加群から階数 2 への自由加群への 2 次写像となっていて，$G_{\mathbb{Q}}\backslash V_{\mathbb{Q}}$ の元と対応するのである．

§ 4.3. 不変式

不変式 P を構成しておく．$V_{\mathbb{Z}}$ は整係数 3 元 2 次形式のペア (A, B) からなる集合である．$z = (z_1, z_2, z_3)$ を不定元とし，$A(z_1, z_2, z_3) = \sum_{1 \le i \le j \le 3} a_{ij} z_i z_j$, $B(z_1, z_2, z_3) =$

[5](部分的に) 写像を構成することができる．ただし，後の 4.5 節で明らかになるようにこの対応は一般に多対一になる．

[6]次のように考えてもよい．$\mathfrak{S}_4$ の元 $\sigma_0, \ldots, \sigma_3$ を $\sigma_0(\alpha) = \alpha, \sigma_1(\alpha) = \alpha', \sigma_2(\alpha) = \alpha'', \sigma_3(\alpha) = \alpha'''$ となるように取ろう．F を固定する部分群を Γ_F とすると，$\{\sigma_0, \ldots, \sigma_3\}$ は $\mathfrak{S}_4/\Gamma_F$ の完全代表系である．また，$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を $\mathbb{Q}(\alpha)$ に制限すると，それらはそれぞれ $\mathbb{Q}(\alpha)$ から $\mathbb{Q}(\alpha), \mathbb{Q}(\alpha'), \mathbb{Q}(\alpha''), \mathbb{Q}(\alpha''')$ への同型を与える．このとき $x \in F$ に対して $x = \sigma_0(x), x' = \sigma_1(x), x'' = \sigma_2(x), x''' = \sigma_3(x)$ である．

$\sum_{1\le i\le j\le 3} b_{ij}z_iz_j$, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{Z}$ と表す．このとき $(\gamma_3,\gamma_2) \in G_{\mathbb{Z}}$ は $\gamma_2 = \left(\begin{smallmatrix} p & q \\ r & s \end{smallmatrix}\right)$ として，$(A(z), B(z)) \mapsto (pA(z\gamma_3) + qB(z\gamma_3), rA(z\gamma_3) + sB(z\gamma_3))$ で作用している．

$a_{ji} = a_{ij}, b_{ij} = b_{ji}$ とする．A, B は 3×3 の半整数対称行列とみなせる．例えば A は (i,i)-成分は a_{ii}, (i,j)-成分は $a_{ij}/2$ $(i \neq j)$ なる行列である．このとき

$$f(x,y) = f_{(A,B)}(x,y) = 4\det(Ax + By)$$

と定めると，これは (x,y) の整係数 3 次形式になり，$f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ と書くと a,b,c,d は a_{ij}, b_{ij} の 4 次同次式になる．この $f_{(A,B)} \in \mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2$ の判別式を $P(A,B)$ とする．この $V_{\mathbb{Z}}$ の 12 次同次式 P を $V_{\mathbb{Z}}$ の判別式とよぶ．P が不変式になっていることは簡単に確かめられる．

§4.4. 3 次レゾルベント環と基本対応

[5] の基本対応を簡単にまとめておく．全てを正確に定義すると長くなるので，詳細に興味のある方は原論文 [5] を参照されたい．以下 Q で $D(Q) \neq 0$ なる 4 次環を表す．このとき Q の形式的 $\mathfrak{S}_4$-閉包 $\overline{Q}$ が定義される[7]．$\overline{Q}$ は $\mathfrak{S}_4$ が左から作用する 24 次環であり，Galois 対応が存在する．特に $\mathfrak{S}_4$ で固定される部分環は $\mathbb{Z}$ であり，Q の元すべてを固定する部分群 Γ_Q は $\mathfrak{S}_3$ に同型である．$\sigma_0, \dots, \sigma_3 \in \mathfrak{S}_4$ を $\mathfrak{S}_4/\Gamma_Q$ の代表系とする．ただし $\sigma_0 \in \Gamma_Q$ とする．$x \in Q$ に対し $x' = \sigma_1(x), x'' = \sigma_2(x), x''' = \sigma_3(x)$ とし，$\tilde{\phi}(x) = xx'' + x'x'''$ とおく．$R^{\mathrm{inv}}(Q)$ で，$\mathbb{Z}$ 上 $\tilde{\phi}(x)$ $(x \in Q)$ たちが生成する $\overline{Q}$ の部分代数とする．これは 3 次環になる．

定義 4.3 ([5])**.** Q を 4 次環とする．$D(Q) \neq 0$ のとき，3 次環 R が Q のレゾルベント環であるとは，R が $R^{\mathrm{inv}}(Q)$ を部分環として含み，かつ $D(Q) = D(R)$ であることである．$D(Q) = 0$ のときも形式的に定義される ([5, Definition 20])．

この定義は抽象的なものだが，4.2 節のレゾルベント体の整モデルとなっている．例えば Q が 4.2 節で扱った $\mathfrak{S}_4$-4 次拡大 F の整数環 $\mathcal{O}_F$ の場合，3 次レゾルベント体 L の整数環 $\mathcal{O}_L$ は $\mathcal{O}_F$ のレゾルベント環になる．

$$\mathcal{A}_{4,3} = \{(Q,R) \mid Q: 4 \text{ 次環},\ R: Q \text{ の } 3 \text{ 次レゾルベント環}\}/\sim$$

とおく．次が [5] の主定理である．

定理 4.4 ([5])**.** 判別式を保つ標準全単射 $\mathcal{A}_{4,3} \to G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_{4,3} \arrow[r, "1:1"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}} \arrow[d, "P"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, equal] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

[7] [5] に定義がある．また最近，系統的な定義が Bhargava-Satriano [13] により与えられた．

写像の構成は 4.2 節の (13) と全く同様である．$(Q,R)\in\mathcal{A}_{4,3}$ に対してレゾルベント写像 $\tilde{\phi}\colon Q\to R^{\mathrm{inv}}(Q)\subset R$ が誘導する写像

$$\phi\colon Q/(\mathbb{Z}\cdot 1)\longrightarrow R/(\mathbb{Z}\cdot 1),\quad [x]\longmapsto [xx''+x'x'''] \tag{14}$$

を対応させればよい．

この場合も著しいのは，この写像 $\mathcal{A}_{4,3}\to G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ が全単射となることである．すなわち，ϕ から Q,R の環構造が一意に復元でき (単射性)，またどのような $(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}$ も，ある $(Q,R)\in\mathcal{A}_{4,3}$ から得られる（全射性）．実際，[5] では，$(A,B)\in V_{\mathbb{Z}}$ に対応する $\mathcal{A}_{4,3}$ の元 $(Q,R)=(Q(A,B),R(A,B))$ が明示的に構成されている．少し長くなるが書き下しておこう．

各 $1\le i,j,k,l\le 3$, $(i,j)\ne(k,l)$ に対し，

$$\lambda^{ij}_{kl}=\lambda^{ij}_{kl}(A,B)=\det\begin{pmatrix}a_{ij} & b_{ij}\\ a_{kl} & b_{kl}\end{pmatrix}$$

と定める．このとき $Q=\mathbb{Z}\cdot 1\oplus\mathbb{Z}\cdot\alpha_1\oplus\mathbb{Z}\cdot\alpha_2\oplus\mathbb{Z}\cdot\alpha_3$ の積構造

$$\alpha_i\alpha_j=c^0_{ij}+c^1_{ij}\alpha_1+c^2_{ij}\alpha_2+c^3_{ij}\alpha_3,$$

を

$$c^k_{ij}=c^k_{ji}\quad(1\le i,j\le 3,0\le k\le 3), \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
&c^1_{23}=\lambda^{22}_{33},\ c^2_{31}=\lambda^{33}_{11},\ c^3_{12}=\lambda^{11}_{22},\\
&c^1_{22}=\lambda^{22}_{23},\ c^2_{33}=\lambda^{33}_{31},\ c^3_{11}=\lambda^{11}_{12},\ c^1_{33}=\lambda^{32}_{33},\ c^2_{11}=\lambda^{13}_{11},\ c^3_{22}=\lambda^{21}_{22},\\
&c^1_{12}=\lambda^{22}_{31},\ c^2_{23}=\lambda^{33}_{12},\ c^3_{31}=\lambda^{11}_{23},\ c^1_{13}=0,\ c^2_{21}=0,\ c^3_{32}=0,\\
&c^1_{11}=\lambda^{12}_{13}+\lambda^{11}_{23},\ c^2_{22}=\lambda^{23}_{21}+\lambda^{22}_{31},\ c^3_{33}=\lambda^{31}_{32}+\lambda^{33}_{12},
\end{aligned} \tag{16}$$

$$c^0_{ij}=\textstyle\sum_{1\le r\le 3}(c^r_{ik}c^k_{rj}-c^r_{ij}c^k_{rk})\quad(k\ne j) \tag{17}$$

で定義すると，異なる $(g,h),(i,j),(k,l),(m,n)$ に対する λ^{ij}_{kl} の関係式

$$\lambda^{gh}_{ij}(A,B)\lambda^{kl}_{mn}(A,B)-\lambda^{gh}_{kl}(A,B)\lambda^{ij}_{mn}(A,B)+\lambda^{gh}_{mn}(A,B)\lambda^{ij}_{kl}(A,B)=0$$

により Q の基底は結合律 $(\alpha_j\alpha_i)\alpha_k=\alpha_j(\alpha_i\alpha_k)$ をみたし，Q は 4 次環になる．また $a=a(A,B),\dots,d=d(A,B)$ を

$$4\det(Ax+By)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$$

によって定めると，$R=\mathbb{Z}\cdot 1\oplus\mathbb{Z}\cdot\omega_1\oplus\mathbb{Z}\cdot\omega_2$ は (9), (10) によって 3 次環になり，

$$\phi\colon Q/\mathbb{Z}\longrightarrow R/\mathbb{Z},\qquad z_1\overline{\alpha}_1+z_2\overline{\alpha}_2+z_3\overline{\alpha}_3\longmapsto A(z_1,z_2,z_3)\overline{\omega}_1+B(z_1,z_2,z_3)\overline{\omega}_2$$

のある持ち上げをレゾルベント写像として，$(Q,R)=(Q(A,B),R(A,B))\in\mathcal{A}_{4,3}$ となる．これが逆対応を与えることになる．

証明について，ここでは ϕ から Q の環構造 (15), (16), (17) を復元する方法について簡単に要点を述べておく．(15) は $\alpha_i\alpha_j=\alpha_j\alpha_i$ から，また (17) は $(\alpha_i\alpha_j)\alpha_k=\alpha_i(\alpha_j\alpha_k)$ の α_k の係数を比べて得られる．(16) を得るには次のようにする．まず，適当に $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ を $\mathbb{Z}\cdot 1$ の元でずらすことで，$c_{13}^1=c_{21}^2=c_{32}^3=0$ とできる．恒等式

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & xy \\ 1 & x' & y' & x'y' \\ 1 & x'' & y'' & x''y'' \\ 1 & x''' & y''' & x'''y''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & xx''+x'x''' & yy''+y'y''' \\ 1 & xx'+x''x''' & yy'+y''y''' \\ 1 & xx'''+x'x'' & yy'''+y'y'' \end{vmatrix}$$

と $D(Q)=D(R)$ から，

$$\mathrm{Ind}_Q(1,x,y,xy)=\pm\mathrm{Ind}_R(1,\phi(x),\phi(y)) \tag{18}$$

が分かる．ただしここで例えば，$\mathrm{Ind}_Q(1,x,y,xy)$ は，$\langle 1,x,y,xy\rangle_{\mathbb{Z}}$ の $Q=\langle 1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle_{\mathbb{Z}}$ に対する符号つき指数を表す.

ここで，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ と ω_1,ω_2 は (18) における符号が $+$ になるように選ばれているとする．$x=r_1\alpha_1+r_2\alpha_2+r_3\alpha_3$, $y=s_1\alpha_1+s_2\alpha_2+s_3\alpha_3$, $xy=t_0+t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+t_3\alpha_3$ とすれば，$t_k=\sum_{1\le i,j\le 3}c_{ij}^k r_i s_j$ $(1\le k\le 3)$ であって，(18) は

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ 0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ * & t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & A(r_1,r_2,r_3) & B(r_1,r_2,r_3) \\ * & A(s_1,s_2,s_3) & B(s_1,s_2,s_3) \end{vmatrix}$$

となる．これが r_1,r_2,r_3,s_1,s_2,s_3 の恒等式となることから，係数を比較することができる．例えば，$r_1^2s_2^2$ の係数を比較して $c_{12}^3=\lambda_{22}^{11}$ が，また $r_1^2s_1s_2$ の係数を比較して $c_{11}^3=\lambda_{12}^{11}$ が分かる.

§4.5. 3 次レゾルベント環の個数

各 4 次環 Q に対してその 3 次レゾルベント環はどのぐらい存在するか，このことが分かって，4 次環を $G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ によって理解したと言えることとなる．アプリオリには少なくとも一つ存在するかどうかも分からないことに注意しておこう．4 次環 Q に対してその内容 (content)$\mathrm{ct}(Q)$ を

$$\mathrm{ct}(Q)=\max\{n\in\mathbb{Z}_{\ge 1}\mid \text{ある 4 次環 } Q' \text{ が存在して } Q\cong\mathbb{Z}+n\cdot Q'\}.$$

で定義すると，次がこの問いの解答となる.

定理 4.5. 4 次環 Q に対して，3 次レゾルベント環の個数は $\mathrm{ct}(Q)$ の約数和だけ存在する.

特に全ての 4 次環に対して少なくとも一つの 3 次レゾルベント環が存在する．また，$\mathrm{ct}(Q)=1$ のときは Q の唯一のレゾルベント環は $R^{\mathrm{inv}}(Q)$ である．例えば Q が $\mathfrak{S}_4$-4 次拡大体 F の整数環 $\mathcal{O}_F$ のときは，$\mathrm{ct}(Q)=1$ であり，そのレゾルベント環は F のレゾルベント体の整数環になる．

以上が [5] の大まかな全体像である．

注 4.6. なお，古典的に，4 次方程式の解法と 3 元 2 次方程式の組の解法には著しい類似があることが知られていた．高木貞治『代数学講義』[40] の §38 にその優れた解説があるので，興味のある方は是非参照していただきたい．表現 (11) は時代を超えた古典的な研究対象で，その歴史は，3 次方程式を 2 次曲線の組の交点を求める問題として考察した 11 世紀の数学者 Omar Khayyam の研究にまでさかのぼれるようである ([43] 参照)．

注 4.7. 本節の理論は，3 元 2 次形式の対と 4 次環を Galois 理論 (の整モデル) を使って結びつけたことがポイントだったが，3.2 節の 2 元 3 次形式と 3 次環の対応も Galois 理論によって解釈することができる．$F=\mathbb{Q}(\alpha)$ を $\mathfrak{S}_3$-3 次拡大とし，α',α'' を α の共役とする．このとき $\beta=(\alpha-\alpha')(\alpha'-\alpha'')(\alpha''-\alpha)$ とおくと $L=\mathbb{Q}(\beta)$ は 2 次体である．このとき

$$\tilde{\phi}\colon F\to L,\qquad \xi\mapsto(\xi-\xi')(\xi'-\xi'')(\xi''-\xi)$$

は $F/(\mathbb{Q}\cdot 1)$ を経由して 3 次写像 $\phi\colon F/(\mathbb{Q}\cdot 1)\to L/(\mathbb{Q}\cdot 1)$ を定める．一方で ϕ は

$$(\xi-\xi')(\xi'-\xi'')(\xi''-\xi)=\begin{vmatrix}1 & \xi & \xi^2\\ 1 & \xi' & (\xi')^2\\ 1 & \xi'' & (\xi'')^2\end{vmatrix}$$

によって (7) と結びついている．このように捉えれば，本節の 4 次環の理論と後述 6 節の 5 次環の理論は 3.2 節の 3 次環の理論の延長線上にあると見ることができる．

§ 5. 概均質ベクトル空間と Wright-Yukie 理論

この節では，概均質ベクトル空間と，高次合成則の理論の先駆的研究となった Wright-Yukie 理論 [50] を簡単に紹介する．一般に，体 k 上定義された代数多様体 X の k-有理点の集合を X_k で表す．

まず，概均質ベクトル空間の定義から始める．

定義 5.1. 体 k 上定義された簡約代数群 G の有限次元線形表現 (G,V) は，k の代数閉包 $\overline{k}$ 上で Zariski 開軌道が存在するとき概均質ベクトル空間であるという．

定義 5.2. 体 k 上定義された簡約代数群 G の有限次元既約線形表現 (G,V) は，以下の条件が成り立つとき，正則な概均質ベクトル空間であるという．(1) ある定数でない多項式 $P\in k[V]$ と G の有理指標 χ が存在して $P(gx)=\chi(g)P(x)$ がすべての $g\in G, x\in V$ に対して成り立ち，(2) $V':=\{x\in V\mid P(x)\neq 0\}$ とするとき，$V'_{\overline{k}}$ は単一 $G_{\overline{k}}$ 軌道になる．

(1) の多項式 P を相対不変式という．標数 0 の代数閉体上で，既約正則な概均質ベクトル空間は，M. Sato-Kimura [34] により分類された．それらは全部で 29 種類あり (!)，そのうちの 5 個は無限系列である．これまでに扱った $(\mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2 k^2)$，$(\mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^3 k^2)$，$(\mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_2, \mathrm{Sym}^2 k^3 \otimes k^2)$ はいずれもこの例で，また一般に $(\mathrm{GL}_n, \mathrm{Sym}^2 k^n)$ もこの例となる．この場合 P は $\mathrm{Sym}^2 k^n$ を対称行列のなす空間とみたときの行列式である．

次に，概均質ベクトル空間の典型的で重要な構成法について説明しよう．以下 k を体とする．E を k 上の単純代数群とし，その k 上定義された極大放物型部分群 P を一つ選ぶ．(極大放物型部分群を表すのに相対不変式と同じ記号 P を用いるが，文脈からどちらであるか判断できると思われるのでご容赦いただきたい．) P の Levi 分解を $P = GU$ とすると，G は U に共役で作用し，したがって U のアーベル化 $U^{\mathrm{ab}} = U/[U, U]$ にも作用するが，これは k 上定義された線形表現になる．この (G, U^{ab}) には Zariski 開軌道が存在することが Vinberg [44] によって示されている．したがって (G, U^{ab}) は概均質ベクトル空間である．このようにして得られるものを放物型の概均質ベクトル空間と呼ぶ．典型的な例として，$E = \mathrm{Sp}_n$ を行列サイズ $2n$ のシンプレクティック群とし，P を Siegel 放物型部分群とすると，上の構成によって得られる (G, U^{ab}) は 2 次形式の空間 $(\mathrm{GL}_n, \mathrm{Sym}^2 k^n)$ になる．M. Sato-Kimura [34] により分類された 29 種類の概均質ベクトル空間はその多くが放物型になるが，すべてではない．放物型概均質ベクトル空間の分類については Rubenthaler [32] を参照されたい．

以上を踏まえて，Wright-Yukie [50] について解説しよう．表 1 に，[50] で調べられた 8 種類の既約正則な放物型概均質ベクトル空間 (G, V) を，(E, P) からの構成としてまとめた．極大放物型部分群 P を得るには E の Dynkin 図形から頂点を一つ抜けばよく，表ではその頂点を $\times$ で表している．

k 上の代数であって，k 上のベクトル空間としての次元が n であるものを k の n 次代数と呼ぶ．そのうち分離的なものを n 次分離代数という．n 次代数，n 次分離代数の同型類の集合をそれぞれ $\mathcal{A}_n(k), \mathcal{A}_n(k)^{\mathrm{sep}}$ で表す．以下が [50] の主定理である．

定理 5.3 (Wright-Yukie [50])**.** 表 *1* にある概均質ベクトル空間 (G, V) それぞれについて，$G_x/G_x^\circ \cong \mathfrak{S}_n$ となる $2 \le n \le 5$ が定まり，この n について，幾何学的な解釈をもつ自然な全単射 $G_k \backslash V'_k \to \mathcal{A}_n(k)^{\mathrm{sep}}$ が存在する．

整数論的な考察の便のため，C_2, G_2 型では可換なトーラスを増やした G についての V への線形表現が扱われている．具体的な対応を表 2 にまとめた．$x \in G_k \backslash V'_k$ に対する $\mathcal{A}_n(k)^{\mathrm{sep}}$ の元を $k(x)$ と書いている．[50] では，定理 5.3 の他，各 $x \in V'_k$ について G_x° の k 上の代数群としての構造も決定されていて，これは整数論的に重要な情報を与える．特に $(\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3^2, k^2 \otimes k^3 \otimes k^3)$ は $(\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2, k \otimes \mathrm{Sym}^2 k^2)$ の 3 次の類似と考えられることが分かる．表 2 では G_x° の構造も記した．($k^2 \otimes \wedge^2 k^6$ の場合のみ少し記号が必要になるので省略した．) ただし，$k(x)^\times$ は k 上の代数群と見ており，正確には Weil restriction をもちいて $R_{k(x)/k}(\mathrm{GL}_1)$ と書かれるものである．

この定理の $\mathfrak{S}_n$ と $\mathcal{A}_n(k)^{\mathrm{sep}}$ の結びつきを説明すると次のようになる．まず，$x \in V'_k$ に対し，k 上の多様体として，$V' \cong G/G_x$ である．よって非可換 Galois コホモロジーの

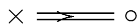
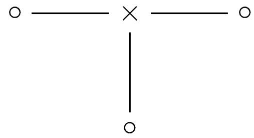
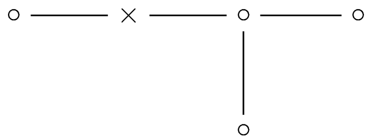
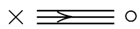
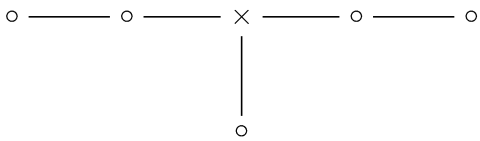
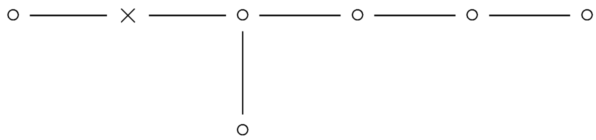
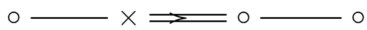
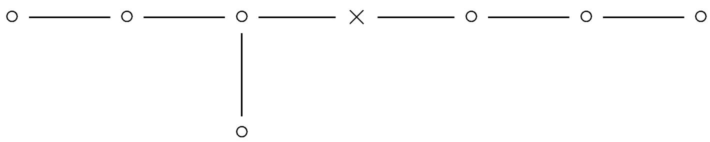
type of E	$P = GU$	G	$V = U^{\mathrm{ab}}$
C_2		GL_2	$\mathrm{Sym}^2 k^2$
D_4		$(\mathrm{GL}_2)^3$	$k^2 \otimes k^2 \otimes k^2$
D_5		$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_4$	$k^2 \otimes \wedge^2 k^4$
G_2		GL_2	$\mathrm{Sym}^3 k^2$
E_6		$\mathrm{GL}_2 \times (\mathrm{GL}_3)^2$	$k^2 \otimes k^3 \otimes k^3$
E_7		$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_6$	$k^2 \otimes \wedge^2 k^6$
F_4		$\mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_2$	$\mathrm{Sym}^2 k^3 \otimes k^2$
E_8		$\mathrm{GL}_5 \times \mathrm{GL}_4$	$\wedge^2 k^5 \otimes k^4$

Table 1. Wright-Yukie [50] で扱われた放物型概均質ベクトル空間：(E, P) からの構成

type of E	G	V	G_x/G_x°	G_x°	$G_k \backslash V_k'$
C_2	$\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_2$	$k \otimes \mathrm{Sym}^2 k^2$	$\mathfrak{S}_2$	$k(x)^\times$	$\mathcal{A}_2(k)^{\mathrm{sep}}$
D_4	$(\mathrm{GL}_2)^3$	$k^2 \otimes k^2 \otimes k^2$	$\mathfrak{S}_2$	$k(x)^\times \times k(x)^\times$	$\mathcal{A}_2(k)^{\mathrm{sep}}$
D_5	$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_4$	$k^2 \otimes \wedge^2 k^4$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathrm{GL}_2(k(x))$	$\mathcal{A}_2(k)^{\mathrm{sep}}$
G_2	GL_2	$(\wedge^2 k^2)^* \otimes \mathrm{Sym}^3 k^2$	$\mathfrak{S}_3$	$\{1\}$	$\mathcal{A}_3(k)^{\mathrm{sep}}$
E_6	$\mathrm{GL}_2 \times (\mathrm{GL}_3)^2$	$k^2 \otimes k^3 \otimes k^3$	$\mathfrak{S}_3$	$k^\times \times k(x)^\times$	$\mathcal{A}_3(k)^{\mathrm{sep}}$
E_7	$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_6$	$k^2 \otimes \wedge^2 k^6$	$\mathfrak{S}_3$	$*$	$\mathcal{A}_3(k)^{\mathrm{sep}}$
F_4	$\mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_2$	$\mathrm{Sym}^2 k^3 \otimes k^2$	$\mathfrak{S}_4$	$\{1\}$	$\mathcal{A}_4(k)^{\mathrm{sep}}$
E_8	$\mathrm{GL}_5 \times \mathrm{GL}_4$	$\wedge^2 k^5 \otimes k^4$	$\mathfrak{S}_5$	$\{1\}$	$\mathcal{A}_5(k)^{\mathrm{sep}}$

Table 2. Wright-Yukie [50] で扱われた放物型概均質ベクトル空間：有理軌道の解釈

一般論 [37] から，

$$G_k\backslash V'_k \cong \ker(H^1(k,G_x)\to H^1(k,G))$$

となる．GL_m およびその直積に対して Galois コホモロジーが消えることから，表 2 の G に対してはいずれも $H^1(k,G)=\{1\}$ となり，$G_k\backslash V'_k \cong H^1(k,G_x)$ が分かる．準同型 $G_x\to\mathfrak{S}_n$ から $H^1(k,G_x)\to H^1(k,\mathfrak{S}_n)$ が定まり，さらに $\mathfrak{S}_n=\mathrm{Aut}_{k\text{-alg}}(k^n)$ であることから $H^1(k,\mathfrak{S}_n)\cong\{k\text{-forms of }k^n\}=\mathcal{A}_n(k)^{\mathrm{sep}}$ となるので[8]，合成して

$$G_k\backslash V'_k \cong H^1(k,G_x)\to H^1(k,\mathfrak{S}_n)\cong\mathcal{A}_n(k)^{\mathrm{sep}} \tag{19}$$

が定まる．各 $x\in V'_k$ に対して $H^1(k,G_x^\circ)$ が消えることが上述 G_x° の構造の決定からしたがうので，これが全単射であることが示される．

また，[50] では，各 $x\in V'_k$ に対し，$n=2$ なら $\mathbb{P}^1$ の 2 点，$n=3$ なら $\mathbb{P}^1$ の 3 点，$n=4$ なら $\mathbb{P}^2$ の 4 点，$n=5$ なら $\mathbb{P}^3$ の 5 点からなる Z_x が構成され，$G_x/G_x^\circ\cong\mathrm{Aut}\,(Z_x)$ であることが示されている．このことからコホモロジー論的に構成された写像 (19) に自然な幾何学的解釈がつく．特に $x\in V'_k$ に対する $k(x)\in\mathcal{A}_n(k)^{\mathrm{sep}}$ は Z_x の大域切断のなす環 $\Gamma(Z_x,\mathcal{O}_{Z_x})$ である．(これについては興味のある方は [41] も参照されたい．) この Z_x は $V=\mathrm{Sym}^2k^2,\mathrm{Sym}^3k^2$ の場合は，$x\in V'_k$ の根が定める $\mathbb{P}^1$ 内の 2 点および 3 点である．また $V=\mathrm{Sym}^2k^3\otimes k^2$ の場合は 4.1 節で触れた，2 次曲線の対の交点となる $\mathbb{P}^2$ 内の 4 点である．他の場合など詳細は [50] を参照されたい．

定理 5.3 と，定理 3.2，定理 3.7，定理 4.4 との関係は容易に想像されるであろう．$V'_{\mathbb{Z}}=V_{\mathbb{Z}}\cap V'_{\mathbb{Q}}=\{x\in V_{\mathbb{Z}}\mid P(x)\neq 0\}$ とおく[9]と，自然な全射 $G_{\mathbb{Z}}\backslash V'_{\mathbb{Z}}\twoheadrightarrow G_{\mathbb{Q}}\backslash V'_{\mathbb{Q}}$ が定まる．これと対応する環の側の写像は，例えば 2 元 2 次形式の空間の場合なら $\mathcal{B}'_2\ni(S,I)\mapsto S\otimes\mathbb{Q}\in A_2(\mathbb{Q})^{\mathrm{sep}}$ である．残り二つも，3 次環，4 次環をそれぞれ $\otimes\mathbb{Q}$ すればよい．

注 5.4. 注 3.3 でも触れたが，体 k の場合も，定理 5.3 の全単射 $G_k\backslash V'_k\to\mathcal{A}_n(k)^{\mathrm{sep}}$ は $G_k\backslash V_k\to\mathcal{A}_n(k)$ に自明には延長されない．また延長されたとしても，一般に全単射にはならない．

注 5.5. $G=\mathrm{GL}_n$ は部分群に $\mathfrak{S}_n$ を含む．このことから，$X=\mathrm{GL}_n/\mathfrak{S}_n$ とおくと，(19) と同様にして，標準全単射 $G_k\backslash X_k\to\mathcal{A}_n(k)^{\mathrm{sep}}$ が構成される．ただし X は一般の多様体なので，その有理点の集合 X_k を調べることは一般に容易ではない．概均質ベクトル空間の場合は G/G_x がベクトル空間の Zariski 開集合に実現されることが非常に特別な状況である．

Yukie(と共同研究者) は [50] の後も，他のいろいろな概均質ベクトル空間について同様の問題を考えている．([27], [54], [53], [49], [56] など．講義録 [51] もある．) 例えば $\mathrm{ch}\,(k)\neq 2$ とし，$(G,V)=(\mathrm{GL}_1\times\mathrm{GL}_3,k\otimes\mathrm{Sym}^2k^3)$ を考えると，$x\in V'_k$ に対して

[8] $H^1(k,\mathrm{Aut}\,(X))$ は X の k-form の同型類と一対一に対応する．

[9] 多様体 V' の $\mathbb{Z}$ 有理点としては $V'_{\mathbb{Z}}=\{x\in V_{\mathbb{Z}}\mid P(x)=\pm 1\}$ であり，この記法はあまりよくないかもしれないが，別の記号を導入するのも繁雑なのでこのように表した．ご容赦いただきたい．

$G_x \cong \mathrm{GL}_1 \times \mathrm{PGL}_2$ となる．よって $G_k\backslash V_k' \cong \mathrm{H}^1(k, \mathrm{PGL}_2)$ であり，$\mathrm{PGL}_2 = \mathrm{Aut}\,(\mathrm{M}(2,2))$ だから，$G_k\backslash V_k'$ は $\mathrm{M}(2,2)$ の k-form，つまり k 上の 4 元数環の同型類の全体と一対一に対応する．さらにこのとき，3 元 2 次形式 $x \in V_k'$ に対応する 4 元数環は x の Clifford 環になることが分かる ([51, pp.57–61])．また $\mathrm{ch}\,(k) \neq 2, 3$ とし，$(G, V) = (\mathrm{GL}_1 \times \mathrm{GL}_7, k \otimes \wedge^3 k^7)$ を考えると，$x \in V_k'$ に対して $G_x \cong \mathrm{GL}_1 \times G_2$ となる．ここに G_2 とは G_2 型の単純群である．G_2 は 8 元数環 (Cayley 代数) の自己同型群なので，同じ理由により，$G_k\backslash V_k'$ は 8 元数環の同型類の集合と一対一に対応する．[49] では，$x \in V_k'$ に対応する 8 元数環の具体的な構成も与えられている．このように有理軌道が 4 元数環，8 元数環と対応するようなものについて，整軌道の研究が第 V 部 [7] でなされるようである．これについては，9 節でも簡単に触れる．

§6.　第 IV 部：5 次環のパラメータ付け

第 IV 部 [6] では，表現

$$V_{\mathbb{Z}} = \wedge^2 \mathbb{Z}^5 \otimes \mathbb{Z}^4, \qquad G_{\mathbb{Z}} = \mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}) \tag{20}$$

が調べられ，この整軌道 $G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ が 5 次環を分類することが示されている．これは体上で非退化な有理軌道が 5 次分離代数を分類した結果 (定理 5.3) と整合する．しかしこの場合も 4 節の場合と同様，$G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ と $\mathcal{A}_5$ が一対一対応するのではなく，5 次環に付加構造を考える必要がある．それが 6 次レゾルベント環である．

5 次方程式の Galois 理論を振り返ってみよう．$\mathfrak{S}_5$ の 5-Sylow 部分群は位数 5 の巡回群であり，それらは 6 個ある．$\mathfrak{S}_5$ はその集合に共役で作用し，これが準同型 $\mathfrak{S}_5 \to \mathfrak{S}_6$ を定める．これを Galois 理論によって翻訳する．$F = \mathbb{Q}(\alpha)$ を 5 次拡大とし，$\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ を α の共役とする．

$$\beta = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_5 + \alpha_5\alpha_1 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_3\alpha_5 - \alpha_5\alpha_2 - \alpha_2\alpha_4 - \alpha_4\alpha_1}{\sqrt{D(F)}} \tag{21}$$

とおく．このとき β は $\mathbb{Q}$ 係数の 6 次方程式の根になる．特に $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ が $\mathfrak{S}_5$-5 次拡大ならば $L = \mathbb{Q}(\beta)$ は $\mathbb{Q}$ の 6 次拡大であり，L は F の 6 次レゾルベント体とよばれる．

この 6 次レゾルベント体の整モデルとして，任意の 5 次環に対して，その 6 次レゾルベント環の概念を定義することができる ([6])．

$$\mathcal{A}_{5,6} = \{(R, S) \mid R : 5\text{ 次環},\ S : R\text{ の 6 次レゾルベント環}\}/\sim$$

とおくと，定理 4.4 と全く同様の次の定理が成立する．

定理 6.1.　判別式を保つ標準全単射 $\mathcal{A}_{5,6} \to G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}$ が存在する．

ここで詳細を記述することはできないが，$(R, S) \in \mathcal{A}_{5,6}$ には標準的に $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $R/(\mathbb{Z}\cdot 1) \to \wedge^2 S/(\mathbb{Z}\cdot 1)$ が付随する．この構成を，$\mathfrak{S}_5$-5 次拡大 F とその 6 次レゾル

ベント体 L の組 (F,L) のレベルで与えておく．F の trace pairing $\langle x,y\rangle=\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(xy)$ によって F の双対加群 $F^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F,\mathbb{Q})$ を F 自身とみなす．このとき $F/(\mathbb{Q}\cdot 1)$ の双対加群は $\tilde{F}=\{x\in F\mid \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(x)=0\}$ である．$x\in L$ の元の $\mathbb{Q}$ 上の共役を $x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(6)}$ で表す．F の Galois 閉包を $\overline{F}$ とする．このとき，

$$\tilde{\phi}\colon L\times L\times L\to\overline{F},\qquad (x,y,z)\mapsto\begin{vmatrix} x^{(1)}-x^{(2)} & x^{(3)}-x^{(6)} & x^{(4)}-x^{(5)}\\ y^{(1)}-y^{(2)} & y^{(3)}-y^{(6)} & y^{(4)}-y^{(5)}\\ z^{(1)}-z^{(2)} & z^{(3)}-z^{(6)} & z^{(4)}-z^{(5)}\end{vmatrix}$$

を考えると，簡単な計算で以下が分かる．

- $\tilde{\phi}$ の像はある F の共役体に入る．特に，共役の順序 $x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(6)}$ を適切に選ぶことで，$\tilde{\phi}$ の像は $F=F^*$ に含まれる．以下共役の順序はそのように選ばれているとする．
- $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\tilde{\phi}(x,y,z))=0$ である．つまり $\tilde{\phi}$ の像は $\tilde{F}$ に含まれる．
- $\tilde{\phi}$ は $L/(\mathbb{Q}\cdot 1)\times L/(\mathbb{Q}\cdot 1)\times L/(\mathbb{Q}\cdot 1)$ を経由し，しかもこの上の交代形式である．

このことから，$\tilde{\phi}$ は

$$(22)\qquad \phi\colon\ \wedge^3\left(L/(\mathbb{Q}\cdot 1)\right)\to\tilde{F},\quad (x,y,z)\mapsto\begin{vmatrix} x^{(1)}-x^{(2)} & x^{(3)}-x^{(6)} & x^{(4)}-x^{(5)}\\ y^{(1)}-y^{(2)} & y^{(3)}-y^{(6)} & y^{(4)}-y^{(5)}\\ z^{(1)}-z^{(2)} & z^{(3)}-z^{(6)} & z^{(4)}-z^{(5)}\end{vmatrix}$$

を定める．この線形写像は，$(L/(\mathbb{Q}\cdot 1))$ の双対 $\tilde{L}$ を考えることで，$\phi\colon\ \wedge^2\tilde{L}\to\tilde{F}$ とみなせる．また ϕ を与えることはその双対写像 $\phi^*\colon F/(\mathbb{Q}\cdot 1)\to\wedge^2(L/(\mathbb{Q}\cdot 1))$ を与えることと同値である．これらを (F,L) のレゾルベント写像と呼ぶ．

$(R,S)\in\mathcal{A}_{5,6}$ に対しても，このレゾルベント写像の整モデルとしてのレゾルベント写像が付随する．これによって，定理 6.1 の写像が構成される．

注 6.2. (21) の対応 $\alpha\mapsto\beta$ は自然に 2 次写像 $\tilde{\psi}\colon F\to L=L^*$ を定める．これは $F/(\mathbb{Q}\cdot 1)$ を経由し，また $\mathrm{Tr}_{L/\mathbb{Q}}(\tilde{\psi}(\alpha))=0$ なので 2 次写像 $\psi\colon F/(\mathbb{Q}\cdot 1)\to\tilde{L}$ が定まる．しかし実はこれは ϕ の 2 次の共変写像として得られるもので，F,L 間の最も基本的な写像は (22) の ϕ である．

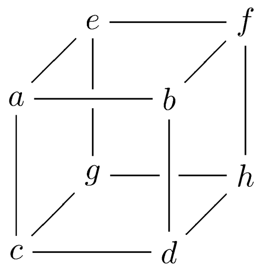
§7. 第 I 部：2 次環とそのイデアル類のパラメータ付け

本節では第 I 部 [3] について概説する．ここでは 6 種類の表現の整軌道の数論的解釈と，それら表現の相互関係が考察されている．具体的な内容を説明する前に，その理論から得られる Gauss の合成則 (系 3.4) に関する極めて印象的な結果を紹介しよう．

§7.1. 立方体の話

唐突であるが，立方体の各頂点に計 8 個の整数を置いたものを考える．

(23) $A =$



この立方体 A を以下のように (切り口が立方体のいずれかの面に平行になるようにして) 2 次正方行列の 2 個の組に 3 通りの方法で分割する．

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \\
M_2 &= \begin{pmatrix} a & c \\ e & g \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} b & d \\ f & h \end{pmatrix}, \\
M_3 &= \begin{pmatrix} a & e \\ b & f \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} c & g \\ d & h \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{24}
$$

立方体 A からこのようにして得られる 2 次正方行列の組 (M_i, N_i) それぞれに対して，整係数 2 元 2 次形式 $Q_i^A(x,y) \in \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2$ を

$$
Q_i^A(x,y) = -\det(M_i x - N_i y) \tag{25}
$$

として定める．簡単な計算で，Q_1^A, Q_2^A, Q_3^A の判別式は一致することが分かる．これを A の判別式とよび，$P(A)$ で表す[10]．このとき次が成り立つ．

定理 7.1. A から定まる $Q_1^A, Q_2^A, Q_3^A \in \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2$ が原始的ならば，*Gauss* の合成則 *(系 3.4)* によるこれら 3 個の積は単位元になる．逆に，判別式の等しい 3 個の原始的 2 元 2 次形式 Q_1, Q_2, Q_3 の，ガウスの合成則による積が単位元ならば，ある A が存在して，$Q_i = Q_i^A (1 \le i \le 3)$ である．

これは Gauss の合成則の簡潔で完全な記述を与えており，また見方を変えれば Gauss の合成則の定義を与えていると捉えることもできるものである．実際にはこの定理は，$\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})^3$-軌道を，2 次環のイデアル類の言葉で記述し，これと共変写像 (25) との関係を明らかにすることで示される．

[3] の説明に戻ろう．ここで扱われる空間は

$$
\begin{matrix}
\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2, & \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2, & \mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2, \\
\mathbb{Z}^2 \otimes \mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^2, & \mathbb{Z}^2 \otimes \wedge^2\mathbb{Z}^4, & \wedge^3\mathbb{Z}^6
\end{matrix} \tag{26}
$$

[10] これは，A の立体行列式 (hyperdeterminant) とよばれるものである．

の 6 個である．ただし群は各々に自然に作用する $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ の直積で，具体的には順に $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})^3$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})^2$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_4(\mathbb{Z}), \mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ である[11]．これらの表現の整軌道が，2 次環の (様々な) イデアル類をパラメータ付けしていることが示される．また，これらの空間の間に可換図式

(27)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2 \arrow[r] & \mathbb{Z}^2 \otimes \mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^2 \arrow[r] & \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \arrow[r] & \mathbb{Z}^2 \otimes \wedge^2\mathbb{Z}^4 \arrow[r] \arrow[d] & \wedge^3\mathbb{Z}^6 \arrow[ddl] \\
& & & \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2 \arrow[d] & \\
& & & \mathbb{D} &
\end{tikzcd}$$

が定まり，各々に作用する群の間の適当な準同型のもとでこれらは共変写像になる．また水平方向の写像はいずれも $\mathbb{Z}$ 線形な写像である．[3] では，この共変写像が誘導する整軌道の集合の間の写像が，パラメータ付けしている代数的な集合の間の自然な写像と整合していることも明らかにされる．特に 3.1 節で復習した 2 元 2 次形式の空間 $\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2$ の Gauss の理論は，この枠組みの一部として理解され，定理 7.1 が得られる．

以下，$\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$, $\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^2 \otimes \wedge^2\mathbb{Z}^4$ の場合をある程度具体的に解説しながら，この様子を概観する．

注 7.2. Wright-Yukie 理論との関係について注意を述べておく．(26) の表現を体上で考えると，一つを除いて $G_x/G_x^\circ \cong \mathfrak{S}_2$ であり，このことが (26) が 2 次環と関係する理由である．ただし，2 元 3 次形式の空間については $G_x/G_x^\circ \cong \mathfrak{S}_3$ だから，$\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2$ の軌道に 2 次環による解釈があることは，体上のデータからは直接には読み取れないように思われる．

§ 7.2. $2 \times 2 \times 2$ 立方体の空間

表現

(28)
$$V_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2,$$
$$G_{\mathbb{Z}} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

を考える．立方体たちのなす空間は $V_{\mathbb{Z}}$ と同一視される．この同一視は，v_1, v_2 を $\mathbb{Z}^2$ の標準基底として，(23) の A に対して

$$av_1 \otimes v_1 \otimes v_1 + bv_1 \otimes v_2 \otimes v_1 + cv_2 \otimes v_1 \otimes v_1 + dv_2 \otimes v_2 \otimes v_1$$
$$+ev_1 \otimes v_1 \otimes v_2 + fv_1 \otimes v_2 \otimes v_2 + gv_2 \otimes v_1 \otimes v_2 + hv_2 \otimes v_2 \otimes v_2$$

[11] これらのうち，[50] では $(\mathrm{GL}_6, \wedge^3 k^6)$ は扱われていないが，これは後に [49] で調べられている．なお，$k^2 \otimes \mathrm{Sym}^2 k^2$ は Castling 変換とよばれる概均質ベクトル空間の変換で $\mathrm{Sym}^2 k^2$ に移る空間である．Castling 変換で移りあう概均質ベクトル空間は本質的にあまり違いがない．Castling 変換については [34] を参照されたい．

に対応させる．$A \in V_{\mathbb{Z}}$ は $P(A) \neq 0$ のとき非退化であるという．$V_{\mathbb{Z}}$ の非退化な元全体のなす集合を $V'_{\mathbb{Z}}$ で表す．

S を向き付けられた非退化な 2 次環とする．S の向き付けられた (分数) イデアルの 3 つ組 (I_1, I_2, I_3) は，$I_1I_2I_3 \subset S$ かつ $N(I_1)N(I_2)N(I_3) = 1$ であるとき，均衡している (balanced) という．二つの均衡している向き付けられたイデアルの 3 つ組 (I_1, I_2, I_3), (I'_1, I'_2, I'_3) は，ある $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in S \otimes \mathbb{Q}, \kappa_1\kappa_2\kappa_3 = 1$ が存在して $I'_i = \kappa_i I_i$ $(1 \leq i \leq 3)$ となるとき，同値であるという．例えば S が Dedekind 環の場合，均衡している向き付けられたイデアルの 3 つ組の同値類とは，3 つの向き付けられたイデアル類の組でその積が主イデアル類であるようなものに他ならない．

$$\mathcal{C}'_2 = \left\{ (S, (I_1, I_2, I_3)) \;\middle|\; \begin{array}{l} S : \text{向き付けられた非退化な 2 次環，} (I_1, I_2, I_3) : S \text{ の} \\ \text{均衡している向き付けられたイデアルの 3 つ組の同値類} \end{array} \right\} / \sim$$

とおく．$(S, (I_1, I_2, I_3)) \in \mathcal{C}'_2$ の判別式とは $D(S)$ のこととする．このとき次が成立する．

定理 7.3. 判別式を保つ標準全単射 $\mathcal{C}'_2 \to G_{\mathbb{Z}} \backslash V'_{\mathbb{Z}}$ が存在する．

この定理も対応の構成だけ述べる．$(S, (I_1, I_2, I_3)) \in \mathcal{C}'_2$ をとる．標準射影 $S \to S/(\mathbb{Z}\cdot 1)$ を π と表すと，合成

$$I_1 \times I_2 \times I_3 \to S \to S/(\mathbb{Z} \cdot 1), \qquad (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto \xi_1\xi_2\xi_3 \mapsto \pi(\xi_1\xi_2\xi_3)$$

は $\mathbb{Z}$ 線形な写像

$$I_1 \otimes I_2 \otimes I_3 \to S/(\mathbb{Z} \cdot 1), \qquad \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \xi_3 \mapsto \pi(\xi_1\xi_2\xi_3) \tag{29}$$

を誘導する．定義によりこれは同値類からの代表 I_1, I_2, I_3 の取り方によらない．I_1, I_2, I_3 は階数 2 の自由 $\mathbb{Z}$ 加群であること，また向き付けられていることから，写像 (29) は $G_{\mathbb{Z}} \backslash V_{\mathbb{Z}}$ の元とみなせる．これが定理 7.3 の対応を与える．この場合も著しいことに，この写像は全単射となる．

さて，この定理によって，$A \in V'_{\mathbb{Z}}$ に対して，判別式が $P(A)$ であるような 2 次環 S の 3 個のイデアル類 I_1, I_2, I_3 が定まることが分かった．一方で (25) によって A から，判別式を $P(A)$ とするような 3 個の 2 元 2 次形式 Q^A_1, Q^A_2, Q^A_3 が定まる．定理 3.2 によって 2 元 2 次形式の類とイデアル類には自然な対応があったから，この対応との関係は当然気になるところであろう．実際，これは定理 3.2 の対応そのものになる．すなわち次が成り立つ．

系 7.4. 各 $1 \leq i \leq 3$ に対し，図式

$$\begin{tikzcd}
G_{\mathbb{Z}} \backslash V'_{\mathbb{Z}} \ni [A] \arrow[r, mapsto] \arrow[d, leftrightarrow, "1:1"'] & {[Q^A_i] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash (\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2)'} \arrow[d, leftrightarrow, "1:1"] \\
\mathcal{C}'_2 \ni (S, (I_1, I_2, I_3)) \arrow[r, mapsto] & (S, I_i) \in \mathcal{B}'_2
\end{tikzcd}$$

は可換である．ただし，垂直な全単射はそれぞれ定理 *7.3*，定理 *3.2* で与えられた写像である．

なお，$V_{\mathbb{Z}} \ni A \mapsto Q_i^A \in \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2$ は，作用する群の間の準同型 $p_i\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})^3 \ni g = (g_1, g_2, g_3) \mapsto g_i \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して共変写像となる，すなわち $Q_i^{g\cdot A} = p_i(g)\cdot Q_i^A$ であることを注意しておく．このことから図式の上部の水平な写像は well-defined になる．

定理 7.3, 系 7.4 と定理 7.1 の関係について説明しておこう．$D \in \mathbb{D}$, $D \neq 0$ に対して

$$\mathcal{C}_2(D)^{\mathrm{prj}} = \{(S, (I_1, I_2, I_3)) \in \mathcal{C}_2 \mid D(S) = D,\ I_1, I_2, I_3 \text{ は } S \text{ の射影加群}\}$$

とおく．これは I_1, I_2, I_3 の成分ごとの積によって $\mathrm{Cl}^+(S(D))^2$ と同型な群となる：

$$\mathcal{C}_2(D)^{\mathrm{prj}} = \{(I_1, I_2, I_3) \in \mathrm{Cl}^+(S(D))^3 \mid I_1I_2I_3 = 1\} \cong \mathrm{Cl}^+(S(D))^2$$

一方，$A \in V_{\mathbb{Z}}$ は $Q_1^A, Q_2^A, Q_3^A \in \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2$ がいずれも原始的であるとき射影的であるということにする．

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2; D) = G_{\mathbb{Z}} \backslash \{A \in V_{\mathbb{Z}} \mid P(A) = D,\ A \text{ は射影的}\}$$

すると系 7.4 により次が得られる．

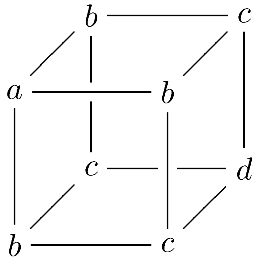
系 7.5. 定理 *7.3* の全単射は，全単射 $\mathcal{C}_2(D)^{\mathrm{prj}} \leftrightarrow \mathrm{Cl}(\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2; D)$ を誘導する．特に $\mathrm{Cl}(\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2; D)$ は自然なアーベル群の構造をもち，$\mathrm{Cl}^+(S(D))^2$ と同型である．また，$\mathrm{Cl}(\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2; D) \ni [A] \mapsto [Q_i^A] \in \mathrm{Cl}(\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2; D)$ は準同型である．

このことから定理 7.1 が示される．

§7.3. 2 元 3 次形式の空間

次に，立方体 A のうち，次のような形をしたものだけからなる空間について考えてみる．

(30)



これは，$\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ に $\mathfrak{S}_3$ を作用させたときの不変部分空間である．この空間を $\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2$ で表す．この空間にはもはや $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})^3$ は作用しないが，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ni g \mapsto (g, g, g) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})^3$ を通して作用する．立方体 (30) に $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ を対応させること

にすれば，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ は変数の線形変換で作用する．そこで，$\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2$ を 2 元 3 次形式のなす空間とみなし，次の表現を考える．

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{Z}} &= \mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2 = \{f(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}\}, \\ G_{\mathbb{Z}} &= \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \end{aligned} \tag{31}$$

注 7.6. この 2 元 3 次形式の空間 $\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2$ は (6) の 2 元 3 次形式の空間 $\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2$ と少し異なる．注 3.6 に述べたように，$\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2$ は $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ の商加群として定義されるもので，$\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2$ は $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ の部分加群として定義されるものである．$\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2$ の双対加群は $\mathrm{Sym}_3((\mathbb{Z}^2)^*)$ になる．

$V_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ とみて，$f \in V_{\mathbb{Z}}$ の判別式 $P(f)$ が定まる．$V'_{\mathbb{Z}} = \{f \in V_{\mathbb{Z}} \mid P(f) \neq 0\}$ とおく．なお，$V_{\mathbb{Z}} \subset \mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2$ とみなして $\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2$ の (3.2 節の) 判別式をとると $27P(f)$ となる．

大雑把には $G_{\mathbb{Z}}\backslash V'_{\mathbb{Z}}$ は 2 次環のイデアル類群の 3 等分点たちと対応する．このことを正確に定式化する．向き付けられた非退化な 2 次環 S，その向き付けられた (分数) イデアル I，および $\delta \in (S \otimes \mathbb{Q})^\times$ であって，$I^3 \subset \delta S$ かつ $N(I)^3 = N(\delta)$ をみたすような 3 つ組 (S, I, δ) を考える．二つの 3 つ組 $(S, I, \delta), (S', I', \delta')$ が同値であるとは，同型 $S \to S'$ と (これにより $S = S'$ とみなして) ある $\kappa \in (S \otimes \mathbb{Q})^\times$ が存在して，$I' = \kappa I$ かつ $\delta' = \kappa^3\delta$ が成り立つことをいう．この同値類の集合を $\mathcal{E}'_2$ で表す．

$$\mathcal{E}'_2 = \left\{ (S, I, \delta) \,\middle|\, \begin{array}{l} S:\text{向き付けられた非退化な 2 次環}, I:S\text{ の向き付けられた} \\ \text{イデアル}, \delta \in (S \otimes \mathbb{Q})^\times, I^3 \subset \delta S, N(I)^3 = N(\delta) \end{array} \right\} / \sim$$

以上のもとで，次が成り立つ．

定理 7.7. 判別式を保つ標準全単射 $\mathcal{E}'_2 \to G_{\mathbb{Z}}\backslash V'_{\mathbb{Z}}$ が定まる．

写像は，$(S, I, \delta) \in C'_2$ に対し，3 次写像

$$I \to S/(\mathbb{Z} \cdot 1), \qquad \xi \mapsto \pi(\delta^{-1}\xi^3)$$

が定める $G_{\mathbb{Z}}\backslash V'_{\mathbb{Z}}$ の元を対応させる．(もう少し厳密には，$\mathbb{Z}$ 線形な写像

$$I \otimes I \otimes I \to S/(\mathbb{Z} \cdot 1), \qquad \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \xi_3 \mapsto \pi(\delta^{-1}\xi_1\xi_2\xi_3) \tag{32}$$

が $I \otimes I \otimes I \to \mathrm{Sym}^3 I$ を経由するので，この $\mathrm{Sym}^3 I \to S/(\mathbb{Z} \cdot 1)$ が定める $G_{\mathbb{Z}}\backslash V'_{\mathbb{Z}}$ の元を対応させる．)

7.2 節と同様に，$D \in \mathbb{D}, D \neq 0$ に対して

$$\mathcal{E}_2(D)^{\mathrm{prj}} = \{(S, I, \delta) \in \mathcal{E}'_2 \mid D(S) = D,\ I \text{ は } S \text{ の射影加群}\},$$

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2; D) = G_{\mathbb{Z}}\backslash \left\{ f \in \mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2 \,\middle|\, \begin{array}{l} P(f) = D, \\ f \text{ は } (\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \text{ の元として) 射影的} \end{array} \right\}$$

とおく．$\mathcal{E}_2(D)^{\mathrm{prj}}$ は I, δ の成分に関する成分ごとの積で有限アーベル群になる．定理 7.7 の部分対応として，次が得られる．

系 7.8. 定理 *7.7* の全単射は，全単射 $\mathrm{Cl}(\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2;D) \leftrightarrow \mathcal{E}_2(D)^{\mathrm{prj}}$ を誘導する．特に $\mathrm{Cl}(\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2;D)$ は自然な有限アーベル群の構造をもつ．

$\mathcal{E}_2(D)^{\mathrm{prj}}$ の群構造について付言しておく．この群は $\mathrm{Cl}^+(S(D))$ の 3 等分点のなす部分群 $\mathrm{Cl}_3^+(S(D)) = \{I \in \mathrm{Cl}^+(S(D)) \mid I^3 = 1\}$ に非常に近い群だが，一般には完全に同型ではない．正確には次が成立する．

補題 7.9. $\mathcal{E}_2(D)^{\mathrm{prj}} \ni (S(D), I, \delta) \mapsto I \in \mathrm{Cl}_3^+(S(D))$ は全射準同型である．またその核の位数は，$U = S(D)^\times$ として，$|U/U^3|$ に等しい．

なお，簡単に分かるように，$\mathrm{Cl}_3^+(S(D))$ は，イデアル類群 $\mathrm{Cl}(S(D))$ の 3 等分点のなす部分群 $\mathrm{Cl}_3(S(D))$ と標準同型である．

そして，定理 7.3, 定理 7.7 と包含写像 $\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ が誘導する整軌道の間の写像との関係は次のようになる．

系 7.10. 図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash(\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2)' & \longrightarrow & \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})^3\backslash(\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2)' \\
{\scriptstyle 1:1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle 1:1} \\
\mathcal{E}_2' \ni (S, I, \delta) & \longmapsto & (S, (I, I, \delta^{-1}I)) \in \mathcal{C}_2'
\end{array}$$

は可換である．ただし，上部の水平な写像は $\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ が誘導する軌道の間の写像であり，垂直な二つの全単射は，それぞれ定理 *7.3,* 定理 *7.7* で与えられた写像である．特に $\mathrm{Cl}(\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2;D) \to \mathrm{Cl}(\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2;D)$ は群準同型である．

これは定理 7.3, 定理 7.7 の証明で構成された写像 (29), (32) を見比べれば直ちに得られるものだが，これによって定理 7.7，系 7.8 の意味がより鮮明になる．

注 7.11. これまで本節で論じられている整軌道と 2 次環のイデアル類との様々な対応は，2 節，3.2 節，4 節，6 節の $2, 3, 4, 5$ 次環の対応と異なり，非退化なもの (判別式が 0 でないもの) 同士の対応に限られている．$'$(プライム) を付けたのはこれを表すためである．これは本節と次節を通して常に付く制限である．注 3.3 でも少し述べたが，これらの対応を退化した場合に拡張するためには，退化した環に対するイデアル類や均衡の概念を定式化する必要がある．非退化なもの同士の対応は既に十分に興味深いものであるが，整数論的な考察のためには $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ など様々な環に底変換して考えることが有効なことも多く，その目的のためにも退化した場合への拡張は大切な問題の一つである．(現在いろいろと調べられているようである．)

§ 7.4. 他の表現

第 I 部 [3] では，(26) の 6 個の表現およびそれらの間の共変写像 (27) に対し，

(A) 各々の表現の非退化な整軌道の集合 $G_{\mathbb{Z}}\backslash V'_{\mathbb{Z}}$ が，2 次環とそのイデアル類の言葉で記述される代数的な適当なデータの集合と標準的に対応する (定理 3.2, 定理 7.3, 定理 7.7 のように) こと，

(B) 特に判別式を指定した “射影的” な整軌道の集合 $G_{\mathbb{Z}}\backslash V_{\mathbb{Z}}(D)^{\mathrm{prj}} = \mathrm{Cl}(V_{\mathbb{Z}}; D)$ が自然な有限アーベル群の構造をもつ (系 3.4, 系 7.5, 系 7.8 のように)，したがって各 $\mathrm{Cl}(V_{\mathbb{Z}}; D)$ に “合成則” が定まること，

(C) 二つの表現 $(G_{\mathbb{Z}}, V_{\mathbb{Z}}), (H_{\mathbb{Z}}, W_{\mathbb{Z}})$ の間に図式 (27) にある共変写像 $\tau\colon V_{\mathbb{Z}} \to W_{\mathbb{Z}}$ があるとき，それらの非退化な整軌道 $G_{\mathbb{Z}}\backslash V'_{\mathbb{Z}}, H_{\mathbb{Z}}\backslash W'_{\mathbb{Z}}$ と対応する代数的なデータの集合 $\mathcal{X}'_2, \mathcal{Y}'_2$ の間にも，代数的な操作によって得られる自然な写像 $\mathcal{X}'_2 \to \mathcal{Y}'_2$ が存在して，τ が導く整軌道の間の写像 $\tilde{\tau}\colon G_{\mathbb{Z}}\backslash V'_{\mathbb{Z}} \to H_{\mathbb{Z}}\backslash W'_{\mathbb{Z}}$ と可換になり，また $\tilde{\tau}\colon \mathrm{Cl}(V_{\mathbb{Z}}; D) \to \mathrm{Cl}(W_{\mathbb{Z}}; D)$ は群準同型になる (系 7.4, 系 7.10 のように) こと

が示されている．ここまででその一部を説明してきたが，その様子を明らかにするために，もう一つの表現

$$V_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^2 \otimes \wedge^2\mathbb{Z}^4, \qquad G_{\mathbb{Z}} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_4(\mathbb{Z}) \tag{33}$$

を例にとって，(A), (B), (C) を駆け足で説明しておく．一部，出てくる用語の定義を省略するが，これについては原論文を参照いただきたい．

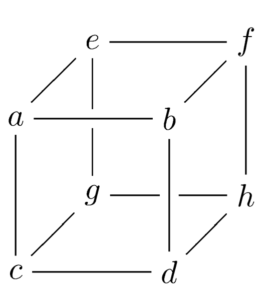
まず，共変写像 $\mathbb{Z}^2 \otimes \wedge^2\mathbb{Z}^4 \to \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \otimes \wedge^2\mathbb{Z}^4$ を構成する．$V_{\mathbb{Z}}$ は 4 次交代行列の対 $F = (M, N)$ のなす空間とみなす．このとき，整係数 2 元 2 次形式 $Q^F(x, y)$ が

$$Q^F(x, y) = -\mathrm{Pfaff}(Mx - Ny) \in \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2$$

により定まる．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_4(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ を第一成分への写像とすると

$$\mathbb{Z}^2 \otimes \wedge^2\mathbb{Z}^4 \to \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2, \qquad F \mapsto Q^F \tag{34}$$

は共変写像となる．F の判別式 $D(F)$ はこの Q^F の判別式と定める．また，

(35) 

$$\mapsto \left(\begin{pmatrix} & & a & b \\ & & c & d \\ -a & -c & & \\ -b & -d & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & e & f \\ & & g & h \\ -e & -g & & \\ -f & -h & & \end{pmatrix} \right)$$

によって $Z^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \otimes \wedge^2\mathbb{Z}^4$ を定めると，これは作用する群の間の準同型

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_4(\mathbb{Z}), \quad (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \mapsto \left(\gamma_1, \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_3 \end{pmatrix} \right)$$

に対して，共変写像になる．(35) は次のようにも説明できる．L_1, L_2 を階数 2 の自由加群として，$\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2$ の元を $\mathbb{Z}$ 双線形形式 $\phi\colon L_1 \times L_2 \to \mathbb{Z}$ とみなす．このとき，

$$\wedge_{2,2}\phi\colon (L_1 \oplus L_2) \times (L_1 \oplus L_2) \to \mathbb{Z}, \qquad ((s_1, s_2), (t_1, t_2)) \mapsto \phi(s_1, t_2) - \phi(s_2, t_1)$$

は $L_1 \oplus L_2$ 上の 2 次交代形式なので，$\wedge_{2,2}\phi \in \wedge^2\mathbb{Z}^4$ とみなせる．これにより

$$\mathrm{id} \otimes \wedge_{2,2}\colon \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \otimes \wedge^2\mathbb{Z}^4 \tag{36}$$

が定まる．

表現 $G_{\mathbb{Z}}\backslash V'_{\mathbb{Z}}$ がパラメータ付けする対象は 3 つ組 $(S, (I, M))$ の同値類のなす集合 $\mathcal{F}'_2 = \{(S, (I, M))\}/\sim$ である．ここで S は向き付けられた非退化な 2 次環，I, M は向き付けられたそれぞれ階数 $1, 2$ の S の分数イデアルであって，組 (I, M) が均衡しているようなものである．(定義は [3, p.240] を参照されたい．) 次が成り立つ．

定理 7.12. 判別式を保つ標準全単射 $\mathcal{F}'_2 \to G_{\mathbb{Z}}\backslash V'_{\mathbb{Z}}$ が存在する．

この均衡している組 (I, M) には自然に $\mathbb{Z}$-線形な写像 $I \otimes \wedge^2 M \to S$ が付随しており，これと $S \to S/(\mathbb{Z}\cdot 1)$ との合成をとることで，$G_{\mathbb{Z}}\backslash V'_{\mathbb{Z}}$ の元が定まる．これが定理の対応を与える．

なお，Serre [36] によって次元 1 の環 S 上の有限生成射影加群 M は，階数 1 の射影加群 $\mathrm{Det}(M)$ によって一意に決まる．このことから，$\mathcal{F}'_2(D)^{\mathrm{prj}} = \{(S(D), (I, S(D) \oplus I^{-1}))\} \cong \mathrm{Cl}^+(D(S))$ となり，$\mathrm{Cl}(\mathbb{Z}^2 \otimes \wedge^2\mathbb{Z}^4, D)$ は $\mathrm{Cl}^+(D(S))$ と同型な群になる．

$\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2 \otimes \wedge^2\mathbb{Z}^4, \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2$ の相互関係については次が成り立つ．なお，各々に作用する群を簡単に $\Gamma_{2,2,2}, \Gamma_{2,4}, \Gamma_2$ で表す．

系 7.13. 図式

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{2,2,2}\backslash(\mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2 \otimes \mathbb{Z}^2)' \arrow[r] & \Gamma_{2,4}\backslash(\mathbb{Z}^2 \otimes \wedge^2\mathbb{Z}^4)' \arrow[r] & \Gamma_2\backslash(\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2)' \\
\mathcal{C}'_2 \arrow[u, "1:1"] \arrow[r] & \mathcal{F}'_2 \arrow[u, "1:1"'] \arrow[r] & \mathcal{B}'_2 \arrow[u, "1:1"']
\end{tikzcd}$$

は可換である．ここで，垂直な全単射はそれぞれ定理 *7.3,* 定理 *7.12,* 定理 *3.2* で与えられた写像であり，上側の水平な写像は共変写像 (34), (36) が誘導する軌道の間の写像である．また下側の水平な写像はそれぞれ

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}'_2 \to \mathcal{F}'_2, && (S, (I_1, I_2, I_3)) \mapsto (S, (I_1, I_2 \oplus I_3)), \\
&\mathcal{F}'_2 \to \mathcal{B}'_2, && (S, (I, M)) \mapsto (S, I)
\end{aligned}$$

と定める．

[3] では，(26), (27) の全てに対して (A), (B), (C) の理論が展開される．例えば，$\wedge^3\mathbb{Z}^6$ の非退化な整軌道がパラメータ付けする集合は，向き付けられた非退化な 2 次環 S と，その階数 3 の均衡しているイデアル類 N の組 (S,N) の同値類 $\mathcal{G}_2' = \{(S,N)\}/\sim$ である．なお，Serre [36] の定理から，$\mathrm{Cl}(\wedge^3\mathbb{Z}^6, D)$ は単位群になる．そして，共変写像 $\mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^4 \to \wedge^3\mathbb{Z}^6$ に対応する $\mathcal{F}_2' \to \mathcal{G}_2'$ は $(S,(I,M)) \mapsto (S, I\oplus M)$ で与えられる．詳細は原論文を参照されたい．

(26) の空間は，それぞれ C_2, D_4, G_2, C_3, D_5, D_7 型の単純代数群から (5 節で説明した手続きにより) 得られる放物型の概均質ベクトル空間でことを思い出しておこう．[3] は最後に，(C) とこれら単純代数群の Dynkin 図形の “操作” との不思議な対応が観察されて，論文が締めくくられている．

注 7.14. 図式 (27) の 1 行目の水平方向の (単射 $\mathbb{Z}$ 線形) 写像はいずれも 3 通りある．次のような図式によってそれらを同時に現してみよう：

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^2 \arrow[dr] & & \mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^4 \arrow[dr] & \\
\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^2 \arrow[r] & \mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^2 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^4 \arrow[r] & \wedge^3\mathbb{Z}^6 \\
 & \mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^2 \arrow[ur] & & \mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^4 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

もちろんいずれの写像も単射 $\mathbb{Z}$ 線形である．次節の図式 (38) と比べると，$\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^2$ が $\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3$ よりも大きな対称性を持つことから，これらより多くの $\mathbb{Z}$ 加群の族が付随し，特に (38) にはない両端の加群 $\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2$, $\wedge^3\mathbb{Z}^6$ が “存在” することが分かる．

§8. 第 II 部：3 次環とそのイデアル類のパラメータ付け

ここでは，第 II 部 [4] について解説する．[4] で扱われる空間は $\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2$ の他，

$$\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3, \qquad \mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^3, \qquad \mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^6 \tag{37}$$

と，それらの間の共変写像

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^3 \arrow[r] & \mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3 \arrow[r] & \mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^6 \arrow[d] \\
 & & \mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2
\end{tikzcd} \tag{38}$$

である．なお，(37) に作用する群はそれぞれ，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\times\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})^2$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\times\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})\times\mathrm{GL}_6(\mathbb{Z})$ を考える．以下，これらを $\Gamma_{2,3,3}, \Gamma_{2,3}, \Gamma_{2,6}$ で表す．

理論構成は前節で説明した第 I 部 [4] と非常によく似ている．$\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3$ は整数係数 3 次正方行列のペア (A,B) 全体のなす空間とみなし，$\mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^3$ はその中で対称行列のみからなる部分空間とみなす．(38) の

$$\mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^3\to\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3 \tag{39}$$

は包含写像である．また，$\mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^6$ は整数係数の 6 次交代行列のペア (M,N) 全体のなす空間とみなす．$\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3\to\mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^6$ は

$$\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3\ni(A,B)\mapsto\left(\begin{pmatrix} & A\\ -{}^tA & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & B\\ -{}^tB & \end{pmatrix}\right)\in\mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^6 \tag{40}$$

で定める．この写像の意味は前節の (36) と同じである．また，各々から $\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2$ への写像は

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^3,\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3\ni(A,B)\mapsto\det(Ax+By)\in\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2,\\ \mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^6\ni(M,N)\mapsto\mathrm{Pfaff}(Mx+Ny)\in\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2\end{aligned} \tag{41}$$

で定める．これらは (39), (40) と可換である．

さて，各々の整軌道の数論的解釈について説明しよう．まず $\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3$ から考える．これは，大雑把には 3 次環のイデアル類を記述する．(このことは，体 k 上で $(\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_3\times\mathrm{GL}_3,k^2\otimes k^3\otimes k^3)$ が，$(\mathrm{GL}_1\times\mathrm{GL}_2,k\otimes\mathrm{Sym}^2k^2)$ の 3 次の類似を与えると指摘している第 5 節の Wright-Yukie の結果と整合している．)

R を非退化な 3 次環とする．R の $K=R\otimes\mathbb{Q}$ 内の分数イデアルのペア (I_1,I_2) が均衡しているとは，$I_1I_2\subset R$ かつ $N(I_1)N(I_2)=1$ となることをいう．(例えば I_1,I_2 が射影的なときは，$I_2=I_1^{-1}$ になる．) 均衡している 2 つのペア (I_1,I_2), (J_1,J_2) はある $\kappa\in K^\times$ が存在して $J_1=\kappa I_1$, $J_2=\kappa^{-1}I_2$ となるとき同一の均衡しているイデアルの類に属するという．

$$\mathcal{B}_3'=\left\{(S,(I_1,I_2))\,\middle|\,\begin{array}{l}S:\text{ 非退化な 3 次環},\\ (I_1,I_2):S\text{ の均衡しているイデアルの類}\end{array}\right\}/\sim$$

とおく．

定理 8.1. 3 次環を保つような標準全単射 $\mathcal{B}_3'\to\Gamma_{2,3,3}\backslash(\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3)'$ が存在する．

ここで，“3 次環を保つ” とは，$(S,(I_1,I_2))\in\mathcal{B}_3'$ が $(A,B)\in\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3$ の軌道と対応するとき S は $\det(Ax+By)\in\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2$ と定理 3.7 によって対応していること，つまり “共変写像 (41) と整合的であること” を意味するものとする．

対応を構成するには，$(S,(I_1,I_2))\in\mathcal{B}_3'$ に対し，合成

$$I_1\otimes I_2\to S\to S/(\mathbb{Z}\cdot1),\qquad \xi_1\otimes\xi_2\mapsto\xi_1\xi_2\mapsto\pi(\xi_1\xi_2) \tag{42}$$

が定める $\Gamma_{2,3,3}\backslash\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3$ の元をとればよい．

次に

$$\mathcal{C}'_3=\left\{(S,I,\delta)\;\middle|\;\begin{array}{l}S:\text{非退化な 3 次環},\ I:S\text{ のイデアル},\\ \delta\in(S\otimes\mathbb{Q})^\times,\ I^2\subset\delta S,\ N(I)^2=N(\delta)\end{array}\right\}/\sim$$

とおく．ただし，同値性の定義は7.3節の $\mathcal{E}'_2$ と同様である．すなわち，$(S,I,\delta)\sim(S',I',\delta')$ は，3 次環の同型 $S\cong S'$ が存在し，さらに $\kappa\in(S\otimes\mathbb{Q})^\times$ が存在して，$I'=\kappa I,\delta'=\kappa^{-1}\delta$ となることとする．このとき，

定理 8.2. 3 次環を保つような標準全単射 $\mathcal{C}'_3\to\Gamma_{2,3}\backslash(\mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^3)'$ が存在する．

対応は，$(S,I,\delta)\in\mathcal{C}'_3$ に対し，

$$I\to S/(\mathbb{Z}\cdot 1),\qquad \xi\mapsto\pi(\delta^{-1}\xi^2)\tag{43}$$

が定める $\Gamma_{2,3}\backslash\mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^3$ の元をとる．また，

$$\mathcal{D}'_3=\left\{(S,M)\;\middle|\;\begin{array}{l}S:\text{非退化な 3 次環},\\ M:S\text{ の均衡している階数 2 のイデアルの類}\end{array}\right\}/\sim$$

とおくと，やはり

定理 8.3. 3 次環を保つような標準全単射 $\mathcal{D}'_2\to\Gamma_{2,6}\backslash(\mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^6)'$ が存在する．

今度は，$(S,M)\in\mathcal{D}'_2$ に対し，$\wedge^2M\to S/(\mathbb{Z}\cdot1)$ が定める $\Gamma_{2,6}\backslash\mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^6$ の元を取る．

共変写像とパラメータ付けの関係については，各定理の写像の構成から直ちに，次が導かれる．

系 8.4. 図式

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{2,3}\backslash(\mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^3)' \arrow[r] & \Gamma_{2,3,3}\backslash(\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3)' \arrow[r] & \Gamma_{2,6}\backslash(\mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^6)' \\
\mathcal{C}'_3 \arrow[u, "1:1"] \arrow[r] & \mathcal{B}'_3 \arrow[u, "1:1"'] \arrow[r] & \mathcal{D}'_3 \arrow[u, "1:1"']
\end{tikzcd}$$

は可換である．ここに，ここで，上側の水平な写像は共変写像 (38) が誘導する軌道の間の写像であり，下側の水平な写像は

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}'_3\to\mathcal{B}'_3, && (S,I,\delta)\mapsto(S,(I,\delta^{-1}I)),\\ &\mathcal{B}'_3\to\mathcal{D}'_3, && (S,(I_1,I_2))\mapsto(S,I_1\oplus I_2),\end{aligned}$$

で定める．

§9. 概均質ベクトル空間・余正則空間の網

次の (可換) 図式をご覧いただきたい.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^3 & \\
\wedge^4\mathbb{Z}^7 & \wedge^2\mathbb{Z}^3\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^4 \arrow[l] \arrow[u] & \wedge^2\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^2 \arrow[l] \arrow[ul] \\
\wedge^3\mathbb{Z}^6 \arrow[u] \arrow[ddd, bend right] & \mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^4 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[dd, bend right] & \\
V_{14} \arrow[u] \arrow[dd] & \mathbb{Z}^2\otimes V_5 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & (\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^2 \arrow[l] \arrow[ul] \arrow[uu] \\
 & \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^2 \arrow[dl] & \mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^2 \arrow[l] \arrow[u] \\
\mathbb{D} & & \mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2 \arrow[ll] \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\wedge^3\mathbb{Z}^8 & \mathbb{Z}^3\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^5 \arrow[l] \\
\mathbb{Z}^2\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^6 \arrow[u] \arrow[d] & \mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3 \arrow[l] \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[dl] \\
\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2 & \mathbb{Z}^2\otimes\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^3 \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

これらはそれぞれ，図式 (27), (38) を一部に含むより大きな共変写像の可換図式であり，すべてのベクトル空間は例外群[12]から定まる放物型の概均質ベクトル空間である．なお，V_5 は $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ の 5 次元表現，V_{14} は $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{Z})$ の 14 次元表現を表す.

7 節と 8 節を読まれた方は，その理論の並行性に少なからず驚かれたことと思う．特に，ベクトル空間の操作である対称化 Sym と歪対称化 $\wedge$ は，対応する環論的対象の加群におけるイコール $=$ 及び直和 $\oplus$ という操作とそれぞれ整合する．次のような操作の対応を想像してみよう.

symmetrization (対称化)	$\longleftrightarrow$	$=$
skew-symmetrization (歪対称化)	$\longleftrightarrow$	$\oplus$
symplectization (斜交化)	$\longleftrightarrow$	$\oplus$ と斜交構造
hermitianization (エルミート化)	$\longleftrightarrow$	Galois 共役
dualization (双対化)	$\longleftrightarrow$	類体論

7, 8 節の議論は，ひとたび $\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^2\otimes\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^3$ の合成則（軌道の代数的対象による解釈）が得られれば，他のいくつもの “不変・共変空間” にもその合成則が遺伝することを示唆している．実際，Gauss の合成則はその多くの合成則の一例とみなすことができた．第 V 部 [7] では，上記の図式の中の，$\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^3$, $\wedge^4\mathbb{Z}^7$, $\wedge^3\mathbb{Z}^8$ はそれぞれ四元数環 H，八元数環 $\mathcal{O}$，9 次元の中心的単純環 D' を分類していることが，また例えば $\wedge^2\mathbb{Z}^3\otimes\wedge^2\mathbb{Z}^4$

[12] 実際には C_2, D_4 など古典型に分類されるものも含まれる．しかしそれらも，階数が小さいため古典型と偶然一致したと考えることができる.

は四元数環とその階数 1 の加群の組 (H, M) を分類していることなどが示されるようであるが，そこでは上記のような操作の対応もより鮮明に表れる．この意味で，概均質ベクトル空間は個別にランダムに存在しているのではなく，相互に緊密な繋がりをもつ“網 (net)” を形成していることが分かる．

さて，高次合成則はいずれも概均質ベクトル空間を舞台に展開されたが，この成功を前に，より一般的な代数群の線形表現に対しても何か同様の理論が考えられないか期待するのは自然であろう．概均質ベクトル空間の一般化に，余正則空間 (coregular space) がある．表現 (G, V) はその不変式環 $k[V]^G$ が多項式環 $k[X_1, \dots, X_n]$ と同型になるとき余正則であるという．既約正則な概均質ベクトル空間の場合，(簡約群 G を半単純な部分に取り替えると) これは唯一の相対不変式 P が生成する 1 変数多項式環 $k[P]$ となるので，余正則空間はこの一般化である．余正則空間の基本的なクラスの分類は Littelmann [28] による．それらは 70 種類あり，そのうち 24 種類は無限系列である．Bhargava-Ho は進行中の研究において，このうち

$$k^2 \otimes k^2 \otimes k^2 \otimes k^2, \qquad k^3 \otimes k^3 \otimes k^3, \qquad \mathrm{Sym}^2 k^4 \otimes k^2, \qquad \wedge^2 k^5 \otimes k^5$$

に注目し (作用する群はここでも $\mathrm{GL}_n(k)$ か $\mathrm{SL}_n(k)$ の直積である)，若干の k の標数の仮定のもとで，それらの軌道が種数 1 の曲線 C と，階数 2,3,4,5 の直線束 $\mathcal{L}$ のペア $(C, \mathcal{L})$ を，(場合によっては付加構造つきで) 分類していることを見いだした．ここでも，初めの二つの空間 $k^2 \otimes k^2 \otimes k^2 \otimes k^2, k^3 \otimes k^3 \otimes k^3$ からは，ベクトル空間の操作により多数の余正則空間が得られ，“余正則空間の網” が形成されるが，それらは $(C, \mathcal{L}, *)$ の代数的・幾何的な操作と自然に対応するようである．

§ 10.　応用と一般化

最後に，応用と一般化についていくつか説明して本稿を終える．

§ 10.1.　密度定理

高次合成則のもっとも直接的な応用に密度定理がある．$n \geq 1$ に対して，

$$N_n(\mathfrak{S}_n; X) = \#\{F \mid [F : \mathbb{Q}] = n, \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nc}}/F) \cong \mathfrak{S}_n, |\mathrm{Disc}(F)| < X\},$$

とおこう．ただし F^{nc} は F の Galois 閉包を表し，$\mathrm{Disc}(F)$ は F の判別式である．なお，同型な体は一度だけ数えることにする．$X \to \infty$ のときの $N_n(\mathfrak{S}_n; X)$ の漸近挙動を調べる問題は古くから知られていて，極限

$$c_n = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(\mathfrak{S}_n; X)}{X}$$

が存在し $n > 1$ ならば $c_n > 0$ となることが予想されていた．

$n=1$ ならばもちろんこの極限は 0 で，また $n=2$ のときも簡単な議論によって

$$\lim_{X\to\infty}\frac{N_2(\mathfrak{S}_2;X)}{X}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\zeta(2)}$$

が得られる．ただし，二つの $1/2$ はそれぞれ実 2 次体の族と虚 2 次体の族それぞれの寄与を表している．また $n=3$ のときは，Davenport-Heilbronn [20] が

$$\lim_{X\to\infty}\frac{N_3(\mathfrak{S}_3;X)}{X}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\zeta(3)}$$

を示していた．(ここでも，$1/6,1/2$ は実素点，複素素点の個数が $(3,0),(1,1)$ であるものの族それぞれの寄与を表している．) 彼らの方針は，(i) まず 2 元 3 次形式の空間 $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}),\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2)$ の整軌道の解釈 (定理 3.7) を用いて 3 次環の数え上げを群作用における基本領域内の格子点を求める問題に置き換え，それを基本領域の体積で近似し，(ii) 次に極大な整環だけを取り出すための素数の篩を実行することである．この定理は Shintani [38] によって導入された $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}),\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2)$ に付随する (概均質ベクトル空間の) ゼータ関数を使って証明することができるため，Wright-Yukie [50] は，$\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^2$, $\wedge^2\mathbb{Z}^5\otimes\mathbb{Z}^4$ のゼータ関数を使って $n=4,5$ の場合の密度定理を証明するプログラムを提示し，Yukie [52] は $\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^2$ の場合のゼータ関数の極の主要部を決定していた．

これに関して，Bhargava [8, 9] は $\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^3\otimes\mathbb{Z}^2$, $\wedge^2\mathbb{Z}^5\otimes\mathbb{Z}^4$ の空間を用いて

$$\lim_{X\to\infty}\frac{N_4(\mathfrak{S}_4;X)}{X}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^4}\right),$$
$$\lim_{X\to\infty}\frac{N_5(\mathfrak{S}_5;X)}{X}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\right)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^4}-\frac{1}{p^5}\right)$$

を示した．ここに p はすべての素数をわたる．その証明の方針は，ゼータ関数を使うものではなく，もともとの Davenport-Heilbronn [20] で用いられた幾何学的な方法を発展させたものである．より複雑な空間を扱う必要があるための技法の開発によりこれらの結果が導かれている．特に，$\mathfrak{S}_5$ のように非可解な群に対してこのような密度定理が示されたのは初めてのことで意義深い．また，Bhargava [11] はこれらの結果をもとに，c_n の公式

$$\lim_{X\to\infty}\frac{N_n(\mathfrak{S}_n;X)}{X}\stackrel{?}{=}\sum_{[K_\infty:\mathbb{R}]=n}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|\mathrm{Aut}\,K_\infty|}\prod_p\left(\sum_{[K_p:\mathbb{Q}_p]=n}\frac{p-1}{p}\cdot\frac{1}{|\mathrm{Aut}\,K_p|}\frac{1}{|\mathrm{Disc}K_p|}\right)$$

を予想している．ただし，K_∞, K_p はそれぞれ $\mathbb{R},\mathbb{Q}_p$ の n 次分離代数全体を渡り，$|\mathrm{Aut}\,K_p|$ は K_p の $\mathbb{Q}_p$ 代数としての自己同型群の位数を，また $|\mathrm{Disc}K_p|$ は K_p の判別式を割り切る p の最高冪を表す．この定数は，統計学的に明快な解釈をもつ．各 Euler 因子内の和における K_∞, K_p の寄与は，$\mathbb{Q}$ の S_n 拡大 K が素点 ∞,p においてその分解をとる割合を示しており，また，$1/2,(p-1)/p$ は，ランダムな整数が正負の値をとる確率，p で割り切れない値をとる確率をそれぞれ表している．これらは，$1\le n\le 5$ のときは上述の結果と一致する．

なお，一般に $G \subset \mathfrak{S}_n$ を推移的な部分群としたときに，同様に定義される

$$N_n(G;X) := \#\left\{ F \;\middle|\; \begin{array}{l} [F:\mathbb{Q}]=n,\ |\mathrm{Disc}(F)|<X, \\ \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nc}}/\mathbb{Q}) \text{ の } \{F \text{ の } \overline{\mathbb{Q}} \text{ への埋め込み}\} \text{ への作用が } G \text{ と同型} \end{array} \right\}$$

のオーダーに関して Malle [29] による予想があり，G がアーベル群の場合（Wright [48]）など幾つかの場合に正しいことが示されている．この予想に関しては，$G = \mathfrak{S}_n$ の場合上述の c_n の結果や予想は，$\mathfrak{S}_n$-n 次拡大を判別式で並べることが“自然”であることを示唆するが，アーベル拡大の場合は判別式よりも導手で並べる方が自然である可能性を指摘する結果が最近 Wood [47] により得られており，代数体をどのような順序で並べることが最も自然であるかは議論の余地がある．

この他，Davenport-Heilbronn [20] は $\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2$ の空間を用いて，2 次体のイデアル類群の 3-torsion 部分群の平均位数が，実 2 次体については 3/2，虚 2 次体については 2 であることを示していた．Bhargava [8] は $\mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^2$ の空間を用いて，3 次体のイデアル類群の 2-torsion 部分群の平均位数が，総実 3 次体については 5/4，虚な 3 次体については 3/2 であることを示している．これは “Cohen-Lenstra の heuristic” (の Cohen-Martinet [18] による拡張) を支持する結果である．

注 10.1. “Cohen-Lenstra の heuristic” とは，代数体のイデアル類群には，適当な意味でランダムに有限アーベル群が現れることを定量的に推測したものである．これが正しければ例えば，$\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ (p は 4 で割って 1 余る素数) の中では類数 1 であるものの密度が約 75.446%になるなど，非常に強い主張を含むかなり一般的な推測である．約 20 年余り，Davenport-Heilbronn [20] の結果と Datskovsky-Wright [19] によるその代数体上への一般化，および比較的簡単ないくつかの数値例の他にはこの推測を検証する結果はあまり増えていなかったが，ここ数年で，関数体の場合はある程度系統的に成立することが示され (例えば Ellenberg-Venkatesh [22])，また Bhargava [8] の場合や，後述する Bhargava-Shankar による楕円曲線の 2,3,4,5-Selmer 群の平均位数の定理など，関連する成果がいくつも証明され始めたため，この推測への注目が高まっている．上記の Bhargava による c_n の予想も，やや大胆な予想と言うこともできるが，この推測の類似と考えうるものであろう．なお，heuristic は「発見的説明」などと訳される単語で，数学では “今のところ数学的証明にはなっていないが，類似・状況証拠・研究者の直観的理解などをもとに説得力をもつ，説明・議論・推測” のような意味で用いられる．

これら密度定理に関しては，誤差項の評価は問題それ自身としても，また応用の観点からも重要である．これは Belabas-Bhargava-Pomerance [2] により突破口が開かれ，[2] では $N_3(\mathfrak{S}_3;X)$ に関して誤差項 $O(X^{7/8+\epsilon})$ が，また $N_4(\mathfrak{S}_4;X)$ に関して誤差項 $O(X^{23/24+\epsilon})$ が得られ，現在いろいろと研究が進んでいる．3 次体の場合は，$N_3^{\pm}(\mathfrak{S}_3;X)$ で正負それぞれに分けて 3 次体の判別式を数える関数を表すと，第 2 の主要項の存在

$$N_3^{\pm}(\mathfrak{S}_3;X) = \frac{C^{\pm}}{12\zeta(3)}X + K^{\pm}\frac{4\zeta(1/3)}{5\Gamma(2/3)^3\zeta(5/3)}X^{5/6} + o(X^{5/6})$$

が予想されていた．ただし $C^+ = K^+ = 1, C^- = 3, K^- = \sqrt{3}$ とした．これは最近，Bhargava-Shankar-Tsimerman [16], Taniguchi-Thorne [42] により独立に解決された．前者 [16] では上述の幾何学的な方法の改良により誤差項 $O(X^{13/16+\epsilon})$ が，後者 [42] は概均質ベクトル空間のゼータ関数を用いる解析的な方法で誤差項 $O(X^{7/9+\epsilon})$ が得られている．後者の方法では，2 次体のイデアル類群の 3-torsion 部分群の平均位数についても，第 2 の主要項を含んだ

$$\sum_{\substack{[F:\mathbb{Q}]=2 \\ 0<\pm\mathrm{Disc}(F)<X}} \#\mathrm{Cl}_3(F) = \frac{3+C^\pm}{\pi^2}X + K^\pm \frac{8\zeta(1/3)}{5\Gamma(2/3)^3}\prod_p\left(1-\frac{p^{1/3}+1}{p(p+1)}\right)X^{5/6} + O(X^{\frac{18}{23}+\epsilon})$$

が得られている．$N_4(\mathfrak{S}_4; X)$ や，3 次体のイデアル類群の 2-torsion 部分群の平均位数に関しても，Yukie [52] のゼータ関数の結果を用いて結果を改良できる可能性がある．

また，Bhargava-Ghate [12] は，$\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^2$ の結果を，八面体型の新形式 (octahedral newform) を数える問題に応用した．重み 1 の正則尖点的な新形式 f は，付随する Galois 表現 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ の像が $A_4, \mathfrak{S}_4, A_5$ となるとき ($A_n \subset \mathfrak{S}_n$ は n 次の交代群を表す) それぞれ四面体型 (tetrahedral)，八面体型 (octahedral)，二十面体型 (icosahedral) であるといわれ，これらはまとめてエキゾチック (exotic) な保型形式と呼ばれている．任意の $\epsilon > 0$ に対し，レベルが素数 p であるエキゾチックな新形式の個数は $O(p^\epsilon)$ で抑えられるであろうという予想がある．これに対し，Bhargava-Ghate [12] は

$$\#\{\text{octahedral な尖点的新形式 } f \text{ で，そのレベルが } X \text{ 未満の素数}\} = O\left(\frac{X}{\log X}\right)$$

を示した．X 未満の素数の個数は $O(X/\log X)$ だから，この式は上記の予想が平均値としては成立していることを示している．証明の方針は，Artin 予想 (この場合は Langlands-Tunnell の定理) を用いて Galois 表現を数える問題に書き直し，その後 4 次体の判別式と Galois 表現の導手を比較するというものである．

§ 10.2. 例外群の保型形式論・類体論とゼータ関数

密度定理以外の基本的な応用に，例外群の保型形式論への寄与が考えられる．これは G_2 上の保型形式の Fourier 係数についての研究 Gan-Gross-Savin [23] がよい例である．2 元 3 次形式の空間は，$E = G_2$ とその Heisenberg 放物型部分群 $P = GU$ から得られる $(G, V) = (G, U^{\mathrm{ab}})$ であったことを思い出しておこう．Gan-Gross-Savin は $G_2(\mathbb{Z})$ 上の四元数的保型形式 f で重みが偶数のものに対し，添字集合を $\{x \in G_\mathbb{Z}\backslash V_\mathbb{Z} \mid P(x) > 0\}$ にもつ “Fourier 係数”$\{c_x(f)\}_x$ を定義した．定理 3.7 によれば，これは判別式が正の 3 次環 A を添字集合とする $\{c_R(f)\}_{R\in\mathcal{A}_3, D(R)>0}$ に他ならない．このように軌道に代数的な解釈があるとき，Fourier 係数の整数論的意味をそれを通して取り出せる可能性がある．例えば，f が重み $2k$ の Eisenstein 級数 E_{2k} の場合，極大な 3 次環 R に対しては $c_R(E_{2k})$ が 0 でない有理数 $\zeta_R(1-2k)$ となる．詳細は [23] を参照されたい．

また，高次合成則は類体論と結びつくことがある．$\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2$ の軌道は 3 次環を分類し，また $\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2$ の軌道は 2 次環のイデアル類群の 3-torsion と強く関係していた．$\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2$

と $\mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ の互いに双対的な表現だが，これら代数的対象は類体論によって繋がっている．このことの最もシンプルな記述は，概均質ベクトル空間のゼータ関数を用いて表されるもので，Shintani [38] によって導入されたゼータ関数

$$\xi_{\pm}(s) = \sum_{\substack{x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^2 \\ \pm P(x)>0}} \frac{|\mathrm{Stab}(x)|^{-1}}{|P(x)|^s}, \qquad \xi^*_{\pm}(s) = \sum_{\substack{x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{Sym}_3\mathbb{Z}^2 \\ \pm P(x)>0}} \frac{|\mathrm{Stab}(x)|^{-1}}{|P(x)|^s}$$

の間に

$$\xi^*_{+}(s) = 3\xi_{+}(s), \qquad \xi^*_{-}(s) = \xi_{-}(s)$$

という関係式があるという形に述べられる．これはゼータ関数の係数表をもとに Ohno [31] によって予想され，Nakagawa [30] によって実際に類体論を用いて証明された．これと同様な関係式が $\mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^2, \mathrm{Sym}_2\mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^2$ のゼータ関数の間にも存在すると考えられており，Nakagawa による部分的な結果がある．

概均質ベクトル空間のゼータ関数 [35] についてはほとんど触れることができなかったが，これは表現の多くの情報を内包している関数だと考えられる．密度定理以外にも，保型形式の次元公式への応用 (Shintani [39], Ibukiyama-Saito [25, 26]) が知られており，ゼータ関数には多変数の場合 (F. Sato [33]) も含め様々な応用の可能性が秘められていると思われる．

§ 10.3.　一般化

最後に一般化についていくつか簡単に触れておく．まず，高次合成則の理論を，$\mathbb{Z}$ 上から一般の環上 (あるいはより一般にスキーム上) に拡張することは基本的な問題だが，これは多くの場合に実行可能なようで，研究が進められている．例えば Wood [46], [45] を参照されたい．一方で，概均質ベクトル空間には分類があるので，6 次以上の拡大を線形表現によって分類することは不可能であり，それを理解する問題は，かなり大きな課題として我々の前にある．一般の代数多様体上の群作用でよければ様々な可能性があり，いくつか試みもなされているようだが，今のところ決定的な進展はないようである．

一方，前節で触れた余正則空間の研究は Bhargava, Ho, Shankar などにより非常に大きな進展を見せている．前節で解説した，“種数 1 曲線の高次合成則” の基礎理論は，体上においてかなり完成に近づいているようである．また，整軌道の数え上げを概均質ベクトル空間でない場合に実行することは長年の懸案であったが，Bhargava-Shankar [14, 15] は余正則空間 $\mathrm{Sym}^4\mathbb{Z}^2$, $\mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^3$ に於いて整軌道を数え上げることに成功した．これは 9 節で触れた $(\mathbb{Z}^2)^{\otimes 4}$, $(\mathbb{Z}^3)^{\otimes 3}$ の対称化で得られる余正則空間であることに注意されたい．この有理軌道はそれぞれ楕円曲線の 2-Selmer 群, 3-Selmer 群を分類する．Bhargava-Shankar [14, 15] はそれぞれの論文において，整軌道の数え上げを有理軌道の数え上げに移行する篩の方法も発展させ，$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E を高さ (height) の順序で並べたとき，2-Selmer 群 $S_2(E)$ の平均位数が 3 であること，また 3-Selmer 群 $S_3(E)$ の平均位数が 4 以下であることを示した．前者からは楕円曲線の階数の平均が 3/2 以下であることが，後者から

は (より強く)7/6 以下であることが直ちにしたがう．古くから，50%の密度の楕円曲線が階数 0 であり，また 50%の密度の楕円曲線が階数 1 であること（したがって階数の平均は 1/2 であること）が予想されていたが，以前は平均が有限であることも証明されていなかったので，非常に大きな進展と言えるだろう．本稿の目的から離れるので詳細は述べないが，[14] の序文には丁寧な解説があるので，興味のある方はぜひ参照されたい．また，最近の研究集会[13] で，Bhargava-Shankar は数え上げの手法を上記 2 つを含む

$$\mathrm{Sym}^4\mathbb{Z}^2, \quad \mathrm{Sym}^3\mathbb{Z}^3, \quad \mathrm{Sym}^2\mathbb{Z}^4 \otimes \mathbb{Z}^2, \quad \wedge^2\mathbb{Z}^5 \otimes \mathbb{Z}^5$$

に展開し，$S_2(E), S_3(E), S_4(E), S_5(E)$ の平均位数がそれぞれ $3, 4, 7, 6$ であることを証明したとアナウンスした．これらは再び，Cohen-Lenstra の heuristic の一般化—それによれば $S_n(E)$ の平均位数は n の約数和になる—に沿う結果である．整軌道の数え上げから有理軌道の数え上げに移行する際の方法 “幾何学的な平方自由篩 (geometric square-free sieve)” が Bhargava により開発されたことが鍵となったようである．$S_5(E)$ の結果に，楕円曲線のルートナンバーと $\mathrm{rank}(S_p(E))$ の偶奇性の関連についての結果を組み合わせると，階数の平均が 1 未満 (約 0.99 程度) であることが系としてしたがう．

1960 年代，佐藤幹夫氏によって創始された概均質ベクトル空間の理論は，限定されたクラスが対象である一方，深く明示的な数学的結果を多数生み出してきた．高次合成則の観点からは，概均質ベクトル空間から余正則空間への接続は自然なようである．現在，ゼータ関数は概均質ベクトル空間にしか見いだされていないが，“ゼータ積分” だけなら，より広いクラスの表現に定義され，例えば Yukie [55] により $\mathrm{Sym}^n\mathbb{Q}^2$ の場合が考察されている．近い将来，余正則空間にもゼータ関数が付随していることが発見されるのであろうか．また，余正則空間からの更なる一般化も問題になるであろう．大いなる発展を期待したい．

謝辞. 有益なコメントを寄せていただいた勝良健史氏（慶応大），落合啓之氏（九州大），吉田輝義氏（Cambridge 大），三枝洋一氏（九州大）に深い感謝の意を表したい．

References

[1] K. Belabas. Paramétrisation de structures algébriques et densit’e de discriminants (d’après Bhargava). *Astérisque*, 299, 2005. Exp. No. 935, ix, 267-299.

[2] M Belabas, M. Bhargava, and C. Pomerance. Error estimates for the Davenport-Heilbronn theorems. *Duke. Math. J.*, 153:173–210, 2010.

[3] M. Bhargava. Higher composition laws I: A new view on Gauss composition, and quadratic generalizations. *Ann. Math.*, 159:217–250, 2004.

[4] M. Bhargava. Higher composition laws II: On cubic analogues of Gauss composition. *Ann. Math.*, 159:865–886, 2004.

[13] “First Abel Conference, A Mathematical Celebration of John Tate”, January 3-5, 2011, University of Minnesota.

[5] M. Bhargava. Higher composition laws III: The parametrization of quartic rings. *Ann. Math.*, 159:1329–1360, 2004.
[6] M. Bhargava. Higher composition laws IV: The parametrization of quintic rings. *Ann. Math.*, 167:53–94, 2008.
[7] M. Bhargava. Higher composition laws V: The parametrization of quaternionic and octornionic rings and modules. in preparation.
[8] M. Bhargava. The density of discriminants of quartic rings and fields. *Ann. Math.*, 162:1031–1063, 2005.
[9] M. Bhargava. The density of discriminants of quintic rings and fields. *Ann. Math.*, 172:1559–1591, 2010.
[10] M. Bhargava. Higher composition laws and applications. In *International Congress of Mathematicans*, volume II, pages 271–294, 2006.
[11] M. Bhargava. Mass formulae for local extensions and conjectures on the density of number field discriminants. *Int. Math. Res. Not.*, pages article ID rnm052, 20pages, 2007.
[12] M. Bhargava and E. Ghate. On the average number of octahedral newforms of prime level. *Math. Ann.*, 344:749–768, 2009.
[13] M. Bhargava and M. Satriano. On a notion of "Galois closure" for extensions of rings. preprint 2010, arXiv:1006.2562.
[14] M. Bhargava and A. Shankar. Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves. preprint 2010, arXiv:1006.1002.
[15] M. Bhargava and A. Shankar. Ternary cubic forms having bounded invariants, and the existence of a positive proportion of elliptic curves having rank 0. preprint 2010, arXiv:1007.0052.
[16] M. Bhargava, A. Shankar, and J. Tsimerman. On the Davenport-Heilbronn theorem and second order terms. preprint 2010, arXiv:1005.0672.
[17] N. Bourbaki. *Algèbre.* Éléments de mathématique. Hermann, Paris, 1958.
[18] H. Cohen and J. Martinet. Ètude heuristique des groupes de classes des corps de nombres. *J. Reine Angew. Math.*, 404:39–76, 1990.
[19] B. Datskovsky and D.J. Wright. Density of discriminants of cubic extensions. *J. Reine Angew. Math.*, 386:116–138, 1988.
[20] H. Davenport and H. Heilbronn. On the density of discriminants of cubic fields. II. *Proc. Royal Soc.*, A322,:405–420, 1971.
[21] B.N. Delone and Faddeev D.K. *The theory of irrationalities of the third degree*, volume 10 of *Translations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, Providence, 1964.
[22] J. Ellenberg, A. Venkatesh, and C. Westerland. Homological stability for Hurwitz spaces and the Cohen-Lenstra conjecture over function fields. preprint 2010, arXiv:0912.0325.
[23] W.T. Gan, B. Gross, and G. Savin. Fourier coefficients of modular forms on G_2. *Duke Math. J.*, 115:105–169, 2002.
[24] C.F. Gauss. *Disquisitiones arithmeticae.* Yale University Press, New Haven, London, 1966.
[25] T. Ibukiyama and H. Saito. On zeta functions associated to symmetric matrices and an explicit conjecture on dimensions ofsiegel modular forms of general degree. *Internat. Math. Res. Notices*, no. 8:161–169, 1992.
[26] T. Ibukiyama and H. Saito. On zeta functions associated to symmetric matrices I: An explicit form of zeta functions. *Amer. J. Math.*, 117:1097–1155, 1995.
[27] A.C. Kable and A. Yukie. Prehomogeneous vector spaces and field extensions II. *Invent.*

Math., 130:315–344, 1997.
[28] P. Littelmann. Koreguläre und äquidimensionale Darstellungen. *J. of Algebra.*, 123:193–222, 1989.
[29] G. Malle. On the distribution of Galois groups. *J. Number Theory*, 92:315–329, 2002.
[30] J. Nakagawa. On the relations among the class numbers of binary cubic forms. *Invent. Math.*, 134:101–138, 1998.
[31] Y. Ohno. A conjecture on coincidence among the zeta functions associated with the space of binary cubic forms. *Amer. J. Math.*, 119:1083–1094, 1997.
[32] H. Rubenthaler. Espaces préhomogènes de type parabolique. *Lect. Math. Kyoto Univ.*, 14:189–221, 1982.
[33] F. Sato. Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vetor spaces I: Functional equations. *Tôhoku Math. J.*, (2) 34 no. 3:437–483, 1982, II: A convergence criterion. *Tôhoku Math. J.*, (2) 35 no. 1:77–99, 1983, III: Eisenstein series for indefinite quadratic forms. *Ann. of Math.*, 116:177–212, 1982.
[34] M. Sato and T. Kimura. A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. *Nagoya Math. J.*, 65:1–155, 1977.
[35] M. Sato and T. Shintani. On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces. *Ann. of Math.*, 100:131–170, 1974.
[36] J.P. Serre. Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle. *Séminaire Dubreil-Pisot*, no.23, 1957/58.
[37] J.P. Serre. *Cohomologie galoisienne*, volume 5 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.
[38] T. Shintani. On Dirichlet series whose coefficients are class-numbers of integral binary cubic forms. *J. Math. Soc. Japan*, 24:132–188, 1972.
[39] T. Shintani. On zeta-functions associated with vector spaces of quadratic forms. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA*, 22:25–66, 1975.
[40] 高木貞治. 代数学講義，改訂新版. 共立出版, 1965.
[41] T. Taniguchi. On parameterizations of rational orbits of some forms of prehomogeneous vector spaces. 125-2:169–100, 2008. Manuscripta Math.
[42] T. Taniguchi and F. Thorne. Secondary terms in counting functions for cubic fields. preprint 2011, available from `http://math.kobe-u.ac.jp/~tani/`.
[43] B. Van der Waerden. *History of algebra.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1985.
[44] E.B. Vinberg. On the classification of the nilpotent elements of graded Lie algebras. *Soviet Math. Dokl.*, 16:1517–1520, 1975.
[45] M. Wood. Parametrizing quartic algebras over an arbitrary base. *Alg. and Num. Theory.* to appear, arXiv:1007.5503.
[46] M. Wood. *Moduli Spaces for Rings and Ideals.* Ph.D. thesis, Princeton University, 2009. available from `http://math.stanford.edu/~mwood/`.
[47] M. Wood. On the probabilities of local behaviors in abelian field extensions. *Compositio Math.*, 146:102–128, 2010.
[48] D.J. Wright. Distribution of discriminants of abelian extensions. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 58:17–50, 1989.
[49] D Witte, A. Yukie, and R. Zierau. Prehomogeneous vector spaces and ergodic theory II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352:1687–1708, 2000.
[50] D.J. Wright and A. Yukie. Prehomogeneous vector spaces and field extensions. *Invent. Math.*, 110:283–314, 1992.

[51] A. Yukie. Rational orbit decomposition of prehomogeneous vector spaces. available from `http://www.math.tohoku.ac.jp/~yukie`.

[52] A. Yukie. *Shintani Zeta Functions*, volume 183 of *London Math. Soc. Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[53] A. Yukie. Prehomogeneous vector spaces and ergodic theory I. *Duke Math. J.*, 90:123–148, 1997.

[54] A. Yukie. Prehomogeneous vector spaces and field extensions III. *J. Number Theory*, 67:115–137, 1997.

[55] A. Yukie. On Shintani zeta functions for GL(2). *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350:5067–5094, 1998.

[56] A. Yukie. Prehomogeneous vector spaces and ergodic theory III. *J. Number Theory*, 70:160–183, 1998.