RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B30 (2012), 137–143

差分ソリトン方程式の話題
Topics of discrete soliton equations

神戸大学・理学部数学科　太田 泰広 (Yasuhiro Ohta)
Department of Mathematics, Kobe University

There are various methods to discretize soliton equations. One of them is the way of constructing discrete equations satisfied by discrete analogues of the solutions for continuous equations. We briefly explain basic ideas and some topics of such discretization of soliton equations.

1　はじめに

通常、微分方程式の差分化は、数値解析の分野において微分方程式を近似するために行われることが多い。一方、可積分系の分野においては、差分化は可積分系自体を研究する目的で行われるのが普通である。目的意識の違い故に、構成される差分方程式は異なる特徴をもつことになる。本稿では、可積分系における差分化の方法のうち、解の構造を保存することを主導原理とする方法について、基本的な考え方を概説し、得られる差分方程式の特徴について触れる。また、ホドグラフ変換によって導出されるソリトン方程式の場合について、Camassa-Holm 方程式を例にとり、可積分な差分化によって差分格子点の運動方程式が得られることを解説する。

2　ソリトン方程式の差分化

数値シミュレーションをすることを目的として微分方程式を差分化する場合、差分スキームとその解が、元の微分方程式とその解のもつ性質を正しく受け継いでいることが重要である。どのような性質に注目するか、どのような現象を再現したいかによって、差分化のための様々な方法があり得るであろう。微分方程式とその解について、保存則とか解の特異性などの何らかの情報をあらかじめ知っていれば、それらの知識はより良い差分スキームを考える上で重要な指針になると考えられる。

ソリトン方程式のような可積分系の場合には、幸か不幸か、方程式や解について非常に多くの知見が得られている。保存量、対称性、Hamilton 形式、Lax 対、Bäcklund 変換、Painlevé 性、様々な特解など、差分化のための指針となる情報が多数知られており、これらの情報に基づいて差分化を行うことができることは、微分方程式の解を正しく記述する差分方程式を構成する上で有利である。その反面、これらの情報をたくさん使えば使うほど、その差分化の方法は可積分な場合に限定されたものとなるので、非可積分な微分方程式に対しては応用が利かなくなるであろう。そもそもソリトン方程式系は可積分であり解が求まってしまうので、それ自身を数値シミュレーションする必要はない。可積分系の分野における差分化の目的——離散可積分系を構成し、その構造や性質を研究すること——は、通常の差分スキームの研究における目的意識からは乖離したもののように思われる。

ここでは話を可積分系に限定し、どのような考え方に沿って差分化が行われるのかを概観し、通常の差分化との違いを観察しよう。ソリトン方程式の可積分性を保つような差分化にも様々な方法があるが、解の構造を保つような差分化はその一つ

である [1]。連続のソリトン方程式の特解をたくさん求めておいて、その特解の差分における類似物をすべて解としてもつような差分方程式を見つけ出せば、それが差分化されたソリトン方程式になる、という発想である。

2.1 1階差分のソリトン方程式

KdV 方程式

$$u_t = uu_x + u_{xxx}$$

の場合、$u = (12\log f)_{xx}$ とおくと、ソリトン解は 1-ソリトン、2-ソリトン、N-ソリトンの場合それぞれ

$$\begin{aligned}
f &= 1 + e^{\xi_1} \\
f &= 1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + c_{12}e^{\xi_1+\xi_2} \\
f &= 1 + \sum_{1\le i\le N} e^{\xi_i} + \sum_{1\le i<j\le N} c_{ij}e^{\xi_i+\xi_j} + \sum_{1\le i<j<k\le N} c_{ij}c_{ik}c_{jk}e^{\xi_i+\xi_j+\xi_k} \\
&\quad + \cdots + \Big(\prod_{1\le i<j\le N} c_{ij}\Big)e^{\xi_1+\cdots+\xi_N}
\end{aligned}$$

で与えられる。ここで、

$$\xi_i = p_i x + p_i^3 t + \xi_i^{(0)} \qquad c_{ij} = \Big(\frac{p_i - p_j}{p_i + p_j}\Big)^2$$

であり、p_i、$\xi_i^{(0)}$ は任意定数である。このソリトン解の離散類似を考えよう。指数関数 $F(x) = e^{px}$ は微分方程式

$$\partial_x F(x) = pF(x) \qquad F(0) = 1$$

によって特徴づけられるから、その離散類似は前進差分、後退差分、中心差分のそれぞれに対して、

$$\begin{aligned}
F_k &= (1+pa)^k & \frac{F_{k+1}-F_k}{a} &= pF_k \\
F_k &= (1-pa)^{-k} & \frac{F_k-F_{k-1}}{a} &= pF_k \\
F_k &= \Big(\frac{1+pa/2}{1-pa/2}\Big)^{k/2} & \frac{F_{k+1}-F_{k-1}}{a} &= p\frac{F_{k+1}+F_k}{2}
\end{aligned}$$

でいいだろう。ここで、a は差分間隔である。KdV 方程式のソリトン解の中の指数関数 e^{ξ_i} を上の離散類似で置き換えて得られる関数のすべてを、解とするような差分方程式があれば、それを離散 KdV 方程式と呼んでいいだろう。前進差分の場合には、x、t の差分化を k、l と書き、それらの差分間隔を a、b とすれば、$e^{\xi_i} = e^{p_i x + p_i^3 t + \xi_i^{(0)}}$ を $(1+p_i a)^k(1+p_i^3 b)^l e^{\xi_i^{(0)}}$ で置き換えればよさそうである。ところが、この置き換えによって構成される離散 KdV 方程式は非常に複雑なものになる。きれいな差分方程式を得るためには上手な置き換えを見つける必要がある。実際、e^{ξ_i} を

$$\varphi_i = \Big(\frac{1+p_i a/2}{1-p_i a/2}\Big)^{k/2}\Big(\frac{1+p_i b/2}{1-p_i b/2}\Big)^{l/2}\varphi_i^{(0)}$$

（$\varphi_i^{(0)}$ は定数）で置き換えれば、

$$f_{kl} = 1 + \sum_{1\le i\le N} \varphi_i + \sum_{1\le i<j\le N} c_{ij}\varphi_i\varphi_j + \sum_{1\le i<j<k\le N} c_{ij}c_{ik}c_{jk}\varphi_i\varphi_j\varphi_k + \cdots + \Big(\prod_{1\le i<j\le N} c_{ij}\Big)\varphi_1\cdots\varphi_N$$

となって、

$$u_{kl} = \frac{f_{k+1,l+1}f_{k-1,l-1}}{f_{k-1,l+1}f_{k+1,l-1}} - 1$$

のみたす方程式として、離散 KdV 方程式

$$\frac{a-b}{a+b}(u_{k+1,l+1} - u_{k-1,l-1}) = \frac{1}{1+u_{k-1,l+1}} - \frac{1}{1+u_{k+1,l-1}}$$

が得られる [1]。

ここで特徴的なのは、元の KdV 方程式が 3 階の微分方程式であるのに対して、差分化して得られる離散 KdV 方程式は（k、l のどちらについても）1 階の差分方程式になる点である。これはもちろん、ソリトン解の分散関係に起因している。連続系の解においては指数関数の中が $p_i x + p_i^3 t$ であるので、∂_t と ∂_x^3 がバランスするが、離散系の場合には上記の φ_i の形から、k の 1 階差分と l の 1 階差分がバランスすることがわかる。多くのソリトン方程式の差分化において、適度に簡単できれいな差分方程式を得ようとすると、同様の置き換えをすることになり、得られる差分ソリトン方程式は大抵の場合、本質的に 1 階の差分方程式になる[1]。連続極限 $a, b \to 0$ を考えると、

$$\Big(\frac{1+pa/2}{1-pa/2}\Big)^{k/2} = \exp\Big(\frac{k}{2}\log\frac{1+pa/2}{1-pa/2}\Big) = \exp\Big(k\Big(\frac{pa}{2} + \frac{1}{3}(\frac{pa}{2})^3 + \frac{1}{5}(\frac{pa}{2})^5 + \cdots\Big)\Big)$$

より

$$\Big(\frac{1+pa/2}{1-pa/2}\Big)^{k/2}\Big(\frac{1+pb/2}{1-pb/2}\Big)^{l/2} = \exp\Big(p\frac{ka+lb}{2} + p^3\frac{ka^3+lb^3}{3\cdot 2^3} + \cdots\Big)$$

となるので、$ka + lb$ と $ka^3 + lb^3$ が同じオーダーになる領域で、KdV 方程式の解の挙動が観察されることがわかる。この領域では、離散 KdV 方程式の両辺に現れる低次の微少量 u_x がキャンセルし、高次のオーダーから 3 階微分の項 u_{xxx} が復元される。すなわち、低次で桁落ちが起きることによって初めて、高次のオーダーに KdV 方程式が現れるのである。これは通常の感覚では、差分スキームとしては受け入れ難い。（厳密解がわかっていて、極限で KdV 方程式とその解を再現して、数値計算で安定なスキームになっていたとしても、それでもなお受け入れ難いであろう。KdV 方程式に摂動が入って非可積分になったときに、この差分方程式に摂動効果を入れた差分スキームによって精度良く数値計算できるかどうかはよくわからない。）高階微分を高階差分で近似せずに、桁落ちが起きることを前提に低階差分（1 階差分）で近似する、というのがここでの差分ソリトン方程式の特徴の一つである。[2]

[1]高階差分の項を含むような離散 KdV 方程式も構成されていて [2]、重要な発展性のある理論的拡張の一つになっているが、テクニカルになるのでここでは立ち入らない。

[2]そもそもソリトン方程式における可積分な差分化とは、差分スキームの構成のことではなく、ソリトン方程式の階層を生成する generator の構成のことである。

2.2　2 階差分のソリトン方程式

非線形 Schrödinger 方程式

$$iu_t = u_{xx} + 2|u|^2 u$$

の場合、$u = g/f$ とおくとソリトン解は 1-ソリトン、2-ソリトン、N-ソリトンの場合それぞれ

$$f = 1 + c_{1;1} e^{\xi_1 + \xi_1^*} \qquad g = e^{\xi_1}$$

$$f = 1 + c_{1;1} e^{\xi_1 + \xi_1^*} + c_{1;2} e^{\xi_1 + \xi_2^*} + c_{2;1} e^{\xi_2 + \xi_1^*} + c_{2;2} e^{\xi_2 + \xi_2^*} + c_{12;12} e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_1^* + \xi_2^*}$$

$$g = e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + c_{12;1} e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_1^*} + c_{12;2} e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_2^*}$$

$$\begin{aligned} f = 1 &+ \sum_{1 \le i \le N} \sum_{1 \le j \le N} c_{i;j} e^{\xi_i + \xi_j^*} + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le N} \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le N} c_{i_1 i_2; j_1 j_2} e^{\xi_{i_1} + \xi_{i_2} + \xi_{j_1}^* + \xi_{j_2}^*} \\ &+ \cdots + c_{1 \cdots N; 1 \cdots N} e^{\xi_1 + \cdots + \xi_N + \xi_1^* + \cdots + \xi_N^*} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g = &\sum_{1 \le i \le N} e^{\xi_i} + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le N} \sum_{1 \le j \le N} c_{i_1 i_2; j} e^{\xi_{i_1} + \xi_{i_2} + \xi_j^*} + \cdots \\ &+ \sum_{1 \le j \le N} c_{1 \cdots N; 1 \cdots \widehat{j} \cdots N} e^{\xi_1 + \cdots + \xi_N + \xi_1^* + \cdots + \widehat{\xi_j^*} + \cdots + \xi_N^*} \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、* は複素共役を表し、

$$\xi_j = p_j x - i p_j^2 t + \xi_j^{(0)} \qquad c_{i_1 \cdots i_m; j_1 \cdots j_n} = \left(\frac{\prod_{1 \le k < l \le m} (p_{i_k} - p_{i_l}) \prod_{1 \le k < l \le n} (p_{j_k}^* - p_{j_l}^*)}{\prod_{k=1}^{m} \prod_{l=1}^{n} (p_{i_k} + p_{j_l}^*)} \right)^2$$

であり、p_j、$\xi_j^{(0)}$ は任意定数である。

非線形 Schrödinger 方程式の空間差分化として、Ablowitz-Ladik[3] による

$$i \partial_t u_k = u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} + |u_k|^2 (u_{k+1} + u_{k-1})$$

が有名である。ここで、2 階微分が自然な形で差分化されているのは、前進と後退の両方の 1 階差分を上手に組み合わせて 2 階差分を実現することに成功しているからである。この方程式のソリトン解 $u_k = g_k / f_k$ は上記の解において、指数関数 e^{ξ_j} を

$$p_j^k \exp\Big(-i(p_j - 2 + 1/p_j) t + \xi_j^{(0)} \Big)$$

で置き換え、係数 $c_{i_1 \cdots i_m; j_1 \cdots j_n}$ を

$$c_{i_1 \cdots i_n; j_1 \cdots j_n} = \left(\frac{\prod_{1 \le k < l \le n} (p_{i_k} - p_{i_l})(p_{j_k}^* - p_{j_l}^*)}{\prod_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{n} (p_{i_k} p_{j_l}^* - 1)} \right)^2 \prod_{l=1}^{n} p_{i_l} p_{j_l}^*$$

$$c_{i_1 \cdots i_{n+1}; j_1 \cdots j_n} = \left(\frac{\prod_{1 \le k < l \le n+1} (p_{i_k} - p_{i_l}) \prod_{1 \le k < l \le n} (p_{j_k}^* - p_{j_l}^*)}{\prod_{k=1}^{n+1} \prod_{l=1}^{n} (p_{i_k} p_{j_l}^* - 1)} \prod_{l=1}^{n} p_{j_l}^* \right)^2$$

で置き換えることによって得られる。1 階差分の組み合わせできれいな 2 階差分を実現しているので、置き換えがやや複雑であるが、解の構造が保たれていることに変わりはない。

この差分方程式はもともと、解の構造を保存するという原理に基づいて構成されたのではなく、他の差分化の方法によって導出されたものであるが [3]、可積分という強い要請によって、結果的に解の構造も保存されている。可積分差分の方法は、高階微分を含む微分方程式に対する（通常の感覚で受け入れやすい）差分スキームの構成を苦手としているが、この例のように、2 階微分までなら自然な差分方程式を作ることができる。

3 特異性のある解をもつソリトン方程式の差分化

Camassa-Holm 方程式

$$u_T - u_{TXX} = 2u_X u_{XX} + u u_{XXX} - 3uu_X - 2cu_X$$

(c は定数）には、ピーコン解と呼ばれる特異点（微分不可能な点）をもつ解が存在することが知られている。一般に、特異性をもつ解を安定高精度に計算できる差分スキームは応用上重要であろうから、この方程式をモデルケースとして、可積分な差分化が何を教えてくれるかを見てみよう。

従属変数 u および独立変数 X, T を

$$u = \Big(\log\frac{g}{h}\Big)_t \qquad X = \frac{1}{c}x + \log\frac{g}{h} \qquad T = t$$

と変数変換しよう。独立変数の変換に従属変数が絡んでおり、これはホドグラフ変換の一種になっている。このとき、Camassa-Holm 方程式は双線形形式

$$\begin{aligned}
&\Big(D_xD_t + cD_x + \frac{1}{c}D_t\Big)g\cdot h = 0\\
&(cD_x + 1)g\cdot h = f^2\\
&(D_xD_t - 1)f\cdot f = -gh
\end{aligned}$$

に変換される。ここで、D は広田微分であり、多項式 P と関数 $F(x,t)$、$G(x,t)$ に対して

$$P(D_x, D_t)F\cdot G = P(\partial_x - \partial_{x'}, \partial_t - \partial_{t'})F(x,t)G(x',t')\Big|_{x'=x,t'=t}$$

で定義される。実際、$r = gh/f^2$ とおけば上の 3 本の双線形方程式はそれぞれ

$$\begin{aligned}
&(\log gh)_{xt} + \Big(c\Big(\log\frac{g}{h}\Big)_x + 1\Big)\Big(\frac{1}{c}\Big(\log\frac{g}{h}\Big)_t + 1\Big) - 1 = 0\\
&c\Big(\log\frac{g}{h}\Big)_x + 1 = \frac{1}{r}\\
&(2\log f)_{xt} - 1 = -r
\end{aligned}$$

と書き換えられ、(第 1 式) − (第 3 式) と (第 2 式)$_t$ より

$$(\log r)_{xt} + \frac{1}{r}\Big(\frac{u}{c} + 1\Big) = r$$
$$cu_x = -\frac{r_t}{r^2}$$

が得られる。ここで、

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{c} + \Big(\log\frac{g}{h}\Big)_x = \frac{1}{cr} \qquad \frac{\partial X}{\partial t} = \Big(\log\frac{g}{h}\Big)_t = u$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = 1$$

に注意すれば、

$$((\log r)_t)_X + u + c = cr^2$$
$$u_X = -(\log r)_t$$

となり、r を消去すれば Camassa-Holm 方程式

$$(\partial_T + u\partial_X)\log(u - u_{XX} + c) = -2u_X$$

が得られる。

詳細は省略するが、双線形形式を用いてソリトン解（ピーコン解）を求め、その解の適切な離散類似を考えて、それらの離散類似を解としてもつ差分方程式を構成すれば、以下のような離散 Camassa-Holm 方程式が得られる [4]。

$$\Delta^2 u_k = \frac{1}{\delta_k} M\Big(\delta_k M u_k + c\delta_k \frac{c^2 - a^2/\delta_k^2}{c^2 - a^2/4}\Big)$$
$$\partial_t \delta_k = (1 - \delta_k^2/4)\delta_k \Delta u_k$$

ここで、Δ、M は

$$\Delta F_k = \frac{F_{k+1} - F_k}{\delta_k} \qquad MF_k = \frac{F_{k+1} + F_k}{2}$$

で定義される差分、和分作用素であり、δ_k は空間座標 X の差分間隔、a は x の差分間隔である。連続の Camassa-Holm 方程式においては、座標変換 $(x,t) \to (X,T)$ によって $\partial_X = cr\partial_x$ となって、空間座標が cr でスケールされている。これに相当して離散の場合においては、空間 x を等間隔 a で差分化したときに、X は不等間隔で差分化され、その間隔のスケールが差分間隔 δ_k で与えられる。k 番目の格子点の座標を X_k と書けば、$X_{k+1} - X_k = \delta_k$ である。δ_k は r の差分化 r_k と $a^2/\delta_k^2 - a^2/4 = (c^2 - a^2/4)r_{k+1}r_k$ で関係づけられており、連続極限 $a \to 0$ において $\delta_k \to 0$ かつ $a/\delta_k \to cr$ となる。

この差分化において特徴的なのは、各格子点が（解 u_k のデータを使って）時間的に動いていき、特異点をもつ解であっても安定高精度に計算できるように、格子点が自動的に適切な配置をとることである。時間発展は差分間隔 δ_k についての発展方程式によって支配され、解 u_k は（u についての時間発展方程式を差分化したにも拘わらず）空間差分だけの方程式から決まる。このことから示唆されるのは、この

種の特異性をもつ解を記述するためには、適切な座標を見つけることによって、発展方程式を格子点の運動方程式として捉え直すのが有効な場合がある、ということである。元の方程式を Euler 座標で書かれた発展方程式と見做して、それを適切な Lagrange 座標を用いて書き直し、解によって移流される粒子の運動方程式であると思い直す。それを差分化することで格子点の運動方程式を導いて、格子点の位置の時間発展と、Euler-Lagrange 対応の式から得られる幾何学的拘束条件とから解が決定される。このような原理に基づく差分化が、非可積分な方程式も含めてどのような方程式のクラスに対して適用可能で、どの程度有効に機能するかは未知数であるが、可積分なソリトン方程式の場合から読み取れる差分化の一つの方法である。

4 おわりに

ソリトン方程式の可積分性を保つ差分化について、私見も交えながら解説してきた。元の連続系（微分方程式）がもつ性質をできるだけ忠実に継承する離散系（差分方程式）が、良い差分化であるとすると、可積分な連続系を差分化したときは離散系も可積分であるべきだ、と期待するのは自然であろう。構造保存差分スキーム [5] の場合にも、微分方程式において注目する構造が、離散系でも再現することを要請する。可積分系の差分化の場合にはそれは、可積分であるという構造である。しかしながら、可積分性は非常に強い制約条件であり、その構造を忠実に保存しようとすると、差分化の方法としては自由度が少なく応用範囲も限定的になる。構造保存差分スキーム [5] を意識するとき、今後、差分ソリトン方程式の理論において以下のような問題が考えられると思われる。

· 構造の定式化 : Hamiltonian やシンプレクティック性などの構造が、離散系でどのように理論的に定式化されるべきかを、離散可積分系の場合に明らかにする。

· 特徴の抽出 : 離散可積分系を差分スキームと見たとき、どのような特徴をもっているかを読み取り、その特徴づけに基づく差分化の方法を開発する。

· 可積分性の一部放棄 : 可積分性の一部を犠牲にすることによって回復する自由度を利用して、差分方程式のクラスを広げ、差分スキームとしての汎用性を上げる。

References

[1] 広田良吾, 直接法によるソリトンの数理 (岩波書店).

[2] S. Tsujimoto and R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn. **65** (1996) 2797.

[3] M. J. Ablowitz and J. F. Ladik, J. Math. Phys. **16** (1975) 598.

[4] Y. Ohta, K. Maruno and B.-F. Feng, J. Phys. A **41** (2008) 355205.

[5] 松尾宇泰, 本講究録中の論文.