*RIMS Kôkyûroku Bessatsu*
**B32** (2012), 83–104

# 総実代数体の非可換岩澤主予想について
# (On non-commutative Iwasawa main conjectures for totally real number fields)

By

原　　隆 (Takashi HARA)*

### 概要

バーンズ-加藤に依る貼り合わせの議論を用いた総実代数体の非可換岩澤主予想の証明方法についての概説記事．特に 1 次元 $p$-進リー拡大の場合に本質的となる $p$-進ゼータ関数の帰納的構成について解説する．尚，本稿は日本語の記事である．

### Abstract

This is a survey article on the proof of the non-commutative IWASAWA main conjecture for totally real number fields by applying "patching arguments" of David BURNS and Kazuya KATO. We especially explain the *inductive construction* of the $p$-adic zeta functions, which is an essential technique in cases of one-dimensional $p$-adic Lie extensions. This article is written in Japanese.

本稿は 2010 年 12 月 6 日 – 12 月 10 日 に京都大学数理解析研究所 (RIMS) にて開催された研究集会『代数的整数論とその周辺』に於ける著者の講演

総実代数体の非可換岩澤主予想について
On non-commutative Iwasawa main conjecture of totally real fields

の報告書である (執筆の際に英文タイトルを 若干 変更しました)．先人達の長年の試行錯誤の末に 2000 年前半になって 漸 く満足のゆく定式化がなされた **非可換岩澤主予想** *non-commutative* IWASAWA *main conjecture* は，2010 年に **ユルゲン・リッター** *Jürgen* RITTER

Received April 11, 2011. Revised August 14, 2011.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11R23, 11R80, 19F99.
*Key Words*: Non-commutative Iwasawa main conjecture for totally real fields, Burns and Kato's patching arguments, algebraic $K$-theory, Deligne and Ribet's $q$-expansion principle, inductive construction of non-commutative $p$-adic zeta functions.
日本学術振興会 特別研究員 DC2, 課題番号: 21・7079 (Research Fellow of Japan Society for Promotion of Science (DC2, 21・7079))
*東京大学大学院 数理科学研究科 (Graduate School of Mathematial Sciences, the University of Tokyo, Japan)
e-mail: thara@ms.u-tokyo.ac.jp

と **アルフレッド・ヴァイス** *Alfred* Weiss の共同研究 [RW3] 並びに **マヘシュ・カクデ** *Mahesh* Kakde [Kakde2] に依って**総実代数体の場合**に独立に証明された．非可換岩澤主予想の中でも総実代数体の場合は最も単純かつ基本的なケースであり，近い将来に証明されるであろうと言う雰囲気は其処彼処に漂っていた (ように思われる) が，そうは言っても定式化からほんの 10 年も経たぬうちに主予想が解決されてしまったことは誠にもって驚嘆すべき事態であると言わざるを得まい．本研究集会の僅か 2 年前に開催された『代数的整数論とその周辺』[1] で著者が講演させていただいた頃 (この頃はちょうど著者が非可換岩澤理論に参入し始めた時期でもある) には，まだ著者を含めた誰もが比較的単純な形の非可換拡大の場合に主予想が成り立つことを具体的に確認していたような段階だったことを鑑みても，整数論先端分野の発展の日進月歩ぶりというものが改めて痛切に実感せしめられよう．

本稿の目的は，一見すると複雑かつ難解であり敬遠されがちな総実代数体の非可換岩澤主予想の証明手順を，繁雑な計算の部分を一切削ぎ落としてなるべく平易に解説することである．特に 1 次元 $p$-進リー拡大の主予想の証明に於いて重要な技術である **$p$-進ゼータ関数の帰納的構成** *inductive construction of the p-adic zeta functions* について，主に著者の論文で扱ったケース [H2] を題材として解説したい.[2]

**目次**



---

[1] 2008 年 12 月 8 日–12 月 12 日開催．この時の講演内容の報告記事は [原 2] として既に出版されている．

[2] 総実代数体の非可換岩澤主予想の証明に於いて著者が貢献した部分があるとすれば，それは恐らくこの $p$-進ゼータ関数の帰納的構成であろうと思われるからである．

## §1. 総実代数体の非可換岩澤主予想

本節では総実代数体に於ける非可換岩澤主予想を ジョン・コーツ John COATES 等の方法 [CFKSV] に倣って定式化する．コーツ等の定式化が確立するに至るまでの思想的，歴史的背景については [原 2] にかなり詳しく纏めた (つもりである) ので，ここでは本稿第 2 節以降で必要となる最低限の概念の導入程度に留める．必要に応じて [原 2, Section 1] を参照されたい．また，日本語で書かれたより噛み砕いた解説記事として (若干誤植が多いが) [原 1] を挙げておく．

### §1.1. 設定及び定式化

以下，$p$ は奇素数を表すものとする．

$F$ を総実代数体とし，$F_\infty/F$ を総実な $p$-進リー拡大[3] で $F$ の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 $F_{\mathrm{cyc}}/F$ を含むものとする．また，$F_\infty$ で分岐する $F$ の素イデアルは有限個であるとし，それらを全て含む $F$ の素イデアルの有限集合 $\Sigma$ を固定しておく．

$$G = \mathrm{Gal}(F_\infty/F), \qquad H = \mathrm{Gal}(F_\infty/F_{\mathrm{cyc}}),$$
$$\Gamma = \mathrm{Gal}(F_{\mathrm{cyc}}/F) \cong \mathbb{Z}_p$$

とおく．このとき定義から群の完全系列

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

を得るが，$\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$ が (位相的) **自由アーベル群**であることからこの完全系列は **分裂** *split* する，即ち切断 $\tau\colon \Gamma \to G$ が存在して $G$ を **半直積** *semi-direct product*

$$G \cong H \rtimes_\tau \Gamma$$

の形で表示出来ることに注意しよう．

さらに簡単のため **岩澤の** $\mu = 0$ **予想** IWASAWA*'s* $\mu = 0$ *conjecture* が成り立つ，即ち 任意の代数体 $k$ に対して条件

$(*)_k$ 　$k$ の円分的 $\mathbb{Z}_p$-拡大 $k_{\mathrm{cyc}}/k$ に対する $\mu$-不変量は 0 である

が成り立つと仮定しよう．

注意 1. 実際には岩澤の $\mu = 0$ 予想より若干弱い仮定で十分である; [H1, Section 1.2] 及び [H2, Section 1] を参照．尚，有理数体の有限次**アーベル**拡大 $k$ に対しては条件 $(*)_k$ が成り立つことが知られている (フェレーロ-ワシントンの定理 [FW]). ♦

[3] 即ち総実な代数拡大 $F_\infty/F$ で，ガロワ群 $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ が $p$-進リー群となるようなもの．ここでは主に **非可換拡大** を想定している．

一般に副有限群 $P$ に対しその $\mathbb{Z}_p$ 上の完備群環 (岩澤代数) を

$$\Lambda(P) = \mathbb{Z}_p[[P]] = \varprojlim_{W \lhd P\colon \mathrm{open}} \mathbb{Z}_p[P/W]$$

で表すこととする．このとき $G = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ に対し $\Lambda(G)$ の部分集合

$$S = \{ f \in \Lambda(G) \mid \Lambda(G)/\Lambda(G)f \text{ は左 } \Lambda(H)\text{-加群として有限生成 } \}$$

は乗法的閉集合であり，さらに零因子を含まない左右オーレ集合 (左右分母集合) となる (**標準オーレ集合** *canonical* Ore *set* と呼ばれる．詳細は [CFKSV, Theorem 2.4] 参照)．さて，代数的 $K$-理論の局所化完全系列の理論 [WY, BK] を $\Lambda(G)$ の標準オーレ集合 $S$ に依(よ)る局所化 (標準オーレ局所化) $\Lambda(G) \to \Lambda(G)_S$ に対して適用することで，アーベル群の完全系列

$$K_1(\Lambda(G)) \to K_1(\Lambda(G)_S) \xrightarrow{\partial} K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S) \to 0$$

が得られる (連結準同型 $\partial$ の全射性は [CFKSV, Proposition 3.4] で証明されている)．このとき，$\mu = 0$ 型の条件 (注意 1 参照) の下で複体

$$C_{F_\infty/F} = R\mathrm{Hom}(R\Gamma_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{F_\infty}[1/\Sigma], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

は相対グロタンディーク群 $K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S)$ の元 $[C_{F_\infty/F}]$ を定める.[4]

次に拡大 $F_\infty/F$ に付随する $p$-進ゼータ関数について考察しよう．以下では $\mathbb{Q}$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の複素数体 $\mathbb{C}$ 及び $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ への埋め込みを固定して考える．また，$\kappa\colon \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F) \to \mathbb{Z}_p^\times$ を $p$-進円分指標とする．さて，$G$ のアルティン表現 (即(すなわ)ち像が有限となる表現) $\rho\colon G \to GL_d(\overline{\mathbb{Q}})$ 及び $p-1$ で割り切れる自然数 $r$ が与えられたとき，$K_1(\Lambda(G)_S)$ の元に対する **値写像** *evaluation map*

$$\mathrm{ev}_{\rho\kappa^r}\colon K_1(\Lambda(G)_S) \to \overline{\mathbb{Q}}_p \cup \{\infty\}\ ;\ f \ \mapsto\ f(\rho\kappa^r) \tag{1.1}$$

が構成出来(でき)ることが知られている (詳細は [CFKSV, p.p. 172–173] または [原 2, Section 1.3] を参照)．このとき $K_1(\Lambda(G)_S)$ の元 $\xi_{F_\infty/F} (= \xi_{F_\infty/F,\Sigma})$ が **補間性質** *interpolation property*

> 任意のアルティン表現 $\rho\colon G \to GL_d(\overline{\mathbb{Q}})$ 及び $p-1$ で割り切れる自然数 $r$ に対して等式
>
> $$\xi_{F_\infty/F}(\rho\kappa^r) = L_\Sigma(1-r; F_\infty/F, \rho) \tag{1.2}$$
>
> が成り立つ;

[4] $\mu = 0$ 型の条件が必要となるのは $S$ が $p$-冪(べき)を含まないこと，即(すなわ)ち $\Lambda(G)_S$ の分母として $p$-冪(べき)が現れないことに由来する．詳細は例えば [原 2, 注意 3,4] 等を参照.

を持つとき，$\xi_{F_\infty/F}$ を $F_\infty/F$ **に付随する（非原始的）** $p$-**進ゼータ関数** *the* (*non-primitive*) *$p$-adic zeta function associated to* $F_\infty/F$ と呼ぶ．但し $L_\Sigma(s; F_\infty/F, \rho)$ は，$\rho$ に付随する複素アルティン $L$-関数から $\Sigma$ に属する素点での局所因子を取り除いたものとする.[5]

以上の準備の下で，総実代数体の非可換岩澤主予想は次のように定式化される;

**定理 1.1** ( 非可換岩澤主予想, [RW3, Kakde2])**.** $F_\infty/F$ を上記のような $p$-進リー拡大とするとき，($\mu = 0$ 型の条件の下で ) $F_\infty/F$ に付随する $p$-進ゼータ関数 $\xi_{F_\infty/F}$ が存在し，等式

$$\partial(\xi_{F_\infty/F}) = -[C_{F_\infty/F}] \tag{1.3}$$

が成り立つ. ◊

注意 2. 総実代数体の非可換岩澤主予想に関する結果について以下に纏めておこう;

- 加藤和也のハイセンベルク型拡大 Kazuya KATO's Galois extensions of HEISENBERG type [Kato] (2007 頃)

  $F_\infty/F$ のガロワ群 $G$ が $\mathbb{Z}_p$-係数ハイゼンベルク群

  $$\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times (\text{アーベル群})$$

  の適当な商となっている場合.

  デイヴィッド・バーンズに依る〈$p$-進ゼータ関数の貼り合わせ〉の議論を初めて実行に移して得られた極めて先駆的な結果.

- ユルゲン・リッター，アルフレッド・ヴァイス Jürgen RITTER, Alfred WEISS [RW1] (2007)

  $F_\infty/F$ が 1 次元総実副 $p$ $p$-進リー拡大で，$F_\infty/F'$ が 副 $p$ **アーベル**拡大となる様な $p$-次部分拡大 $F'/F$ が存在する場合 (加藤の結果 [Kato] とは異なる定式化，異なる証明法を用いている).

- マヘシュ・カクデ Mahesh KAKDE [Kakde1] (2008)

  $F_\infty/F$ のガロワ群 $G$ がアーベルな副 $p$ $p$-進リー群と $\Gamma$ との半直積に同型であって ( 即ち $H$ が副 $p$ かつアーベル)，さらに "特殊型" (OF SPECIAL TYPE) の条件を満たす場合 ("特殊型" の条件の詳細は [Kakde1] 参照).

[5] クリンゲン-ジーゲルの定理 [Klingen, Siegel] 及びブラウアーの誘導定理に拠り $L_\Sigma(s; F_\infty/F, \rho)$ の $s = 1-r$ での値は代数的なので，等式 (1.2) は既に固定した埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ の下で意味を持つことに注意.

- [H1] (2008)

  $p$ が 5 以上の奇素数で，$F_\infty/F$ のガロワ群が $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_p & \mathbb{F}_p & \mathbb{F}_p \\ 0 & 1 & \mathbb{F}_p & \mathbb{F}_p \\ 0 & 0 & 1 & \mathbb{F}_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \Gamma$ と同型となる場合.

- [H2] (2009)

  $F_\infty/F$ のガロワ群 $G$ が冪指数 $p$ の有限 $p$-群 $G^f$ と $\Gamma$ の直積と同型になる場合.

- リッター-ヴァイス Ritter-Weiss [RW3] (2010)

  $F_\infty/F$ が 1 次元総実 $p$-進リー拡大の場合.

- マヘシュ・カクデ Mahesh Kakde [Kakde2] (2010)

  $F_\infty/F$ が任意の階数の総実な $p$-進リー拡大の場合.

尚，デイヴィッド・バーンズは 2010 年に $p$-進ゼータ関数の《極限》をとる操作に依ってリッター-ヴァイスの結果 [RW3] から任意の階数の $p$-進リー拡大に対する主予想が導き出せることを示している [Burns]. ■

以下では定理 1.1 の証明の概要を，特に [H2] で用いられた技術を中心として解説する.

## §1.2.　1 次元副 $p$ $p$-進リー拡大への帰着

定理 1.1 の証明は，最初に $G$ が 1 次元副 $p$ $p$-進リー群 となる場合に帰着することによりなされる (この過程は デイヴィッド・バーンズ David Burns に依り立案され [Burns], マヘシュ・カクデの結果 [Kakde2] でも用いられている．また，ステップ 2 以降はリッター-ヴァイスの結果 [RW3] でも用いられている)．この過程は本報告書の主題ではないので，ここでは簡単に紹介するに留めよう;

ステップ 1, 1 次元 $p$-進リー群への帰着;

このステップは，$K_1(\Lambda(G))$ が $G$ の 1 次元 $p$-進リー群商 $G'$ に関する $K_1(\Lambda(G'))$ 達の射影極限と同型になること (深谷-加藤に依る岩澤代数のホワイトヘッド群の射影極限表示 [FK, Proposition 1.5.1]

$$K_1(\Lambda(G)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n K_1(\Lambda(G)/\mathrm{Jac}(\Lambda(G))^n)$$

を用いる) 及び簡単なダイアグラム・チェイシングから従う ([Kakde2, Theorem 21] 参照);

ステップ 2, $p$-超基本群への帰着;[6]

このステップは アンドレアス・ドレス Andreas W. M. Dress の誘導理論 ([Dress] 参照．エミール・アルティン Emil Artin や リチャード・ダゴベルト・ブラウアー Richard Dagobert Brauer に依る古典的な誘導表現の理論を圏論的，公理的に一般化した理論) の帰結である．尚，$\ell$-超基本群 ($\ell \neq p$) の場合は簡単な議論により主予想が正当化出来ることが分かっている ([Kakde2, Section 4.3] 参照);

ステップ 3, 副 $p$ 群への帰着;

議論の詳細は [Kakde2, Section 4.4] 参照．大雑把には，位数 $n$ (但し $p \nmid n$) の有限巡回群 $C$ の $\mathbb{Z}_p$ 上の群環は $\mathbb{Z}_p[C] \cong \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{X}(C)} \mathbb{Z}_p[\chi]$ と分解される (但し $\mathfrak{X}(C)$ は $C$ の指標群) ことから，$p$-超基本群 $C \rtimes P$ ($P$ は $p$-群) に関する岩澤主予想は “本質的に” 各指標成分毎に考察すれば良いということをこのステップは表している．

## §1.3. ノルム写像を用いた再定式化

以下 $G$ は *1* **次元 副** $p$ $p$-進リー群であると仮定し，さらに簡単のために $G = G^f \times \Gamma$ ($G^f$ は有限 $p$-群) と直積分解されると仮定しよう．このとき有限 $p$ 群 $W^f$ と $\Gamma$ との直積の形をした群 $W = W^f \times \Gamma$ に対して同一視 $\Lambda(W) \cong \Lambda(\Gamma)[W^f]$ が得られ，計算が若干見易くなる.[7] さらにこのとき標準オーレ局所化 $\Lambda(W)_S$ は局所化 $\Lambda(\Gamma)_{(p)}[W^f]$ と同一視される．

本小節では $p$-進ゼータ関数を特徴付けている補間性質 (1.2) を代数的 $K$-理論のノルム写像を用いて再定式化し，定理 1.1 の証明を純粋な線形代数の問題に帰着する．先ず $G$ の部分群の対の族

$$\mathfrak{F}_B = \{(U, V) \mid U = U^f \times \Gamma \, (U^f \text{ は } G^f \text{ の部分群}),\, V = [U, U]\}$$

に属する各元 $(U, V)$ に対して写像

$$\theta_{U,V} \colon K_1(\Lambda(G)) \xrightarrow{\text{ノルム}} K_1(\Lambda(U)) \to K_1(\Lambda(U/V)) = \Lambda(U/V)^{\times}$$

を考える．但し最初の写像は代数的 $K$-理論に於けるノルム写像であり，二番目の写像は自然なアーベル化写像 $U \to U/V$ が誘導する関手的射である.[8] 同様に局所化された岩澤

[6] $p$**-超基本群** *$p$-hyperelementary group* とは位数が $p$ と素な巡回群と $p$-群の半直積の形で表される群のこと．ブラウアー基本群の一般化.

[7] 半直積型 $W \cong W^f \rtimes \Gamma$ の群の場合でも，整数 $e$ を $\Gamma^{p^e}$ が $H$ に自明に作用するようにとるとき $\Lambda(W)$ が **接合積** *crossed product* $\Lambda(\Gamma^{p^e}) \rtimes (G/\Gamma^{p^e})$ で表されることを用いれば，多少計算は繁雑にはなるが本稿とほぼ同様の議論を展開することが出来る.

[8] $\Lambda(U/V)$ は局所可換環なので，そのホワイトヘッド群 $K_1(\Lambda(U/V))$ は $\Lambda(U/V)$ の単数群と自然に同一視される．詳細は [Bass] 等を参照.

加群に対しても写像

$$\theta_{S,U,V}\colon K_1(\Lambda(G)_S) \xrightarrow{\text{ノルム}} K_1(\Lambda(U)_S) \to K_1(\Lambda(U/V)_S) = \Lambda(U/V)_S^\times$$

が構成される．これらを束ねた写像をそれぞれ $\theta=(\theta_{U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}_B}$，$\theta_S=(\theta_{S,U,V})_{(U,V)\in\mathfrak{F}_B}$ と表すことにしよう．

さて，$F_U, F_V$ をそれぞれ $F_\infty$ の $U, V$ に依る固定部分体とするとき，条件 $(*)_{F_U}$ の下で **アーベル**拡大 $F_V/F_U$ に付随する $p$-進ゼータ関数 $\xi_{F_V/F_U}$ が $\Lambda(U/V)_S^\times$ の元として存在することに注意しよう (ドリーニュ-リベ Deligne-Ribet の $p$-進ゼータ擬測度 [DR, Serre])．このアーベル拡大に付随する $p$-進ゼータ関数とノルム写像を用いて，非可換拡大 $F_\infty/F$ に付随する $p$-進ゼータ関数 $\xi_{F_\infty/F}$ は以下のように特徴付けられる;

**命題 1.2.**　$K_1(\Lambda(G)_S)$ の元 $\xi_{F_\infty/F}$ が補間性質 (1.2) を満たすこと ( 即ち $\xi_{F_\infty/F}$ が $F_\infty/F$ に付随する $p$-進ゼータ関数であること ) と等式

$$\theta_S(\xi_{F_\infty/F}) = (\xi_{F_V/F_U})_{(U,V)\in\mathfrak{F}_B} \tag{1.4}$$

が成り立つことは同値である．　◇

証明はブラウアーの誘導定理とドリーニュ-リベの $p$-進ゼータ擬測度の補間性質を用いた形式的な図式追跡に依って容易になされる ([H2, Section 2] の計算を参照されたい)．したがって定理 1.1 の証明は，関係式 (1.3) 及び関係式 (1.4) を満たす $K_1(\Lambda(G)_S)$ の元 $\xi_{F_\infty/F}$ を構成するという線形代数の問題に帰着される．

ここで，関係式 (1.4) を満たす元 $\xi_{F_\infty/F}$ が存在するための条件は $(\xi_{F_V/F_U})_{(U,V)\in\mathfrak{F}_B}$ がノルム写像 $\theta_S$ の像に含まれることであるから，命題 1.2 に拠り $F_\infty/F$ に付随する $p$-進ゼータ関数 $\xi_{F_\infty/F}$ が存在することを証明するためには

ステップ 1, ノルム写像 $\theta_S$ の像の計算;

ステップ 2, $(\xi_{F_V/F_U})_{(U,V)\in\mathfrak{F}_B}$ が $\theta_S$ の像に含まれることの証明

という二つのステップを実行しなければならないことが容易に観察される.[9] 実際の (カクデや著者による) 非可換岩澤主予想 (定理 1.1) の証明も大局的に見るとこの二つのステップから成り立っている．本稿では第 2 節が ステップ 1 の解説に，第 3 節が ステップ 2 の解説にそれぞれ当てられている．

実際には上記の ステップ 1, 2 の何れもいざ実行する際になると様々な 障碍 を孕んでいることが明らかになる．この困難の数々を如何にして乗り越えるかが 定理 1.1 を証明する際に極めて重大な課題となる．

[9] 勿論 これだけでは (1.3) が満たされないので，実際には上記のステップと **バーンズ-加藤のダイアグラム・チェイシング** を巧妙に組み合わせて主予想は証明されるのであった ([原 2, 2.1 節] 参照)．

尚，証明中では $\mathfrak{F}_B$ の部分族

$$\mathfrak{F}_A = \{U \mid U = U^f \times \Gamma,\ U^f \text{ は } G^f \text{ の } \textbf{巡回}\text{部分群}\}$$

が効果的に用いられる．$K_1(\Lambda(G)_S)$ の元 $\tilde{\xi}$ が $\mathfrak{F}_A$ の任意の元 $U$ に対し

$$\theta_U(\tilde{\xi}) = \xi_U$$

を満たすならば，アルティンの誘導定理に拠って先程と同様に $\tilde{\xi}$ は $F_\infty/F$ に付随する $p$ **捩れ部分を法とした** $p$-進ゼータ関数 (即ちアルティン $L$ 関数の特殊値を 1 の $p$ 冪根の不定性を除いて補間するもの) となり，所望の $p$-進ゼータ関数にかなり近いもの $\tilde{\xi}$ が得られる上，族として有限部分が巡回部分群となるものしか考えていないために計算がかなり簡略化され，より精密な解析が可能となるからである．

## §2.　ノルム写像の像の計算

本節では整対数準同型写像を用いたノルム写像の像の計算 (ステップ 1) について解説する．このステップは代数的 $K$-理論に基づく線形代数的な計算に終始したものである．

本節でも $G$ は有限 $p$ 群 $G^f$ と $\Gamma$ の直積に分解されると仮定する．

### §2.1.　オリヴァー-テイラーの整対数準同型

線形代数に於いて

**対数** *logarithm* をとってノルムの計算をトレースの計算に帰着させる

という手法はノルム写像 (行列式) を計算する際に非常に強力であったことを思い出そう．代数的 $K$-群のノルム写像の計算に於いても対数写像は非常に重要な役割を演ずるのである．

以下 $W$ を有限 $p$ 群 $W^f$ と $\Gamma$ の直積で表される副 $p$ 群としよう ($W^f$ としては $G^f, U^f, U^f/V^f$ 等を想定している)．このとき岩澤代数 $\Lambda(W)$ 及びその標準オーレ局所化 $\Lambda(W)_S$ のホワイトヘッド群に対して全射

$$\Lambda(W)^\times \twoheadrightarrow K_1(\Lambda(W)), \qquad\qquad \Lambda(W)_S^\times \twoheadrightarrow K_1(\Lambda(W)_S)$$

が存在するため,[10] ホワイトヘッド群の元 $x$ に対してその単数群への持ち上げ $\tilde{x}$ の形式的無限和 $-\sum_{j=1}^{\infty}(1-\tilde{x})^j/j$ をとることで対数写像

$$\log\colon K_1(\Lambda(W)) \to \Lambda(\Gamma)[1/p][\mathrm{Conj}(W^f)], \quad \log\colon K_1(\Lambda(W)_S) \to \Lambda(\Gamma)^{\widehat{}}_{(p)}[1/p][\mathrm{Conj}(W^f)]$$

[10] $\Lambda(W)$ 及び $\Lambda(W)_S$ は局所環ゆえ，全射性は代数的 $K$-理論の一般理論 ([Bass] 等を参照) から従う．

が定義される (これらは実際に収束し，持ち上げ $\tilde{x}$ に依らないことが知られている)．ここで $\mathrm{Conj}(W^f)$ は $W^f$ の共役類のなす集合を表し，$\Lambda(\Gamma)^{\wedge}_{(p)}$ は局所環 $\Lambda(\Gamma)_{(p)}$ の $p$ 進完備化を表すものとする．また，可換な単位的結合代数 $R$ に対し $R[\mathrm{Conj}(W^f)]$ は $\mathrm{Conj}(W^f)$ を基底とする自由 $R$-加群を表すものとする.[11]

上記のような素朴な定義では，対数写像の像に於いて $p$ **の冪乗が分母に現れてしまう**ので，$p$-整性 $p$-integrality や合同性を取り扱う際に非常に相性が悪いと言う問題が生じてしまう．この問題を解消し，対数写像の像が $p$ に関して整となるように改善したものが **整対数準同型** *integral logarithm* である．

**定義 2.1.** (オリヴァー，テイラー; 特別な場合) $\mathbb{Z}_p$-代数 $A$ は $\Lambda(\Gamma)$ もしくは $\Lambda(\Gamma)^{\wedge}_{(p)}$ を表すものとする．このとき $A$ 及び $A[1/p]$ は $\Gamma \to \Gamma; \gamma \mapsto \gamma^p$ から誘導されるフロベニウス自己準同型 $\phi$ を持つ．これを用いて $\mathbb{Z}_p$-代数の準同型

$$\varphi\colon A[1/p][\mathrm{Conj}(W^f)] \to A[1/p][\mathrm{Conj}(W^f)]$$

を $\sum_{[w]\in\mathrm{Conj}(W^f)} a_{[w]}[w] \mapsto \sum_{[w]\in\mathrm{Conj}(W^f)} \phi(a_{[w]})[w^p]$ と定義する．このとき

$$\Gamma_{A[W^f]}\colon K_1(A[W^f]) \to A[1/p][\mathrm{Conj}(W^f)]\ ;\ x \mapsto \log x - \frac{1}{p}\varphi(\log x)$$

の像は $A[\mathrm{Conj}(W^f)]$ に入る．$\Gamma_{A[W^f]}$ を **整対数準同型** *integral logarithm* と呼ぶ． ♦

注意 3. より一般的な状況下での対数写像，整対数準同型写像の定義及び諸性質に付いては [Oliver] を参照されたい．尚，オリヴァーとテイラーは元々トポロジーへの応用 (位相空間の基本群の群環並びにその完備化に対するホワイトヘッド群の構造決定) を目的として整対数準同型を導入したようである． ■

## §2.2. ノルム写像の像の計算 I —冪指数 $p$ 型の場合

それでは整対数準同型を用いて如何にしてノルム写像の像が計算出来るかを概観しよう．$A$ を $\Lambda(\Gamma)$, $\Lambda(\Gamma)_{(p)}$ 及び $\Lambda(\Gamma)^{\wedge}_{(p)}$ のいずれかの $\mathbb{Z}_p$-代数とする．族 $\mathfrak{F}_B$ の元 $(U,V)$ に対し，先ずは以下のようにしてトレース写像を定義する．

**定義 2.2** (トレース写像). 剰余類分割 $G^f/U^f$ の代表系 $\{a_j\}_{i=j}^r$ を一つ固定し，$G^f$ の共役類 $[g]_{G^f}$ に対して $\tau_j([g]_{G^f})$ を

$$\tau_j([g]_{G^f}) = \begin{cases} [a_j^{-1} g a_j]_{U^f} & a_j^{-1} g a_j \text{ が } U^f \text{ の元のとき,} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

[11] $\mathbb{Q}_p$-代数 $A'$ は $\Lambda(\Gamma)[1/p]$ もしくは $\Lambda(\Gamma)^{\wedge}_{(p)}[1/p]$ を表すものとすると，$A'[\mathrm{Conj}(W^f)]$ は $A'[W^f]/[A'[W^f], A'[W^f]]$ と同一視されるため (但し $[A'[W^f], A'[W^f]]$ は **代数としての** 交換子群を表す)，ここで定義された対数写像の行き先は $A'$-代数構造を持つ．

で定義し，$A$-線型に $A[\mathrm{Conj}(G^f)]$ 上の写像に拡張する．このとき

$$\mathrm{Tr}_{A[\mathrm{Conj}(G^f)]/A[\mathrm{Conj}(U^f)]} = \sum_{j=1}^{r} \tau_j \colon A[\mathrm{Conj}(G^f)] \to A[\mathrm{Conj}(U^f)]$$

は剰余類分割の代表元の取り方に依(よ)らない $A$-線型写像を定める．これを **トレース写像** *trace homomorphism* と呼ぶ． ♦

トレース写像と標準全射 $A[\mathrm{Conj}(U^f)] \to A[U^f/V^f]$ との合成を $A = \Lambda(\Gamma)$, $\Lambda(\Gamma)_{(p)}$, $\Lambda(\Gamma)^{\wedge}_{(p)}$ に応じてそれぞれ $\theta^+_{U,V}$, $\theta^+_{S,U,V}$, $\hat{\theta}^+_{U,V}$ と表すこととする．またそれぞれの像を $I_{U,V}$, $I_{S,U,V}$, $\hat{I}_{U,V}$ と表そう．ノルム写像とトレース写像は対数写像に関して整合的である，即(すなわ)ち図式

$$\begin{tikzcd}
K_1(\Lambda(G)) \arrow[r, "\theta_{U,V}"] \arrow[d, "\log"'] & \Lambda(U/V)^{\times} \arrow[d, "\log"] \\
\Lambda(\Gamma)[1/p][\mathrm{Conj}(G^f)] \arrow[r, "\theta^+_{U,V}"'] & \Lambda(\Gamma)[1/p][U^f/V^f]
\end{tikzcd}$$

及び

$$\begin{tikzcd}
K_1(\Lambda(G)_S) \arrow[r, "\theta_{S,U,V}"] \arrow[d, "\log"'] & \Lambda(U/V)^{\times}_S \arrow[d, "\log"] \\
\Lambda(\Gamma)^{\wedge}_{(p)}[1/p][\mathrm{Conj}(G^f)] \arrow[r, "\hat{\theta}^+_{U,V}"'] & \Lambda(\Gamma)^{\wedge}_{(p)}[1/p][U^f/V^f]
\end{tikzcd}$$

が可換となることが知られている．その一方で $\varphi$ **はトレース写像とは整合的ではない** ことが直(ただ)ちに確認できる．そこで以下

$G^f$ の <u>冪(べき)指数が $p$</u> である，

即(すなわ)ち任意の $G^f$ の元 $g$ に対して $g^p = 1$ が成り立つことを仮定すると，簡単な計算から任意の $(U,V) \in \mathfrak{F}_B$ に対して

$$\begin{tikzcd}
A[\mathrm{Conj}(G^f)] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta^+_{A,\mathrm{ab}}"'] & A \arrow[r, hook] & A[U^f/V^f] \arrow[d, "\theta^+_{A,U,V}"] \\
A[G^f_{\mathrm{ab}}] \arrow[rr, "(G:U)\varphi"'] & & A
\end{tikzcd}$$

が可換となることが分かる (ここで

$$\theta^+_{A,\mathrm{ab}} = \theta^+_{A,G,[G,G]} \colon A[\mathrm{Conj}(G)] \to A[G^{f,\mathrm{ab}}]$$

はアーベル化 $G \to G^{\mathrm{ab}}$ が引き起こす標準射であり，$(G:U)$ は開部分群 $U$ の $G$ に於ける指数)．これ等の関係式を用いると，任意の $K_1(\Lambda(G))$ の元 $x$ に対して

$$\begin{aligned}
\theta^+_{U,V} \circ \Gamma_{\Lambda(G)}(x) &= \theta^+_{U,V}(\log x) - \frac{1}{p}\theta^+_{U,V} \circ \varphi(\log x) \\
&= \theta^+_{U,V}(\log x) - \frac{(G:U)}{p}\varphi \circ \theta^+_{\mathrm{ab}}(\log x) \\
&= \log(\theta_{U,V}(x)) - \frac{(G:U)}{p}\varphi(\log(\theta_{\mathrm{ab}}(x))) \\
&= \log \frac{\theta_{U,V}(x)}{\varphi(\theta_{\mathrm{ab}}(x))^{(G:U)/p}}
\end{aligned}$$

と計算出来る．定義から最終項に現れる元は $I_{U,V}$ に属する．特に $\mathfrak{F}_A$ の元 $U$ に対しては $p$-進対数写像 log が ($p$ 捩れ部分を法として) $I_U$ と $1+I_U$ (実際これは乗法群となる) との間の同型を導くことが示されるので，以上の計算はノルム写像 $\theta_U$ ($U \in \mathfrak{F}_A$) の像が満たすべき **合同条件** *congruence condition* を与えていることが分かる．

ノルム写像の像に関する精確な記述は次の通り．以下，乗法的アーベル群 $A$ に対し $A_{p\text{-tors}}$ でその $p$ 捩れ部分を表すこととし，$\widetilde{A} = A/A_{p\text{-tors}}$ とおく．

**命題 2.3** ([H2, Proposition 6.3])． $\widetilde{\Psi}$ を次の性質を満たす直積群 $\prod_{\mathfrak{F}_B} \widetilde{\Lambda}(U/V)^\times$ の元 $(x_{U,V})_{\mathfrak{F}_B}$ のなす部分群とする；

(1) ( ノルム関係式 ) $(U,V), (U',V') \in \mathfrak{F}_B$ かつ $U'$ が $U$ に含まれ，$V$ が $U'$ に含まれるとき

$$\mathrm{Nr}_{\Lambda(U/V)/\Lambda(U'/V)}(x_{U,V}) = \mathrm{can}^{V'}_V(x_{U',V'})$$

が成立する ( ここで $\mathrm{can}^{V'}_V \colon \widetilde{\Lambda}(U'/V')^\times \to \widetilde{\Lambda}(U'/V)^\times$ は標準全射 );

(2) ( 共役関係式 ) $(U,V), (U',V') \in \mathfrak{F}_B$ かつ $U/V$ と $U'/V'$ が共役となるとき，共役写像に依って $x_{U,V}$ と $x_{U',V'}$ が移り合う；

(3) ( 合同関係式 ) $U \in \mathfrak{F}_A$ に対して合同式[12]

$$x_U \equiv \varphi(x_{\mathrm{ab}})^{(G:U)/p} \mod I_U \tag{2.1}$$

が成立する.[13]

---

[12]精確には “$p$ 捩れ部分を無視した” 合同式.

[13]実際には $\mathfrak{F}_A$ 以外の $\mathfrak{F}_B$ の元 $(U,V)$ に対しても (かなり) 弱い合同条件が課されるが，あまり本質的ではないので省略する．[H2] を参照されたい.

このとき $\theta$ は同型 $\widetilde{K}_1(\Lambda(G)) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\Psi}$ を誘導する． $\diamondsuit$

条件 (1) 及び (2) は $\widetilde{\Psi}$ がノルム写像の像であるということから課せられるべき自然な (自明な) 条件であるので，条件 (3) こそがノルム写像の像に課せられた **非自明な条件** であると言える．

オーレ局所化についても同様の結果が成り立つ;

**命題 2.4** ([H2, Proposition 7.2])． $\widetilde{\Psi}_S$ を直積群 $\prod_{\mathfrak{F}_B} \widetilde{\Lambda}(U/V)_S^{\times}$ の部分群で，先の命題の条件 (1), (2), (3) を満たす元 $(x_{U,V})_{\mathfrak{F}_B}$ に依って生成されるものとする.[14]このとき $\theta_S$ の像は $\widetilde{\Psi}_S$ に含まれる． $\diamondsuit$

但し $\Lambda(\Gamma)^{\widehat{}}_{(p)}$-係数の場合には [Oliver] 程深い整対数準同型の理論が存在しないという技術的理由から，残念ながら $\theta_S$ の像が $\widetilde{\Psi}_S$ と一致することまでは示せない (殆ど一致していると期待されてはいる)．しかし $\theta_S$ の像と $\widetilde{\Psi}_S$ との間のずれは，アンドリュー・ワイルズに拠る総実代数体の (可換な場合の) 岩澤主予想を用いたバーンズ-加藤のダイアグラム・チェイシングを行うことで解消されるので実はあまり気にする必要はない (バーンズ-加藤の手法についての詳細は [原 2, 2.1 節] を参照)．

また，対数関数を用いる関係上 $p$ **捩れ部分の不定性** がどうしても生じてしまうが，局所化される前の岩澤代数のホワイトヘッド群や乗法群の捩れ部分については グラハム・ヒグマン Graham Higman [Higman] 並びに チャールズ・テレンス・クレッグ・ウォール Charles Terence Clegg Wall [Wall] が詳細に構造を決定しており，彼等の結果及びリッター-ヴァイス型拡大に付随する非可換 $p$-進ゼータ関数の存在 [RW1] を用いて精密な計算を行うことに依り，最終的に構成される $p$-進ゼータ関数 $\xi$ からは $p$ 捩れ部分の不定性を取り除くことが出来る ([H2, Section 9.3] 参照)．

## §2.3. ノルム写像の像の計算 II —一般の場合

前小節で概観したように，合同条件式を求める際の最も大きな障碍が **トレース写像と** $\varphi$ **が可換ではない** ことである．$G^f$ の冪指数が $p$ の場合は比較的容易にトレース写像と $\varphi$ との間の交換関係を調べることが出来たが，一般の場合にはトレース写像と $\varphi$ との間の関係が簡単には決定出来ないため，当然のことながらより詳細な計算，解析が必要である．

ここではマヘシュ・カクデに依るノルム写像の像の計算結果 [Kakde2, Definition 49, Theorem 50] を証明抜きで紹介する程度に留めておこう．

族 $\mathfrak{F}_A$ の元 $U$ に対し，有限部分 $U^f$ の位数 $p$ の指標 $\omega_U$ を固定する．さらに $\omega_U$ に依る捻り写像 twisting map を

$$\tilde{\omega}_U \colon \Lambda(U)^{\times} \to \Lambda(U)^{\times} \ ; \ g \mapsto \omega_U(g)g$$

[14] 但し，合同関係式に現れる $I_U$ は $I_{S,U} = I_U \otimes_{\Lambda(\Gamma)} \Lambda(\Gamma)_{(p)}$ に置き換える．

で定め，これを用いて

$$\alpha_U(x) = \frac{x^p}{\prod_{j=0}^{p-1} \tilde{\omega}_U^j(x)}$$

と定義する．

**命題 2.5** ( マヘシュ・カクデ)． $\Psi$ を次の性質を満たす直積群 $\prod_{\mathfrak{F}_B} \Lambda(U/V)^\times$ の元 $(x_{U,V})_{\mathfrak{F}_B}$ のなす部分群とする；

(1) ( ノルム関係式 ) $(U,V)$, $(U',V') \in \mathfrak{F}_B$ かつ $U'$ が $U$ に含まれ，$V$ が $U'$ に含まれるとき

$$\mathrm{Nr}_{\Lambda(U/V)/\Lambda(U'/V)}(x_{U,V}) = \mathrm{can}_V^{V'}(x_{U',V'})$$

が成立する ( ここで $\mathrm{can}_V^{V'}\colon \Lambda(U'/V')^\times \to \Lambda(U'/V)^\times$ は標準全射 );

(2) ( 共役関係式 ) $(U,V)$, $(U',V') \in \mathfrak{F}_B$ かつ $U/V$ と $U'/V'$ が共役となるとき，共役写像に依(よ)って $x_{U,V}$ と $x_{U',V'}$ が移り合う；

(3) ( 合同関係式 ) $U \in \mathfrak{F}_A$ に対して合同式

$$\alpha_U(x_U) \equiv \prod_{U'} \varphi(\alpha_{U'}(x_{U'})) \mod pI'_U \tag{2.2}$$

が成立する．但(ただ)し $I'_U$ は $\Lambda(NU)$ ($NU$ は $U$ に対する $G$ の正規化部分群 ) から $\Lambda(U)$ へのトレース写像の像であり，$U'$ は $U$ を位数 $p$ で含む $\mathfrak{F}_A$ の元を渡るものとする．

このとき $(\theta_U)_{U\in\mathfrak{F}_A}$ は全射 $K_1(\Lambda(G)) \twoheadrightarrow \Psi$ を誘導し，その核は $SK_1(\Lambda(G))$ となる．◇

標準オーレ局所化に対しても同様の特徴付けがなされるので，ここでは省略する．詳細は [Kakde2, Definition 49] を参照．

## § 3. $p$-進ゼータ関数間の合同式

非可換岩澤主予想の証明で残った課題は 第 2 節で記述されたノルム写像 $\theta$, $\theta_S$ の像を規定する条件を各アーベル拡大 $F_V/F_U$ に付随する $p$-進ゼータ擬測度(ぎそくど) $\{\xi_{V,U}\}_{\mathfrak{F}_B}$ が満たすかどうかを確認することである．このうちノルム関係式 (1)，共役関係式 (2) は $p$-進ゼータ擬測度(ぎそくど)の補間性質を用いた形式的な計算に依(よ)り容易に正当化出来(でき)る (詳細は [H2] 等を参照)．したがって問題となるのは $p$-進ゼータ擬測度(ぎそくど)達が **合同関係式** (3) を満たすか否かであるが，合同関係式 (3) は従来の岩澤理論では登場し得ない全く新しいタイプの合同式であり，形式的な計算から導出出来(でき)るような単純なものでないことは想像に難(かた)くなかろう．

本節では $p$-進ゼータ関数間の合同関係式 (3) を如何にして証明するかについて概説する．

## § 3.1. 証明のアイディア

証明の鍵となる道具は ピエール・ルネ・ドリーニュ Pierre René Deligne と ケネス・アラン・リベ Kenneth Alan Ribet に拠るヒルベルト保型形式に対する $q$-**展開原理** *q-expansion principle* である．ドリーニュとリベは論文 [DR] で，部分ゼータ関数 partial zeta function の特殊値を定数項に持つヒルベルト・アイゼンシュタイン級数を構成し，それ等に対して $q$-展開原理を適用してゼータ値の間の**一般化クンマー合同式** *generalized* Kummer *congruences* を証明することに依り総実代数体に付随する $p$-進ゼータ関数を構成したのであった (彼等の理論の背景にはヘルムート・クリンゲン Helmut Klingen や カール・ルートヴィッヒ・ジーゲル Carl Ludwig Siegel に依る総実代数体のゼータ関数の特殊値に関する古典的な成果があることは言うまでもなかろう)．

ドリーニュ-リベの構成を振り返ってみれば $q$-展開原理がゼータ値 (或いは $p$-進ゼータ擬測度) の間の合同式を導きだすために極めて有用であることは明らかである．実際に加藤，リッター-ヴァイス及びカクデは彼等の初期の仕事 [Kato, RW1, Kakde1] に於いて，必要とされる合同式をドリーニュ-リベの $q$-展開原理を用いて直接示すことに成功している．しかし (2.1) の様に $p$-**進ゼータ関数の** $p$-**冪乗** を含むような合同式は $q$-展開原理から直接導き出すのは困難であった ([原 2, 第 2.4 節] も参照せよ)．

そこで，$G^f$ の中心に含まれる非自明な元 ($p$ 群なので必ず存在する) で $G^f$ の交換子群に含まれるようなものをとり，$F_{\langle c\rangle}/F$ **に付随する** $p$-**進ゼータ関数** $\bar{\xi}$ が既に $K_1(\Lambda(\bar{G})_S)$ の元として構成されていると仮定しよう ($G^f$ の位数に関する帰納法; ここで $\bar{G}=G/\langle c\rangle$ とおいた)．$\bar{\xi}$ は様々な合同式の情報を有する元である筈なので，

> $\bar{\xi}$ を “巧く” $K_1(\Lambda(G)_S)$ に持ち上げれば所望の $p$-進ゼータ関数 $\xi_{F_\infty/F}$ が得られるのではなかろうか？

と考えるのは極めて自然な発想と言えよう．この様な考えに基づく手法が，本稿の主題たる $p$-**進ゼータ関数の帰納的構成** である．

$p$-進ゼータ関数を帰納的に構成すると言う考え方は [H1] に於いて初めて導入されたものである．その後様々な改良が加えられ，リッター- ヴァイス及びカクデに依る非可換主予想の最終解決 [RW3, Kakde2] に於いても帰納的構成の精神は脈々と受け継がれている (後述の 注意 5 も参照せよ)．

次の小節では [H1] の一般化である [H2] に従って，$G^f$ の冪指数 が $p$ のときに帰納的構成が実際にどのようにして行われるかを概観することとしよう．

### §3.2. $p$-進ゼータ関数の帰納的構成 I—冪指数 $p$ 型の場合

以下では $G$ の有限部分 $G^f$ の冪指数が $p$ であると仮定する．また $c$ を $G^f$ の位数 $p$ の中心元で $G^f$ の交換子群に含まれるものとする．以上の仮定の下で $\mathfrak{F}_A$ の元 $U$ に対して合同式 (2.1) を証明しよう．$U_c$ を $U$ と $c$ で生成される $G$ の部分群とする ($c$ は中心元なのでこれはアーベル群)．$NU_c$ を $U_c$ に関する $G$ の正規化部分群とする．さて，$F_\infty/F_{U_c}$ に付随するヒルベルト-アイゼンシュタイン級数を $F_{NU_c}$ に制限したものを $\Lambda$-進保型形式の表示を用いて

$$\mathscr{G} = \frac{\xi_{U_c,V}}{2^{[F_{U_c}:\mathbb{Q}]}} + \sum_{(\mathfrak{b},\nu)\in P_{U_c,V}} \left(\frac{F_\infty/F_{U_c}}{\mathfrak{b}}\right) q^{\mathrm{Tr}_{F_{U_c}/F_{NU_c}}(\nu)}$$

と書くことにしよう．ここで $\left(\frac{F_\infty/F_{U_c}}{-}\right)$ は拡大 $F_\infty/F_{U_c}$ に対するアルティン記号であり，$P_{U_c,V}$ は $\Sigma$ と素な $F_{U_c}$ の (零でない) 整イデアル $\mathfrak{b}$ 及び総正な $\mathfrak{b}$ の元 $\nu$ の組 $(\mathfrak{b},\nu)$ 全体のなす集合である．$P_{U_c,V}$ には $\mathrm{Gal}(F_{U_c}/F_{NU_c})(= NU_c/U_c)$ が自然に作用する．

ここで [原 2, 第 6.2 節] の説明と同様に $\mathscr{G}$ の係数を $\mathrm{Gal}(F_{U_c}/F_{NU_c})$ の作用に関する軌道和に分解すると，$(\mathfrak{b},\nu)$ を含む軌道の軌道和は

$$\begin{aligned}&\sum_{\tau\in\mathrm{Gal}(F_{U_c}/F_{NU_c})/\mathrm{Gal}(F_{U_c}/F_{(\mathfrak{b},\nu)})} \left(\frac{F_\infty/F_{U_c}}{\tau\mathfrak{b}}\right) q^{\mathrm{Tr}_{F_{U_c}/F_{NU_c}}(\tau\nu)}\\ &= \left(\sum_{\tau\in\mathrm{Gal}(F_{U_c}/F_{NU_c})/\mathrm{Gal}(F_{U_c}/F_{(\mathfrak{b},\nu)})} \tau^{-1}\mathrm{Ver}\left(\frac{F_{(\mathfrak{b},\nu)}^{\mathrm{comm}}/F_{(\mathfrak{b},\nu)}}{\mathfrak{a}}\right)\tau\right) q^{\mathrm{Tr}_{F_{U_c}/F_{NU_c}}(\nu)}\end{aligned}$$

と計算出来る．但し $\mathrm{Gal}(F_{U_c}/F_{NU_c})$ の $(\mathfrak{b},\nu)$ に於ける等方化部分群及びその交換子群による $F_{U_c}$ の固定体をそれぞれ $F_{(\mathfrak{b},\nu)}$ 及び $F_{(\mathfrak{b},\nu)}^{\mathrm{comm}}$ と表記した．また $\mathfrak{a}$ は $F_{(\mathfrak{b},\nu)}$ の整イデアルで $\mathfrak{a}\mathcal{O}_{F_{U_c}} = \mathfrak{b}$ となるものであり，$\mathrm{Ver}\colon \mathrm{Gal}(F_\infty/F_{U_c}) \to \mathrm{Gal}(F_{(\mathfrak{b},\nu)}^{\mathrm{comm}}/F_{(\mathfrak{b},\nu)})$ は移送写像 Verlagerung である．

先ず $F_{(\mathfrak{b},\nu)}$ が $F_{U_c}$ と一致するとき (即ち $\mathrm{Gal}(F_{U_c}/F_{NU_c})$ の $(\mathfrak{b},\nu)$ に於ける等方化部分群が自明となるとき) は，定義より $q^{\mathrm{Tr}_{F_{U_c}/F_{NU_c}}(\nu)}$ の係数は $\Lambda(NU_c)$ から $\Lambda(U_c)$ へのトレース写像に依るアルティン記号 $\left(\frac{F_\infty/F_{U_c}}{\mathfrak{b}}\right)$ の像である．他方 $F_{(\mathfrak{b},\nu)}$ が $F_{U_c}$ と一致しない場合は $q^{\mathrm{Tr}_{F_{U_c}/F_{NU_c}}(\nu)}$ の係数は移送写像 Ver を経由するが，$G^f$ **の冪指数が** $p$ **である** という仮定の下で移送写像は $\sharp(\mathrm{Gal}(F_{U_c}/F_\infty)/\mathrm{Gal}(F_{U_c}/F_{(\mathfrak{b},\nu)}))$ 乗写像と一致するので ([H1, Lemma 4.3] 参照)，特に $\Lambda(\Gamma)$ の元となることが分かる．

ドリーニュ-リベの $q$-展開原理は非定数項の係数の合同式が定数項に伝播することを主張するので，上記の計算に依りある $\Lambda(\Gamma)_{(p)}$ の元 $c_{U_c}$ が存在して合同式

$$\xi_{U_c} \equiv c_{U_c} \mod I'_{S,U_c} \tag{3.1}$$

が成立する．但し $I'_{S,U_c}$ は $\Lambda(NU_c)_S$ から $\Lambda(U_c)_S$ へのトレース写像の像を表すものとする．

さて，$\bar{G}=G/\langle c\rangle, \bar{U}=U_c/\langle c\rangle$ とおくとき，標準全射 $U_c \twoheadrightarrow \bar{U}$ に伴い $\xi_{U_c}$ が $F_{\langle c\rangle}/F_{U_c}$ に付随する $p$-進ゼータ関数 $\bar{\xi}_{\bar{U}}$ に移ることは容易に確認出来るので，(3.1) から

$$\bar{\xi}_{\bar{U}} \equiv c_{U_c} \qquad \mathrm{mod}\ I'_{S,\bar{U}} \tag{3.2}$$

が得られる．但し $I'_{S,\bar{U}}$ は $\Lambda(N\bar{U})_S$ から $\Lambda(\bar{U})_S$ へのトレース写像の像を表す．さらに帰納法の仮定から $F_{\langle c\rangle}/F$ に付随する $p$-進ゼータ関数 $\bar{\xi}$ が $K_1(\Lambda(\bar{G})_S)$ の元として存在する．$\bar{\xi}$ は合同条件 (3) の情報を持っているので，特に $\bar{\xi}_{\bar{U}}$ に対して

$$\bar{\xi}_{\bar{U}} \equiv \varphi(\xi_{\mathrm{ab}})^{(\bar{G}:\,\bar{U})/p} \qquad \mathrm{mod}\ I'_{S,\bar{U}} \tag{3.3}$$

が成り立つ．したがって (3.3) と (3.2) を併せて

$$c_{U_c} \equiv \varphi(\xi_{\mathrm{ab}})^{(\bar{G}:\,\bar{U})/p} \qquad \mathrm{mod}\ I'_{S,\bar{U}} \cap \Lambda(\Gamma)_{(p)}$$

が得られる．$I'_{S,\bar{U}} \cap \Lambda(\Gamma)_{(p)}$ は自然に $\Lambda(\Gamma)_{(p)}$ の部分加群となるので，$I'_{S,\bar{U}} \cap \Lambda(\Gamma)_{(p)}$ を $I'_{S,U}$ の部分加群と見做すことが出来，結果として合同式

$$\xi_{U_c} \equiv \varphi(\xi_{\mathrm{ab}})^{(G:\,U_c)/p} \qquad \mathrm{mod}\ I'_{S,U_c} \tag{3.4}$$

が得られる．$I'_{S,U_c}$ と $I_{S,U_c}$ の間の差は加法的テータ同型のトレース関係式 [H2, Section 4.2] を $\{\log(\varphi(\xi_{\mathrm{ab}})^{-(G:U)/p}\xi_{U,V})\}_{\mathfrak{F}_B}$ が満たすことを用いて簡単に修正出来る．また，$U$ に関する合同式は式 (3.4) の両辺に $\Lambda(U)_S$ への “ノルム写像” を作用させると言う方針で導くことが出来る (以上の修正に関する詳細は [H2, Section 9] を参照).

斯くして冪指数 $p$ 型の場合には帰納的に合同式 (2.1) を証明することが出来るので，前節までの議論に従って $p$-進ゼータ関数を構成することが可能となる．

## §3.3. $p$-進ゼータ関数の帰納的構成 II—〈差の持ち上げ〉の視点から

前小節 (第 3.2 節) の議論を異なる視点から捉え直してみよう．

先程と同様に $c$ を $G^f$ の位数 $p$ の中心元で $G^f$ の交換子群に含まれるものとする．また $F_{\langle c\rangle}/F$ に付随する $p$-進ゼータ関数 $\bar{\xi}$ が $K_1(\Lambda(\bar{G})_S)$ の元として存在すると仮定する (帰納仮定)．さらに $K_1(\Lambda(G)_S)$ の元 $f$ で

$(1)_{\mathrm{Char}}$ $\partial(f)=-[C_{F_\infty/F}]$ が成立する;

$(2)_{\mathrm{Char}}$ $K_1(\Lambda(\bar{G})_S)$ での像が $\bar{\xi}$ と一致する

の両方を満たすものを任意にとる[15]．族 $\mathfrak{F}_B$ の元 $(U,V)$ に対して $\theta_{S,U,V}(f)$ と $\xi_{U,V}$ との間の差を $w_{U,V}=\xi_{U,V}\theta_{S,U,V}(f)^{-1}$ とおく．アンドリュー・ワイルズの定理 [Wiles] に依り $F_V/F_U$ に対して岩澤主予想が成立することを用いると，$(w_{U,V})_{\mathfrak{F}_B}$ は直積群 $\prod_{\mathfrak{F}_B}\Lambda(U/V)^\times$ の元であることが従う (バーンズ-加藤の手法の第一段階; [原 2, 定理 2.1] 参照)．ここで，$(w_{U,V})_{\mathfrak{F}_B}$ が **ノルム写像 $\theta$ の像に入っている** と仮定すると，$\theta(w)=(w_{U,V})_{\mathfrak{F}_B}$ なる $K_1(\Lambda(G))$ の元 $w$ をとることが出来，$\xi=fw$ とおけば $\xi$ が (1.4) を満たすことが容易に従う; 即ち $\xi$ は $F_\infty/F$ に付随する $p$-進ゼータ関数であり，さらに岩澤主予想も満たす．

したがって岩澤主予想を示すためには $(w_{U,V})_{\mathfrak{F}_B}$ **が $\theta$ の像に入ること**，即ち $(w_{U,V})_{\mathfrak{F}_B}$ がノルム関係式，共役関係式，合同関係式を全て満たすことを確認すれば良い．ここでノルム関係式，共役関係式は矢張り補間性質を用いた形式的計算から従うので，問題となるのは合同式

$$w_U\equiv\varphi(w_{\mathrm{ab}})^{(G:U)/p}\qquad\bmod I_U \tag{3.5}$$

が成り立つかどうかに他ならない．ところが $f$ の取り方 (帰納仮定) から

$$\begin{aligned}\theta_{S,\mathrm{ab}}(f)&=\bar{\theta}_{S,\mathrm{ab}}(f\text{ の }K_1(\Lambda(\bar{G})_S)\text{ での像})\\&=\bar{\theta}_{S,\mathrm{ab}}(\bar{\xi})\\&=\xi_{\mathrm{ab}}\end{aligned}\tag{3.6}$$

(但し $\bar{\theta}_{S,\mathrm{ab}}$ はアーベル化写像 $K_1(\Lambda(\bar{G})_S)\to\Lambda(G^{\mathrm{ab}})_S^\times$)，即ち $w_{\mathrm{ab}}=1$ が成り立つ．したがって (3.5) は

$$w_U\equiv 1\qquad\bmod I_U \tag{3.7}$$

という単純な合同式に帰着され，取り扱いが困難であった $p$-冪乗の部分が消え去ってしまうのである（！）

第 3.2 節の議論は，差 $(w_{U,V})_{\mathfrak{F}_B}$ を $K_1(\Lambda(G))$ に〈持ち上げる〉と言う視点に立つと **帰納仮定を用いて合同式の右辺** ($p$-**冪乗や** $\varphi$ **を含む部分**) **を消して単純な合同式に帰着する** ことを表していると見ることが出来る．単純化された合同式 (3.7) の正当化の際にも $p$-進ゼータ関数間の合同式は必要とはなるが，当初目的としていた合同式 (2.1) よりも**遙かに弱い合同式** (ここでは式 (3.1) に相当する) で十分であるという点が帰納的構成を巧く進行させるからくりとなっていたわけである．

[15] $(1)_{\mathrm{Char}}$ を満たすような元を拡大 $F_\infty/F$ に対する **特性元** *characteristic element* と呼ぶのであった; 詳細は [原 1, 定義 1.2] 参照．

## § 3.4.　一般の場合について

冪指数 $p$ 型の場合には，移送写像の像が全て $\Lambda(\Gamma)$ に含まれてしまうと言う極めて強い特殊性に依り比較的簡単に帰納法が進行したが，一般の場合には移送写像の像についても精密な議論を行わなければならない．その際に前小節で考察した **〈差を持ち上げる〉** という視点が再び重要な役割を演ずることとなる．

中心元 $c$ 及び $p$-進ゼータ関数 $\bar{\xi}$ を前小節と同様のものとし，さらに $(1)_{\mathrm{Char}}, (2)_{\mathrm{Char}}$ を満たす $K_1(\Lambda(G)_S)$ の元 $f$ をとる．さらに $\mathfrak{F}_A$ の元 $U$ に対して $\theta_{S,U}(f)$ と $\xi_U$ との間の差を $w_U = \xi_U\theta_U(f)^{-1}$ とおく．前小節と同様に，$p$-進ゼータ関数を構成するためには $(w_U)_{\mathfrak{F}_A}$ がカクデの合同式 (2.2) を満たすことを証明すれば良い．

ここでは $U$ が $c$ を含む場合を考える．このときは (2.2) の右辺に現れる $U'$ 達も全て $c$ を含むため，特に $f$ の取り方から $w_{U'}$ の $K_1(\Lambda(\bar{U}'))$ での像は $1$ となる (ここで $\bar{U}' = U'/\langle c\rangle$ とおいた．(3.6) と全く同様の計算から $\theta_{U'}(f)$ の $\Lambda(\bar{U}')^\times_S$ での像が $\bar{\xi}_{\bar{U}'}$ と等しくなることに注意)．したがって $w_{U'}$ 達は $1 + \sum_{j=0}^{p-1}(1-c^j)x_j$ の形をしていることが分かり，$\varphi$ を作用させると $1$ となることが従う ($c$ の位数が $p$ であることに注意)．纏めると，帰納仮定 ($\bar{\xi}$ の存在) を用いることで $w_U$ に関する合同式 (2.2) は

$$\alpha_U(w_U) \equiv 1 \qquad \mathrm{mod}\ pI'_U$$

という比較的単純な合同式に帰着される (前小節と同様に右辺の複雑な項が消えてしまっている点に注目しよう)．この合同式は

$$w_U \equiv 1 \qquad \mathrm{mod}\ I'_U \tag{3.8}$$

から容易に導くことが出来る.[16]

第 3.2 節でのドリーニュ-リベの $q$-展開原理を用いた議論では，移送写像の像が全て $\Lambda(\Gamma)$ に含まれるという特殊事情 (これは $G^f$ の冪指数 が $p$ であるということから従うのであった) を用いて，その部分を 殆 ど無視することによってかなり粗い合同式 (3.1) を得ていた．この移送写像の像に対する大雑把な評価を反省して，移送写像が現れる項に関しても精密に解析すると次の合同式が得られる [RW2];

**命題 3.1** ( リッター-ヴァイス)．　上記の設定の下で合同式

$$\sum_{U \le U' \le NU} \mu_{NU/U}(U'/U)\mathrm{Ver}_U^{U'}(\xi_{U',V'}) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ I'_{S,U} \tag{3.9}$$

が成り立つ．ここで $\mu_{NU/U}$ は $NU/U$ の部分群が生成する包含関係に関する半順序集合に付随するメービウス関数，即 ち

$$\mu_{NU/U}(U/U) = 1, \quad \mu_{NU/U}(U'/U) = -\sum_{U''/U < U'/U} \mu_{NU/U}(U''/U)$$

[16] $1 + I'_U$ 上の対数写像の像が $I'_U$ に含まれること及び [Kakde2, Lemma 76] の図式から導かれる．

で定義される関数である． $\Diamond$

さらにリッターとヴァイスは同様の関係式がノルム写像の像に関しても成立することを証明した [RW3, Proposition 4].

**命題 3.2** ( メービウス-ウォールの合同式). 　同様の設定の下で任意の $K_1(\Lambda(G)_S)$ の元 $x$ に対して

$$\sum_{U \leq U' \leq NU} \mu_{NU/U}(U'/U)\mathrm{Ver}_U^{U'}(\theta_{S,U',V'}(x)) \equiv 0 \qquad \mod I'_{S,U} \tag{3.10}$$

が成立する． $\Diamond$

注意 4. 　(3.10) のタイプの合同式の導出は，元々はウォールが指数 $p$ のとき ( 即ち $(NU:U)=p$ のとき) にノルム写像を具体的に計算して合同式を導き出したことに端を発している．彼の結果をメービウス関数を用いて一般 $p$-冪指数の場合に拡張したということでリッター-ヴァイスは論文 [RW3] で合同式 (3.10) のことを “メービウス-ウォールの合同式” と呼んでいるようである．

尚，リッターとヴァイスによる合同式 (3.10) の証明は，ノルム写像を表す行列の行列式を具体的に書き下して精密に解析すると言ったかなり緻密な計算を要求される証明であり，ウォールの直接計算に依る証明をそのまま拡張したようなものである (論文 [RW3] の 4 分の 1 強はこの合同式の証明に当てられている). $\blacksquare$

$w_{U'}$ が $1+\sum_{j=0}^{p-1}(1-c^j)x_j$ の形をしているときは移送写像 $\mathrm{Ver}_U^{U'}$ に依る像が 1 となることは定義から容易に分かるので，メービウス-ウォールの合同式を $f$ に適用することで

$$\xi_U w_U + \sum_{U \leq U' \leq NU} \mu_{NU/U}(U'/U)\mathrm{Ver}_U^{U'}(\xi_U) \equiv 0 \qquad \mod I'_{S,U}$$

が得られ，(3.9) と比較することで

$$\xi_U(w_U - 1) \equiv 0 \qquad \mod I'_{S,U},$$

即ち (3.8) が導かれる．$U$ が $c$ を含まない場合も，前小節と同様に $U$ を $U_c$ に拡張して両辺に “ノルム写像” を作用させると言う議論を展開することで ( 若干計算が繁雑にはなるが) 合同式 (3.8) が得られる．

注意 5. 　リッターとヴァイスは論文 [RW3] に於いてノルム写像 $\theta$, $\theta_S$ の像の計算を明示的には行っておらず，彼等の以前の結果 [RW1] の拡張として合同式 (3.8) と非常に技巧的かつ繁雑な帰納法を駆使して一般の場合の主予想の証明を完結させている．

また，カクデは論文 [Kakde2] に於ける合同式 (2.2) の証明に上記のような帰納法は用いておらず，(2.2) が単純な合同式の積として導きだされることを看破し，ドリーニュ-リベの $q$-展開原理を用いてその単純な合同式を直接正当化することに依って合同式 (2.2) を導き出している．尤もカクデはノルム写像の像の計算の段階で矢張り帰納法を積極的に用いており，総実代数体の非可換岩澤主予想の証明に於いて帰納法が非常に重要な役割を担うことに何ら変わりはないと言えよう．

本稿では $p$-進ゼータ関数の帰納的構成という手法と論文 [Kakde2] の結果の関係性を明らかにする目的から，[Kakde2] とは異なる方針に基づく合同式の証明方針を提示することとした． ■

## 謝辞

早稲田大学整数論セミナー等様々な場でお世話になり，此の度歴史と伝統ある本研究集会で講演するという大変貴重な機会を与えてくださった電気通信大学大学院情報理工学研究科の木田雅成教授，並びに本研究を含む著者の学生時代の研究活動を全般に渡って常に支え続けて下さった東京大学大学院数理科学研究科の辻雄教授に心より御礼申し上げます．

## 参考文献

[Bass] Hyman Bass, *Algebraic K-theory*, Benjamin (1968).

[BK] Alan Jonathan Berrick and Michael E. Keating, *The localization sequence in K-theory*, $K$-Theory, **9** (1995) 577–589.

[Burns] David Burns, *On main conjectures in non-commutative Iwasawa theory and related conjectures*, preprint (2010).

[CFKSV] John Coates, Takako Fukaya, Kazuya Kato, Ramdorai Sujatha and Otmar Venjakob, *The $GL_2$ main conjecture for elliptic curves without complex multiplication*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **101** (2005) 163–208.

[Dress] Andreas Dress, *Contributions to the theory of induced representations*, in: *Algebraic K-theory*, II: "Classical" algebraic $K$-theory and connections with arithmetic, Lecture Notes in Mathematics, **342**, Springer-Verlag, Berlin (1973) 183–240.

[DR] Pierre René Deligne and Kenneth Alan Ribet, *Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields*, Invent. Math., **59** (1980) 227–286.

[FK] Takako Fukaya and Kazuya Kato, *A formulation of conjectures on p-adic zeta functions in noncommutative Iwasawa theory*, Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society, Vol. XII, 1–85, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **219**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2006).

[FW] Bruce Ferrero and Lawrence Clinton Washington, *The Iwasawa invariant $\mu_p$ vanishes for abelian number fields*, Ann. of Math. **109** (1979), 377-395.

[原 1] 原 隆，**総実代数体の非可換岩澤理論の展開**，第 5 回城崎新人セミナー報告集 (2008) 120-149.

[原 2] 原 隆 (Takashi Hara), *On non-commutative Iwasawa theory of totally real number fields*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B19** (2010) 277–299.

[H1] Takashi Hara, *Iwasawa theory of totally real fields for certain non-commutative $p$-extensions*, J. Number theory, **130**, Issue 4 (2010) 1068–1097.

[H2] Takashi Hara, *Inductive construction of the $p$-adic zeta functions for non-commutative $p$-extensions of exponent $p$ of totally real fields*, Duke Math. J., **158**, No. 2 (2011) 247–305.

[Higman] Graham Higman, *The units of group rings*, Proc. London Math. Soc. (2) **46** (1940) 231–248.

[Kakde1] Mahesh Kakde, *Proof of the main conjecture of noncommutative Iwasawa theory for totally real number fields in certain cases*, preprint, `arXiv:0802.2272v2[math.NT]` (2008) to appear in J. Alg. Geom.

[Kakde2] Mahesh Kakde, *The main conjecture of Iwasawa theory for totally real fields*, preprint, `arXiv:1008.0142v1[math.NT]` (2010).

[Kato] Kazuya Kato, *Iwasawa theory of totally real fields for Galois extensions of Heisenberg type*, preprint.

[Klingen] Helmut Klingen, *Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion*, Math. Ann., **145** (1961/1962) 265–272.

[Oliver] Robert Oliver, *Whitehead groups of finite groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **132** (1988) Cambridge Univ. Press.

[RW1] Jürgen Ritter and Alfred Weiss, *Equivariant Iwasawa theory: an example*, Doc. Math., **13** (2008) 117–129.

[RW2] Jürgen Ritter and Alfred Weiss, *Congruences between abelian pseudomeasures,* II, preprint, `arXiv:1001.2091[math.NT]` (2010).

[RW3] Jürgen Ritter and Alfred Weiss, *On the 'main conjecture' of equivariant Iwasawa theory*, preprint, `arXiv:1004.2578v2[math.2010]` (2010), to appear in J. Amer. Math. Soc.

[Serre] Jean-Pierre Serre, *Sur le résidu de la fonction zêta $p$-adique d'un corps de nombres*, C. R. Acad. Sci., Paris, **287** (1978) série A, 183–188.

[Siegel] Carl Ludwig Siegel, *Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.–Phys. Kl. II, **3** (1970) 15–56.

[Wall] Charles Terence Clegg Wall, *Norms of units in group rings*, Proc. London Math. Soc. (3) **29** (1974) 593–632.

[WY] Charles Weibel and Dongyuan Yao, *Localization for the $K$-theory of noncommutative rings*, in: *Algebraic $K$-theory, commutative algebra, and algebraic geometry* (Santa Margherita Ligure, 1989) Contemp. Math., **126**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1992) 219–230.

[Wiles] Andrew Wiles, *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, Ann. of Math. Second Ser., **131** (1990) no.3, 493–540.