RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B44 (2013), 111–113

On good reduction of some K3 surfaces (announcement)

By

松本 雄也 (Yuya MATSUMOTO)*

Abstract

This is an abstract of my talk at RIMS conference on 2011/12/02. The full version of the paper is available at `arXiv:1202.2421`.

The Néron–Ogg–Šafarevič criterion for abelian varieties tells that whether an abelian variety has good reduction or not can be determined from the Galois action on its l-adic étale cohomology. We show an analogue of this criterion for some special kind of K3 surfaces (those which admit Shioda–Inose structures of product type), which are deeply related to abelian surfaces. We also show a p-adic analogue.

K を完備離散付値体で，剰余体が完全なるものとする．簡単のため K は標数 0 とする．X を K 上の固有かつ滑らかな多様体とする．$\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ 上固有かつ滑らかなスキーム $\mathcal{X}$ であって，生成ファイバーが X となるものが存在するとき X は**良い還元**をもつと言う．このような $\mathcal{X}$ を X の良いモデルとよぶ．

X が良い還元をもつか否かを，X の l 進エタールコホモロジー $H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_l)$（ここで $\overline{K}$ は K の代数閉包）へのガロア群 G_K の作用の様子から判定できるか，という問題を考える．（以下当分の間 l は K の剰余標数 p と異なるとする．）

一般の多様体に対しては，良い還元をもつための必要条件を与えることができる：

定理 0.1 (SGA4 [4, Exposé XVI]). X が良い還元をもつならば，任意の i に対し，$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_l)$ は不分岐である（すなわち，惰性群 I_K（$\subset G_K$）が自明に作用する）．

アーベル多様体の場合には，これは必要十分条件になる：

定理 0.2 (Serre–Tate [5, Theorem 1], Néron–Ogg–Šafarevič criterion). X がアーベル多様体の場合，良い還元をもつことと $H^1_{\text{ét}}(X_{\overline{K}},\mathbb{Q}_l)$ が不分岐であることは同値である．

Received March 12, 2012. Revised May 12, 2012.
2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 11G25; Secondary 14G20, 14J28.
Key Words: good reduction, K3 surfaces, Kummer surfaces, Shioda–Inose structure.
*Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan.
e-mail: `ymatsu@ms.u-tokyo.ac.jp`

本稿では，ある種の K3 曲面に対してこれと類似の結果が成り立つことを紹介する．

K3 曲面とは，$H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ かつ $\Omega_X^2 \cong \mathcal{O}_X$ なる（極小）曲面のことであるが，ここではそのうち次の 2 種類を扱う．(以下標数は 2 でないと仮定する．)

定義 0.3. (1) 体 F 上の曲面 X が Kummer 曲面であるとは，$X_{\overline{F}}$ がある（$\overline{F}$ 上の）アーベル多様体 A の -1 倍写像による商 $A/\langle \pm 1 \rangle$ の最小特異点解消になっていることを言う．(このとき X は K3 曲面になる．)

(2) 体 F 上の K3 曲面 Y が積型の塩田・猪瀬構造をもつとは，楕円ファイブレーション $Y_{\overline{F}} \to \mathbb{P}^1_{\overline{F}}$（すなわち，固有な全射であって生成ファイバーが楕円曲線になっているもの）であって II^* 型の特異ファイバーを 2 個もつものが存在することを言う．

註記. 塩田・猪瀬構造の語は通常次の意味で使われる：$\mathbb{C}$ 上の K3 曲面 Y が塩田・猪瀬構造を持つとは，アーベル曲面 A および $2:1$ の有理写像 $Y \to A/\langle \pm 1 \rangle$ であって超越格子の等長写像 $T_Y \cong T_A$ を誘導するものが存在することを言う．$\mathbb{C}$ 上の K3 曲面が上に述べた意味で積型の塩田・猪瀬構造をもつことは，ここに述べた意味で塩田・猪瀬構造をもちかつ A が楕円曲線 2 つの積になることと同値である．

2001 年に伊藤は次を示した．

定理 0.4 (伊藤 [3, Corollary 4.3]). $p \neq 2$ とする．X を Kummer 曲面とし，K 有理点をもつと仮定する．$H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ が不分岐ならば，K のある有限次不分岐拡大 K' が存在し，$X_{K'}$ は良い還元をもつ．

私はこれを参考にして次を示した．

主定理 0.5 (M.). $p \neq 2, 3$ とする．Y は積型の塩田・猪瀬構造を持つ K3 曲面とする．$H^2_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ が不分岐ならば，K のある有限次拡大 K' が存在し，$Y_{K'}$ は良い還元をもつ．K' は K 上分岐指数が $1, 2, 3, 4, 6$ のいずれかになるようにとれる．

証明は，一言で言えば伊藤の Kummer 曲面の結果に帰着させる（伊藤の結果はアーベル曲面に帰着させる方針で証明される）．もう少し詳しく述べよう：

適当に K を拡大することで，Y からある Kummer 曲面 X への $2:1$ の有理写像が得られる．適当に K を拡大することで，X の 2 次コホモロジー $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ は不分岐になるようにできる（分岐拡大が必要となる（可能性がある）のはこの箇所）．伊藤の結果より，X は良いモデル $\mathcal{X}$ をもつ．一方，塩田（[6, Theorem 1.1]）により，$X/\langle \iota \rangle$（の最小特異点解消）が Y になるような X の involution ι が具体的な形で構成されていて，その構成を $\mathcal{X}$ に適用することができ，Y の良いモデルを構成することができる．

以上では $l \neq p$ に対する l 進コホモロジーと還元との関係について述べた．($p > 0$ のときの）p 進コホモロジーは l 進コホモロジーとは様子が異なるので，上に述べた諸定理はそのままでは成り立たないが，不分岐（l 進）表現に対応すると考えられる「クリスタリン（p 進）表現」という概念があり（定義は省略する），定理 0.1, 0.2 において「l」を

「p」で,「不分岐」を「クリスタリン」で置き換えた主張が成り立つ([2, Theorems 5.3 and 5.6], [8, Theorem 0.2], [1, Theorem 4.7]).これの類似として,私は主定理 0.5 の p 進版も示した:

主定理 0.6 (M.). $p > 0, p \neq 2, 3$ とする.Y は積型の塩田・猪瀬構造を持つ K3 曲面とする.$H^2_{\text{ét}}(Y_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ がクリスタリンならば,K のある有限次拡大 K' が存在し,$Y_{K'}$ は良い還元をもつ.K' は K 上分岐指数が $1, 2, 3, 4, 6$ のいずれかになるようにとれる.

証明は基本的には l 進の場合と並行して進むのだが,一部の箇所では l 進の結果自体を用いる.

主定理の応用例として,特異 K3 曲面に関する次の系がある.(標数 0 の K3 曲面の Picard 数は 20 以下の値をとるが,最大値 20 を達成するものを特異 K3 曲面とよぶ.)

系 0.7. 特異 K3 曲面は潜在的に良い還元をもつ(すなわち,基礎体を適当な有限次拡大で置き換えるとよい還元をもつ).

これは,虚数乗法をもつ楕円曲線は潜在的に良い還元をもつという事実の類似とも考えられる.

証明は次のように行う.特異 K3 曲面は必ず積型の塩田・猪瀬構造を持ち,さらに対応するアーベル曲面は虚数乗法をもつ楕円曲線の積になるという事実がある(塩田・猪瀬 [7]).虚数乗法をもつ楕円曲線は潜在的に良い還元をもつので,伊藤の定理および私の定理の証明の構成をたどることで,問題の K3 曲面の良いモデルを得る.

校正時追記 (2013 年 11 月) : 最近,より一般の K3 曲面の良い還元に関する結果を得た.(論文は準備中)

References

[1] R. Coleman and A. Iovita, The Frobenius and monodromy operators for curves and abelian varieties. Duke Math. J., **97** (1999), 171–215

[2] G. Faltings, Crystalline cohomology and p-adic Galois-representations. Algebraic analysis, geometry, and number theory, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore (1989) 25–80.

[3] T. Ito, Good reduction of Kummer surfaces. Master's thesis, University of Tokyo (2001).

[4] M. Artin, A. Grothendieck and J. L. Verdier, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Tome 3, Séminaire de Géométrie Algébrique 4, Lecture Notes in Math., **305**, Springer, Berlin (1973).

[5] J.-P. Serre and J. Tate, Good reduction of abelian varieties. Ann. of Math., **88** (1968), 492–517.

[6] T. Shioda, Kummer sandwich theorem of certain elliptic $K3$ surfaces. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **82** (2006), 137–140.

[7] T. Shioda and H. Inose, On singular $K3$ surfaces. Complex analysis and algebraic geometry, Iwanami, Tokyo (1977), 119–136.

[8] T. Tsuji, p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. Invent. Math., **137** (1999), 233–411.