

楕円曲線のツイストの族の Mordell–Weil 群について

By

奈良 忠央 (Tadahisa NARA) *

Abstract

We give a lower bound of the canonical height for quadratic twists of elliptic curves over \mathbb{Q} . This is an improved version of the main theorem in [8]. Using those results we can consider the divisibility of points on elliptic curves, that is, whether in Mordell–Weil groups a point is a multiple of some point modulo the maximal torsion subgroup. In this article we report on those researches, referring to related results.

§ 1. 導入

本稿の内容は、 \mathbb{Q} 上の楕円曲線の 2 次ツイストの族について、それらの Mordell–Weil 群の生成元について考察したことの研究報告である。

Duquesne や藤田と寺井は楕円曲線 $y^2 = x^3 - x$ の 4 次ツイストからなる、ある族を構成し、その上の明示的に表されたある 2 つの整数点が Mordell–Weil 群の生成系の一部になれるかどうかについて研究した ([3, Theorem 12.3], [4, Theorem 1.1]). また筆者と藤田氏は共同研究で、楕円曲線 $y^2 = x^3 + 1$ の 6 次ツイストからなる族における 3 つの整数点について類似の考察を行った ([5, Theorem 1.]). 次に 2 次ツイストの族において類似のことを考えた結果が本稿の内容である。これらの考察はいずれも canonical height (標準高さ) を中心的な道具として使ったものであり、特に値の評価が議論の中心になる。2 次ツイストの場合 4 次・6 次ツイストのときと違って、扱うワイエルシュトラス方程式の形が単純ではなく、還元タイプの取り扱いなどで難しさがあった。それによって canonical height の評価において技術的な問題がいくつか生じ、それを解消する必要があったことが 2 次ツイストを後から考えたことの原因である。議論のプロセスにおいては canonical height の有理点全体にわたるときの下界を求めることがひとつの焦点になる。

Received March 31, 2012. Revised January 31, 2013 and March 20, 2013.

2000 Mathematics Subject Classification(s): 11G05, 11D25.

Key Words: elliptic curve, canonical height, quadratic twist, Mordell–Weil group.

*Mathematical Institute, Tohoku University, Aoba, Sendai, 980-8578, Japan.

e-mail: sa4m19@tohoku.ac.jp

canonical height の下界についての結果として、すでに知られているものとして重要なのは、Silverman による論文 [10] で、代数体上の楕円曲線の有理点（トーション点を除く）の集合における canonical height の値は必ず正の下界を持つことを示したものである。

定理 1.1 (Silverman, 1981, [10, Section 4, Theorem]).

K を代数体, E を K 上の楕円曲線とする. このとき E/K のみに依存する正の定数 c_1, c_2 が存在して, 任意の点 $P \in E(K) \setminus E(K)_{\text{tors}}$ にたいして,

$$\hat{h}(P) > c_1 \log |N_{K/\mathbb{Q}} \mathcal{D}_{E/K}| + c_2$$

を満たす. ただし, $\mathcal{D}_{E/K}$ は minimal discriminant とする.

また上記の c_1, c_2 を E にさえ依存しないで取れることを主張するものが, Lang 予想であり, それは ABC 予想から従うことが知られている.

Silverman の定理の証明は, 理論に重点を置いており, 具体的に下界を与えることには適していない. その後, Cremona と Siksek が論文 [2] において下界を与えるためのひとつのアルゴリズムを示した. 定理の掲載は省略させていただくが, 概略は以下である. まず正の実数 μ にたいして, μ が

$$E_{\text{gr}}(\mathbb{Q}) := E(\mathbb{Q}) \cup E_0(\mathbb{R}) \cup \prod_{p|\Delta_E} E_0(\mathbb{Q}_p)$$

の中の点（トーション点除く）においての下界になっているためのある十分条件（主定理）を与える. 次に適当に $\mu = 1$ などの初期値を決め, それが今述べた十分条件を調べることによって, 下界であると確定できれば μ を上げてゆき, 確定できなければ下げてゆくということを計算機的手法によって行い, 満足できるところで止めて $E_{\text{gr}}(\mathbb{Q})$ におけるある下界を得る. 最後はその下界を, tamagawa index ($\#E(\mathbb{Q}_p)/E_0(\mathbb{Q}_p)$) の情報によって決まる適当な平方数で割ることによって, $E(\mathbb{Q})$ 全体におけるある下界を得る.

そのアルゴリズムは有理数体上の楕円曲線についてのものであったが, その後一般の代数体上のものが Thongjunthug によって与えられた ([17]).

§ 2. 主結果

節 1 で述べたように, 点が生成系の一部になりうるかどうかを調べるプロセスでは canonical height の下界を求める必要があるが, 節 1 で紹介した下界についての結果は, ひとつの楕円曲線が与えられた場合に主眼を置いており, 楕円曲線の族にたいしてそのまま適用することは難しい. そこで, 必ずしも正とは言えないが, 族にたいして一様な下界を以下のように与えた.

定理 2.1. E/\mathbb{Q} を楕円曲線とし, E_D/\mathbb{Q} を square-free な整数 D による E/\mathbb{Q} の 2 次ツイストとする. このとき 2-トーションでない有理点 $P \in E_D(\mathbb{Q})$ にたいしての

canonical height の値について次の下界が存在する.

$$\begin{aligned} \hat{h}(P) \geq & \frac{1}{8} \log |D| + \frac{1}{32} \log \frac{(1-|q|)^8}{|q|} + \frac{1}{8} \log \left| \frac{\omega_{E/\mathbb{Q}}}{2\pi} \right| - \frac{5}{96} \log |\mathcal{D}_{E/\mathbb{Q}}| \\ & - \frac{1}{24} \log |j_E^{\text{dnm}}| - \frac{3}{4} \log 2, \end{aligned}$$

ここで j_E^{dnm} は j -invariant の分母 ($j_E = 0$ のときは $j_E^{\text{dnm}} = 1$), $\mathcal{D}_{E/\mathbb{Q}}$ は minimal discriminant, ω_1^{min} および ω_2^{min} は E/\mathbb{Q} の minimal Weierstrass equation にたいする周期で $\omega_1^{\text{min}} > 0$, $\text{Im}(\omega_2^{\text{min}}) > 0$ かつ $\text{Re}(\omega_2^{\text{min}}/\omega_1^{\text{min}}) = 0$, $-1/2$ を満たすものとし, それによって $\omega_{E/\mathbb{Q}}$ と q をつぎのようにおくものとする.

$$\omega_{E/\mathbb{Q}} = \begin{cases} \omega_1^{\text{min}} & (D > 0) \\ \text{Im}(\omega_2^{\text{min}}) & (D < 0, \mathcal{D}_{E/\mathbb{Q}} > 0) \\ 2\text{Im}(\omega_2^{\text{min}}) & (D < 0, \mathcal{D}_{E/\mathbb{Q}} < 0) \end{cases}, \quad q = \exp(2\pi i \omega_2^{\text{min}}/\omega_1^{\text{min}}).$$

注. 文献 [11, Exercise 8.16 (c)] において $\hat{h}(P) > (1/8) \log |D| + O(1)$ という下界があることは知られている. したがって, この定理は $O(1)$ の部分を明示的に E のデータで与えたものと言える (若干 D に依存しているが). また [11] での証明方法と異なり, 我々は canonical height の (Néron) local height function による分解を使ってこれを求めた.

注. この結果は arXiv に投稿してある筆者の論文 ([8]) の結果を改良したものである. [8] においては E の discriminant が 6th-power-free という条件が必要であったが, 本稿の結果ではその条件は必要でなくなった. ただし, discriminant が 6th-power-free である楕円曲線に適用する場合は [8] のほうが良い評価になっている. また [8] では canonical height の定義を本稿での定義の 2 倍にしていることに注意されたい.

この定理 (正確には [8] のほう) を用いて以下のような事実を示すことができる. なお本稿では, 体 F 上の楕円曲線 E について, 有理点 $Q \in E(F) \setminus E(F)_{\text{tors}}$ が $E(F)$ において k 等分点 ($k \geq 2$) を持つということを, $\text{mod } E(F)_{\text{tors}}$ で $Q = kR$ を満たす点 $R \in E(F)$ が存在することとする. また何らかの $k \geq 2$ で k 等分点を持つとき, 等分点を持つ (もしくは可除である) と呼ぶ. 節 1 で述べた, 点の集合が生成系の一部となりうるかどうかの問題は, 1 点の集合のときは可除性の問題とも言える.

定理 2.2. t を整数とし, $D = t^6 + 4t^4 + 30t^3 + 5t^2 + 54t + 245$, E を楕円曲線 $y^2 = x^3 + 2x^2 + 163x + 2205$, E_D を E の D による 2 次ツイスト $y^2 = x^3 + 2Dx^2 + 163D^2x + 2205D^3$ とし, P を E_D 上の点 $((t^4 + 2t^2 + 12t)D, (t^3 + t + 3)D^2)$ とする. また D が square-free であると仮定する. このとき $|t| \geq 11$ ならば $E_D(\mathbb{Q})$ はトーシヨンフリーであり, さらに $|t| \geq 2216$ ならば P は非可除である. 特に $|t| \geq 2216$ で $\text{rank } E_D(\mathbb{Q}) = 1$ ならば $E_D(\mathbb{Q}) \simeq \langle P \rangle$.

注. この定理の2次ツイストの族は節3で述べる構成法から得られた例のひとつであり, 同様にして構成できる他の多くの例についてもこの定理と同様のことが示せる.

可除性の研究としては Gupta と Ramsay による以下のような結果が知られている.

定理 2.3 (Gupta and Ramsay, 1997, [6]). E/\mathbb{Q} を楕円曲線, $\mathbb{Q}(t)$ を一変数関数体, $D(t) \in \mathbb{Z}[t]$ を平方でない多項式とする. このとき, 点 $P_t \in E_{D(t)}(\mathbb{Q}(t))$ が非可除であるならば, 集合 $S := \{n \in \mathbb{N}; P_n \text{ が } E_n(\mathbb{Q}) \text{ の中で非可除}\}$ の密度

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n \in S; n \leq N\}}{N}$$

は1である.

これは関数体上で非可除ならば, 整数で特殊化してもほとんど非可除であることを述べており, Silverman はふるいの理論を利用してこれを改良し, 有理数で特殊化しても密度が1であることを示した ([15]). また, この定理では特殊化したあとの D が square-free であることは仮定していないことに注意していただきたい.

§ 3. 2次ツイストの族の構成

楕円曲線 $y^2 = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (ただし, f は重根を持たない) の D による2次ツイストとは $Dy^2 = f(x)$ で定義される楕円曲線のことである. また, これをワイエルシュトラス標準形にしたものは $y = x^3 + aDx^2 + bD^2x + cD^3$ となる.

この節では, 明示的な一つの有理点をもつ2次ツイストの構成法を考える. そこから得られるある例について, その明示的な一点の可除性を調べた結果が定理2.2ということになる.

$f \in \mathbb{Q}[t]$ をモニックな既約3次多項式とし, $F \in \mathbb{Q}[t]$ を多項式でかつ, ある $m \in \mathbb{Q}$ が存在して $F' = mf$ をみたすようなものとする. すると, 点 (f, F) がある2次ツイスト $Dy^2 = f_1(x)$ 上の点になるように \mathbb{Q} 上の多項式 D, f_1 を見つけることができる. そのようにするには以下のように取ればよい. まず α を f の一つの根とし, f_1 を $F(\alpha)$ の \mathbb{Q} 上の最小多項式とする. このとき $(f_1 \circ F)(t)$ は因子 $f(t)^2$ を持つ, なぜならば $(f_1 \circ F)(\alpha) = 0$ かつ $\frac{d(f_1 \circ F)}{dt}(\alpha) = f_1'(F(\alpha))F'(\alpha) = 0$ であるから. したがって, $(f_1 \circ F)(t)/f(t)^2$ を D とすればよい.

例えば

$$f = t^3 + t + 3, \quad F = t^4 + 2t^2 + 12t,$$

のように選んだとき, 上の手順で f_1 と D を求めると

$$f_1 = t^3 + 2t^2 + 163t + 2205, \quad D = t^6 + 4t^4 + 30t^3 + 5t^2 + 54t + 245$$

となる.

以上の議論を具体的に計算し, 明示的に表示すると以下の補題のようになる.

補題 3.1. $A, B \in \mathbb{Q}$ とし, $f = t^3 + At + B$, $F = t^4 + 2At^2 + 4Bt$ とおく. このとき上の議論での f_1 と D は以下のように明示的に表される.

$$\begin{aligned} f_1 &= t^3 + 2A^2t^2 + A(A^3 + 18B^2)t + B^2(2A^3 + 27B^2), \\ D &= t^6 + 4At^4 + 10Bt^3 + 5A^2t^2 + 18ABt + 2A^3 + 27B^2. \end{aligned}$$

特に, $\text{disc}(f_1) = B^2 \text{disc}(f)^3$ である. ここで disc は多項式の判別式を表す.

このほかの構成の仕方としては単純であるが, 楕円曲線 $y^2 = f(x)$ の $f(t)$ による 2 次ツイスト

$$f(t)y^2 = f(x)$$

とその上の点 $(t, 1)$ がある. また 2 次ツイストからなる族で独立でかつ明示的な 2 点以上の点を持つものの研究には [7], [9] などがある.

なお, 多項式 $D(t)$ (square-free とする) による 2 次ツイストの関数体 $\mathbb{Q}(t)$ 上でのランクは方程式 $s^2 = D(t)$ で定義される超楕円曲線の種数で抑えられることが知られている ([16, Corollary 1]). したがって多くの独立な点を持つ族を構成しようとするならば D の次数が高いことが必要である.

§ 4. Canonical height の評価

まず canonical height について基本的な事項を述べる.

定義 4.1. \mathbb{Q} 上定義された楕円曲線上の \mathbb{Q} -有理点 $P = (x, y)$ (ただし $x = n/d$, $\text{gcd}(n, d) = 1$ とする) にたいして naïve height を $h(P) = \max\{\log |n|, \log |d|\}$ で定義し, canonical height を

$$\hat{h}(P) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(2^n P)}{4^n}$$

で定義する.

canonical height の重要な性質は

- $\hat{h}(P) = 0 \iff P \in E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$
- $\hat{h}(kP) = k^2 \hat{h}(P)$

であり, 特に 2 つ目の性質があるので, 等分点に関する議論をするために canonical height の値の評価を使うことができる.

具体的な計算では canonical height は多くの場合, 以下で述べる local height function による分解を使って行われる.

定理 4.2 ([14, VI, Theorem 2.1]). Néron local height function と呼ばれる関数 $\lambda_v : E(\mathbb{Q}_v) \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$\hat{h}(P) = \sum_v \hat{\lambda}_v(P), \quad P \in E(\mathbb{Q}) \setminus \{O\}$$

を満たす。ここで v は \mathbb{Q} の素点を走る。

local height function の具体的な定義については [14, VI, Theorem 1.1] や [12, 1] を参照されたい。

先に触れたとおり、主定理の証明は local height function による分解を使う。証明の基本的アイデアは素点の集合を適切に分割したうえで、各素点における local height の値をいくつかの公式や定理を用いて計算してゆくものである。概要は以下に述べるとおりである。まず、無限素点における local height $\lambda_\infty(P)$ は Cohen の公式 ([1, Algorithm 7.5.7]) を使って計算する。次に有限素点における評価をするために、点 $P \in E_D(P)$ を $P = (\alpha/\delta^2, \beta/\delta^3)$ のように既約分数で表示し、有限素点の集合 Ω を

$$\begin{aligned} S^+ &= \{p \in \Omega; p \mid \delta, p \neq 2\}, & S^- &= \{p \in \Omega; p \nmid \delta, p \neq 2\}, \\ T^+ &= \{p \in \Omega; p \nmid \delta, p \mid \beta, p \neq 2\}, & T^- &= \{p \in \Omega; p \nmid \delta, p \nmid \beta, p \neq 2\}, \\ U^+ &= \{p \in \Omega; p \nmid \delta, p \mid \beta, p \mid D, p \neq 2\}, & U^- &= \{p \in \Omega; p \nmid \delta, p \nmid \beta, p \nmid D, p \neq 2\}. \end{aligned}$$

のように分割する。このとき $S^+ \cup T^- \cup U^+ \cup U^- \cup \{2\} = \Omega$ は直和になっていることに注意する。そして、これら $S^+, T^-, U^+, U^-, \{2\}$ のそれぞれについて $\lambda_p(P)$ を評価していく。その際、重要となるのが以下の Tate の定理である。

定理 4.3 (Tate, [13, Theorem 4.1]). E を $y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$ で定義される代数体 K 上の楕円曲線とする。 v を K の有限素点とし、各 a_i は v -integral とする。このとき、

$$-\frac{1}{24} \log \max\{1, |j_E|_v\} \leq \lambda_v(P) - \frac{1}{2} \log \max\{1, |x(P)|_v\} \leq \frac{1}{12} \log |\Delta_E^{-1}|_v$$

が成り立つ。ただし、 v 進絶対値 $|\cdot|_v$ は、 K_v の uniformizer π_v にたいして $|\pi_v|_v = \#(O_{K_v}/(\pi_v))^{-1/[K_v:\mathbb{Q}_p]}$ となるように正規化したものとする。

この定理の証明においては、Tate curve にたいしての local height function の公式 ([14, VI, Theorem 4.2]) が本質的役割をはたす。

以上の評価をすべて合わせることによって証明は完成する。

この証明では用いなかったが、他にも local height function の計算についてはいくつかの公式があり、それを使い分けることができる。無限素点の場合には Tate の級数 ([12, Theorem 1.2]), 有限素点の場合には Silverman によるアルゴリズム ([12, Theorem 5.2]) などがある。

尚, 以前のバージョンであり, arXiv に投稿してある [8] では E の discriminant Δ_E が 6th-power-free という条件が付いていたため, $\text{ord}_p(\Delta_E)$ が任意の p について一様に上から抑えられており, 証明には以下に記した等分多項式の恒等式と [12, Theorem 5.2] を用いて評価をしていた. その手法を使う場合, 6th-power-free に限らずとも $\text{ord}_p(\Delta_E)$ がひとたび上から一様に抑えられれば, 下界の評価をすることができるが煩雑な計算がそのつど必要である.

補題 4.4 (等分多項式の恒等式). E/\mathbb{Q} を $y^2 = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$ で定義される楕円曲線とし, E_D を E の D による 2 次ツイストとする. また

$$\begin{aligned} k_D(x, y) &:= 3x^2 + 2a_2Dx + (4a_4 - a_2^2)D^2, \\ l_D(x, y) &:= 9x^3 + 9a_2Dx^2 + (21a_4 - 4a_2^2)D^2x + (27a_6 - 2a_2a_4)D^3. \end{aligned}$$

とおく. このとき

$$-16k_D \cdot \psi_3 + 4l_D \cdot \psi_{2a} = -\Delta_E D^6$$

が成り立つ. ただし, $\psi_3 \in \mathbb{Z}[a_2, a_4, a_6, x]$ は E_D の 3 等分多項式, $\psi_{2a} \in \mathbb{Z}[a_2, a_4, a_6, x]$ は E_D の 2 等分多項式の平方とする.

等分多項式については [11, Exercise 3.7] を参照されたい.

§ 5. 定理 2.2 の証明概要

この節では定理 2.2 の証明の概要を述べるが, そこで柱となるものは $E_D(\mathbb{Q}) \setminus E_D(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$ における canonical height の下界と, 点 P の canonical height の上界である. まず前者の下界についてであるが, この曲線の場合は Δ_E が 6th-power-free という条件を満たしているので, [8, Theorem 1.1] を適用することができ, それによってただちに次の命題 5.1 を得る. discriminant が 6th-power-free でない楕円曲線の場合には定理 2.1 を使えばよい.

命題 5.1. D を square-free な正の整数, E_D を楕円曲線 $y^2 = x^3 + 2Dx^2 + 163D^2x + 2205D^3$, $Q \in E_D(\mathbb{Q}) \setminus \{O\}$ とする. このとき

$$\hat{h}(Q) > \frac{1}{8} \log D - 1.773.$$

注. この曲線が自明でない 2-トーション点を持たないことはすぐにチェックできるので $Q \in E_D(\mathbb{Q}) \setminus \{O\}$ にたいしての下界となっている.

次に点 $P = ((t^4 + 2t^2 + 12t)D, (t^3 + t + 3)D^2)$ の canonical height の上からの評価を行った結果が以下である.

命題 5.2. t を整数, $D = t^6 + 4t^4 + 30t^3 + 5t^2 + 54t + 245$, E_D を楕円曲線 $y^2 = x^3 + 2Dx^2 + 163D^2x + 2205D^3$ とし P を整数点 $((t^4 + 2t^2 + 12t)D, (t^3 + t + 3)D^2)$ とする. このとき

$$\hat{h}(P) < \frac{1}{3} \log D + 0.6089.$$

この命題の証明は省略するが, 方針としては下界のときと同様, local height による分解を使って評価していくというものである. ただし, 無限素点での local height の評価には Tate の公式 ([12, Theorem 1.2]) を使う. Tate の公式はこの楕円曲線のように y 軸を横断する形のときは, そのまま公式を適用できないので, あらかじめ適当に x 軸正方向にずらしたモデルに変換する, といった多少の技術的工夫を要する.

これらの準備をもとに定理 2.2 を証明する. もし点 P が $E_D(\mathbb{Q})$ において k 等分点 ($k \geq 2$) を持つと仮定すると $P = kR + T$, ($R \in E_D(\mathbb{Q})$, $T \in E_D(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$) と表されるので $\hat{h}(P) = k^2\hat{h}(R)$ が成り立つ. よって点 P が k 等分点を持たないことを言うためにはどんな R にたいしても $\hat{h}(P) < k^2\hat{h}(R)$ であることを示せば十分であり, したがって $\hat{h}(P) < 2^2\hat{h}(R)$ を示せば点 P が等分点を一切持たないことが言える.

今, 命題 5.1, 5.2 があるので,

$$(5.1) \quad \frac{1}{3} \log D + 0.6089 < 2^2 \left(\frac{1}{8} \log D - 1.773 \right)$$

が成り立てば明らかに $\hat{h}(P) < 2^2\hat{h}(R)$ が成り立つ. (5.1) が成り立つためには $|t| \geq 2216$ であれば十分であることは容易に計算できる. また命題 5.1 によって, $|t| \geq 11$ ならば $Q \in E_D(\mathbb{Q}) \setminus \{O\}$ にたいして $\hat{h}(Q) > 0$ であることが計算できるので, このときトーションフリーであることもわかる.

定理の証明についてはこれで終わりであるが, $|t| < 2216$ の場合についても可除性を調べることは, 以下のように可能である. $|t| \geq 11$ ならば $\hat{h}(P) = k^2\hat{h}(R)$ を満たす可能性のある k は高々 11 以下であることは, 上記の上界と下界を使った計算によりわかる. したがって等分点を持つかどうかをしらべるには, $k = 2, 3, 5, 7, 11$ についてのみチェックすれば十分であり, これは Magma のコマンド `DivisionPoints` で可能である. また $|t| \leq 10$ のときは, 定理を適用して得られる下界が負になってしまい, 使うことが出来ないので節 1 で述べた Cremona と Siksek のアルゴリズムなどを使って個別に正の下界を求め, それに基づいて可能性のある k を絞り込み, 再び Magma でこれらの k について k 等分点を持つかどうかを調べればよい.

最後に, 丁寧な査読と多くの重要な指摘をしてくださったレフェリーに感謝申し上げたい.

References

- [1] H. Cohen, A Course in Computational Algebraic Number Theory, Springer-Verlag, 1993.

- [2] J. Cremona and S. Siksek, Computing a lower bound for the canonical height on elliptic curves over \mathbb{Q} , In: Algorithmic Number Theory, 7th International Symposium, ANTS-VII, (2006), 275–286.
- [3] S. Duquesne, Elliptic curves associated with simplest quartic fields, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **19** (2007), 81–100.
- [4] Y. Fujita and N. Terai, Generators for the elliptic curve $y^2 = x^3 - nx$, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **23** (2011), 403–416.
- [5] Y. Fujita and T. Nara, On the Mordell–Weil group of the elliptic curve $y^2 = x^3 + n$, *J. Number Theory*, **132** (2012), 448–466.
- [6] R. Gupta and K. Ramsay, Indivisible points on families of elliptic curves, *J. Number Theory*, **63** (1997), 357–372.
- [7] M. Kuwata, Quadratic twists of an elliptic curve and maps from a hyperelliptic curve, *Math. J. Okayama Univ.*, **47** (2005), 85–97.
- [8] T. Nara, Lower bounds of the canonical height on quadratic twists of elliptic curves, preprint, arXiv : 1110.6710, 2011.
- [9] K. Rubin and A. Silverberg, Rank frequencies for quadratic twists of elliptic curves, *Experiment. Math.*, **10** (2001), 559–569.
- [10] J. H. Silverman, Lower bound for the canonical height on elliptic curves, *Duke Math. J.*, **48** (1981), 633–648.
- [11] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer, 1986.
- [12] J. H. Silverman, Computing heights on elliptic curves, *Math. Comp.*, **51** (1988), 339–358.
- [13] J. H. Silverman, The difference between the weil height and the canonical height on elliptic curves, *Math. Comp.*, **55** (1990), 723–743.
- [14] J. H. Silverman, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer, 1994.
- [15] J. H. Silverman, Divisibility of the specialization map for twists of abelian varieties, In: *Topics in Number Theory, In Honor of B. Gordon and S. Chowla*, Kluwer, (1999), 245–258.
- [16] C. L. Stewart and J. Top, On ranks of twists of elliptic curves and power-free values of binary forms, *J. Amer. Math. Soc.*, **8** (1995), 943–973.
- [17] T. Thongjunthug, Computing a lower bound for the canonical height on elliptic curves over number fields, *Math. Comp.*, **79** (2010), 2431–2449.