

デデキントの数学思想

Mathematical Thoughts of Richard Dedekind

足立恒雄 (早稲田大学)
ADACHI Norio, Waseda University

Abstract In his immortal “Was sind und was sollen die Zahlen” R. Dedekind asserts that we are justified in calling numbers a free creation of the human mind. However, who literally believes natural numbers can be freely created by the human mind? Most people must think that natural numbers uniquely exist beyond our existence. We consider this assertion of Dedekind’s from the point of view of the meaning of the word “freedom”.

1 「三つの謎」

デデキントの著作を読むと、数学的にはすべて理解できたような気になるのだが、どこか腑に落ちないものが残らないわけではない。それはデデキントが主張するように、数は本当に人間精神の自由な創造なのだろうかという問題であり、またどうして現代の抽象数学の創始者であるデデキントともあろう大数学者が「無限集合の存在」を「証明」するのに「われわれの思考対象の全体」といった、他の箇所とは大変調子の異なった考察を持ち出すのかという疑問である。

こうした問題は数学の哲学を論じる世界ではある程度知られた問題らしい。たとえば、『デデキントからゲーデルまで』という本に「リヒャルト・デデキントの謎」(D. C. McCarty, “*The Mysteries of Richard Dedekind*”) という論文が収録されていて、その中ではデデキントの二つの著作『連続性と無理数』と『数とは何か』を巡る三つの「謎」が論じられている。哲学的な論文の通弊で、凝った（言い換えれば、誇張に満ちた）表現で迷彩されているため判読がむずかしいが、McCarty が扱っている「三つの謎」は次のように要約できる：

1. 『数とは何か』の中で (第 66 項), 「無限集合の存在」が「証明」されているが、どうして「私の思考の精神世界」といった奇妙な代物を考えたのか？
2. 『連続性と無理数』において実数体の範疇性が証明されていないのはなぜか？

3. 『数とは何か』において強調される「数は人間精神の自由な創造である」という主張はどういう意味か？

第二の「謎」だが、ワイアシュトラス、カントル等による実数体の定義、あるいは特徴付けがすでに考察されていることをデデキントが承知していたということ、そしてまた『数とは何か』においては、自然数の体系が範疇的であることを証明していることも考慮すると、確かに変かもしれない。しかし、デデキントは『連続性と無理数』において実数体の（連続な順序体という）特徴付けを与えているわけではない。したがって、範疇性という問題意識そのものが無理だという気もする。『連続性と無理数』が出版された1872年の段階でデデキントが代数系の同型性という概念を手にしていただかどうかについては少し調べてみる必要がある。いずれにしても、本書では自然数の体系に考察を限定しているのでこの問題はまた折を改めてということにしよう。

ただ、デデキントが切断によって生じる実数を切断そのものとは区別して考えていることも、McCartyは第二の謎に含めて考察しているが、これはわれわれの扱っている問題とも関連している。すなわちデデキントが次のように述べていることに注目するのである：

さて（有理数の）一つの切断 (A_1, A_2) が存在して、それが有理数によって引き起こされたものでないとすると、そのたびごとにわれわれは一つの新たな数、一つの「無理数」 α を創造し、われわれはこれをこの切断 (A_1, A_2) によって余すところなく定義されるとみなすのである。この数 α は切断に対応するとか、この数がこの切断を引き起こすとか言うことにする。だから今後は確定した切断の一つ一つには、一つのそうしてただ一つの確定した有理数または無理数が対応するし、二つの数が本質的に相異なる切断に対応するときにはこの2数をいつでも、またそのときに限り、「相異なる」とか「等しくない」とか、みなすのである。（『連続性と無理数』、§4 「無理数の創造」より）

何気なく読むと大した疑問を感じないが、H. ウェーバー（1842-1913）が「切断と実数とを同一視する方が良いのではないか」と問うたのに対して「そうではない」と断言している書簡（後に引用する）を読むとき、第三の「謎」とも関係してこれは看過できない問題なのだということがわかってくる。したがって「第二の謎」は「なぜ切断を実数と見なさないのか」と問い直せば、三つの謎はデデキントの数学思想という意味で関連し合ってくる。

現在の段階で指摘できることとして、「無理数の創造」としていることから、デデキントが実数体を実在的に捉えているのではないということは確かである。

「第三の謎」だが、自然数という概念には説明の余地こそいくらかあり得るだろうが、自然数が恣意的に創造できる対象だとはとても思えない。どうしてこんなところに「自由な創造」を持ち出すのだろうかとは私も常々疑問に思っていた。ク

クロネッカーが概念形成の自由を制限したこと、さらに広く捉えれば、カントルに対する弾圧に象徴される横暴な振る舞いへの反発の表れなのではないかというように感じていた。実際、そういう意味があることは、次の文章からも明らかである：

第2項 相異なる事物 a, b, c, \dots を、何らかの動機から、一つの共通な観点の下に把握して、心の中で (im Geiste) 全体としてまとめるということがしばしば起こる。このときこれらの事物は「集合」(System) S を作るという。事物 a, b, c, \dots を集合 S の「要素」と呼ぶ。(中略) このような集合はわれわれの思考の対象として、第1項で述べた意味で、やはり一つの事物である。集合 S は一つ一つの事物が S の要素であるか、ないかが確定すれば、余すところなく確定する*)。したがって集合 S が集合 T と同じであるというのは、記号で $S = T$ と書くが、 S の一つ一つの要素が T の要素でもあり、また T の一つ一つの要素が S の要素でもあることである。(後略)

原注*) どういう仕方でこの確定が生じるか、またこれを見分ける方法をわれわれが知っているかどうか、ということは、以下のあらゆることに対しては全くどうでもよいことである。(中略) このことを言葉に表してはつきりさせておくのは、クロネッカー氏が、少し前に (Crelle, Bd. 99, 334-336) 数学における自由な概念形成に対して、ある種の制限を置こうと欲したことに対して、私はそれを正当とは認めないからである。(後略)

— 『数とは何か』より

この脚注は、クロネッカーが加群などはすべて有限変数の多項式環の中でのみ考えるべきであるとして、デデキントの名前を挙げて、一般的な加群、イデアルなどを否定したことに対応している。

次も同じ趣旨の記述である：

自然数だけを使用して、他のものは用いないとか、自然数だけしか認めないとか、いうことには何も役に立つことがあるとは思えないし、(数学のどの定理も自然数に関する定理として述べられるという) ディリクレの説とも関係はないのである。それどころか数学においても他の科学においても、最も偉大な結果を生む進歩は、とりわけ新しい概念の創造と導入によって果たされてきたのである。

だが、「自由な創造」という言葉には、クロネッカーに対する抗議という意味だけでなく、デデキントのもっと積極的な思想的立場の表明が込められているということもわかってきた。

McCarty の論文では、「三つの謎」の問題を、結論的には「カント哲学の影響」というところに話を持って行っているのだが、こうした見解は私の守備範囲から

逸脱するので、こんな論文があることを紹介するにとどめ、本講演ではデデキント自身が書いたものによって、数学的な立場からこれらの問題を論じてみよう。

2 第一の謎

第 66 項 (定理) 無限集合は存在する。

証明 私の思考の世界, すなわち私の思考の対象となり得るあらゆる事物の全体 S は無限である。何故かという、もし s が S の要素とすると、「 s が私の思考の対象であり得る」という考え s' はそれ自身 S の一つの要素である。これを要素 s の像 $\varphi(s)$ と見なせば、これによって確定する S の写像 φ は、その像 S' が S の部分集合であるという性質を持っている。しかも S' は S の真部分集合である。というのは、 S の中には、このようななどの考え s' とも異なり、従って S' の中には含まれない要素 (たとえば、私本来の「我」が存在しているからである。最後にもう一つ、 a, b が S の相異なる要素ならば、その像 a', b' は相異なることは明らかだから、写像 φ は区別のつく相似写像 (単射) である。よって S は無限である。証明終わり*)。

*) 原注 同様な考察はボルツァーノの『無限の逆説』の第 13 節にある。

ボルツァーノのような神学者・哲学者ならいざ知らず、デデキントともあろう生粋の数学者がどうしてこんな、他の項とは調子のまったく異なる「世界」を持ち出してきたのか、読者は不審に思われないだろうか。師であるガウスにせよ、敬愛するディリクレにせよ、兄貴分のリーマンにせよ、数学的議論の場に、こんな哲学的というか、あいまいな議論を持ち出したりしたことはなからう。

まず普通に考えるなら、 I を一つの物として I' を考える、さらに I'' を考える、…、一般に a が定義できたとして a' を考えるという操作を続けて、その全体を A とし、この A は $\varphi(a) = a'$ という、全射でない単射 φ を有するので無限集合である、と主張すればよいように思えるかもしれない。

しかしこの議論にはいくつか問題が指摘できる。まず、自然数の体系が定義されていない段階で、再帰的定義を考えるのも問題であるが、定義された限りでは有限個の事物でしかないのに、まだ定義されていない事物の全体を考えるというのは、そもそもデデキントが何のために『数とは何か』を著そうとしているのか、その根幹に係わる問題である(「再帰性定理」(126 項)を思い出そう)。

上記の議論は、「…なる要素の全体を考える」というのが問題なので、次のように修正することも考えられる：

すべての要素（集合も含めて考える）からなる集合を Ω としよう． $x \in \Omega$ に対して x' という記号を対応させる写像 $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ を考えると， φ は単射であって全射ではない．

Ω を集合とすると矛盾を生じるというのは『数とは何か』発刊以後に見つけ出されたことだから，これは措くとしても，この議論には，次のような問題がある．

対象 a が「何かの事物」であるとしても， a' とは何か？ デデキントは第 1 項で，「記号 a は本当は a によって表される事物を考えているのであって，文字 a 自身のことではない」と断っている．すなわち記号は背後に何かの実体を想定しているものであって，「単なる記号」そのものではないのである．従って， a がある事物を表すとしても a' はどんな事物を表しているかが説明されていないことになり，具合が悪い．

そこで，対象 x に対して単集合 $\{x\}$ を対応させる写像を φ とすればよいだろうということに思い至る．公理化を提唱したツェルメロの 1908 年論文では実際，数 x の「次の数」を $\{x\}$ と定義しているのを見ればわかるように，これが一番自然で素直なアイデアであろう．そうすれば問題は Ω が集合をなすという前提だけに集約されることになる．ただ，デデキントの場合は，本章で解説した通り a と $\{a\}$ を区別していない．こうしたことも，結局は「思考世界」を持ち出さざるを得ない原因になったのかもしれない．

要約するなら，集合と写像という基本的概念によって自然数の体系を基礎付けられるはずであるという信念に従うために，無限集合の存在を証明できない「公理」と認めることはできないとするなら，デデキントには他の例を持ち出すことは困難だったのではなかろうか．

デデキントは『数とは何か』の初版段階ではボルツァーノの著作を知らなかったことが第 2 版の序文に述べられている．従って，ボルツァーノの議論との類似性は偶然だということになる．こうした偶然が起き得る理由としては，無限に関する考察，とりわけ「 A は真である」とか「 A は思考の対象であるという考え」といった議論の仕方は西洋文明の伝統に根ざす，さほど新奇な発想ではなかったのではないかということが考えられるだろう．実際，ボルツァーノが無限の存在に対する他者からの反論を記している，その書き振りからもそのように感じられる．（長さの異なる線分上の点の対等性に関する議論が 14 世紀にすでにあったことなども思い出される．）

さて，ボルツァーノの議論とデデキントのそれとでは微妙に異なるので，それを一言指摘しておきたい．ボルツァーノは考えている集合体が無限である根拠として，数列との比較を挙げている．つまり数列が果てしなく続くので，それに対応して命題の集合も無限だと主張しているのである．

しかし，数列について述べた第 8 節には，これが無限集合を成すとは書いてない．そればかりか，第 15 節では，すべての数（自然数）の集合が無限であること

はすべての真理自体の集合の場合と同様の仕方で示せると述べている。これでは証明になっていないことは明らかである。おそらくは、数の集合も命題の集合も、限界なくあるので、それらの「集合」は無限集合だと主張しているだけなのであろう。

要約すると、ボルツァーノの哲学的な議論とデデキントの議論との類似は、伝統的な無限に関する考察に基づいているものであって、現代数学的な観点からは表面的な類似に留まるのではないだろうか。

なお、デデキントの言う論理主義というものが、思考世界における論理を意味しているのであって、ペアノやヒルベルトが考えているような形式主義的な意味合い、つまり数学の理論を一つの閉じた世界とみなすというような意味合いはないことも無限集合の「存在証明」からわかるだろう。「思考の世界」というものがデデキントの思想の中心にあるらしいということも記憶に留めておきたい。

3 「数は人間精神の自由な創造である」

次に、第三の謎に関して考察してみよう。これがカント的な用語であるのかどうかは措いておくことにして、デデキントが気のきいたセリフ、une façon de parler (言葉の綾) のつもりで書いているのではないのは、初版序文と第73項の二度にわたって同じ言葉を使っていることから察せられる。まず序文の方からみてみよう：

私が算術(代数学, 解析学)を論理学の一部分に過ぎないと言うのは、数概念は空間・時間の表象(Vorstellungen)や直観(Anschauungen)にはまったく独立であり、むしろ純粋な思考法則から直接流れ出した結果と考えていることを意味している。本書の表題に掲げた疑問に対する解答は次である：**数は人間精神の自由な創造物である**。そしてそれは、事物の相違を、より容易に、より鋭敏に捉えるための手段として役立つということである。

空間・時間についてのわれわれの表象を、数領域に関係付けることによって、正確に探求する準備ができるのは、純粋に論理的に数の科学(足立注—算術のこと)を構築し、次いで連続的な数領域(足立注：実数体のこと)を獲得してからのことであり、そしてその**数領域はわれわれの精神の中で創造されるのである**。

われわれが物の集まりを数えるとか、事物の総数を求めるとかいう際に、われわれがどういうことをするのかを精密に追求すれば、事物を事物に関連させ、一つの事物を他の事物に対応させ、一つの事物を他の事物によって表すとかいうような精神の能力の考察に導かれる。この能力がなければ、一般にどんな思考も可能ではない。この唯一にして必要不可欠の基礎の上に数の全科学が打ち立てられねばならないというのが私の見解である。

「数とは何か、そして何であるべきか」に対してデデキントが準備した答は、実は序文の冒頭に記されているのである。つまり、われわれ数学者（少なくとも、私）は何となく読み飛ばしてきたように思うのだが、意外なことに「数は人間精神の自由な創造である」というのがデデキントが一番主張したかったことなのである。

もしも「自由な」という形容語が冠されていなければ、それほど違和感を感じることはないかもしれない。ただ言われてみれば、「われわれの精神の中で」ということが、かなり強調されていることに気が付く位のものであろう。

デデキントは、第73項でも再度同じ主張を繰り返す：

第73項(定義) もし写像 φ によって順序付けられた単純無限集合 N の考察にあたって、要素の特殊な性質をまったく度外視して、その区別のつくことだけを固持し、順序付ける写像 φ によって相互に付けられた関係だけを取り上げるならば、これらの要素を自然数または順序数または単に数と呼び、要素1を数系列 N の基準数と呼ぶ。要素から他のどんな内容も捨象したことを考えれば、数は人間精神の自由な創造であると言ってよい。

そして、算術の範疇性を証明し、「すべての単純無限集合は一つの（順序同型）類を作っている。これによって、私の信ずるところでは、第73項において打ちたてた数の概念の定義はすみずみまで正当なものと認められる」（第134項）と自己評価したのであった。

「同値類別による抽象化」という手段は人類に固有なものなのだという認識の表明であるなら、フレーゲやラッセルの認識とも共通するので、とても納得的である。フレーゲやラッセルとの違いはどこにあるのだろうか？（結論を言うと、デデキントは同型類のことを自然数の体系と呼んでいるのではないのである。）また「自由」とはどういうことを意味するのだろうか？

しかし、数は本当に人間精神の自由な創造であろうか？ 少なくとも数が自然数を意味する限り、せいぜい「数の説明」に選択の余地があり得るだけではなかろうか？ そこで「自由」という言葉が、「恣意的」という意味を含まない可能性があるのではないかということも考える必要が出てくる。つまり、デデキントが使っている自由という言葉がわれわれが自由という言葉から受け取る意味とまったく異なっているという可能性である。

さて、デデキントは『数とは何か』の初版序言で、23歳のときガウスの面前で話し、宜われたとしている就職講演（1854年）で次のような興味深いことを述べている：

もしも各科学の主たる目的を「真理」—すなわち、われわれにとってとはまったく無関係な存在であるか、あるいはわれわれに関係するとしても、われわれの恣意的な創造ではなくて、われわれの活動とは独立な必然性—を理解する努力に見るならば、最終的な結果、最終の目

的地は、われわれはいずれにしても近づくことができるだけで、一定不変であり、変えることができない。

対照的に、科学自身は、これはこれらの結果に至る人間の知識の過程を表すのだが、無限に多様で、無限に異なる表現が可能である。これは、人間の仕事として、科学が人間の恣意性に従属するからであり、精神的能力の不完全性に従属するからである。

限界のない理解力に恵まれた人間がいるとすれば、本質的に科学はありえないだろう—そんな人間にとっては、われわれなら長い推論の連鎖を通じて達する最終結論がたちまちに自明なものとしてわかるだろうからである。

これを読むと、デデキントが「真理」を直接把握することはできないのだと考えていたことがわかる。これは実在主義に対して、機能主義と呼ばれている、一種の不可知論的立場の表明と考えられるだろう。

『数とは何か』の序文の冒頭の脚注に、クロネッカーの素朴な直観主義やヘルムホルツの経験主義に同意しないこと、そのために『数とは何か』を出版することにしたのだとも述べている。また、真理は内的直観によって与えられるものではなく、長い論証の連鎖によって初めて明白とも思われている真理に到達できるのだと書いている。

しかしながら、上の引用に続いて科学の諸分野の多様性を指摘した後、やや調子の異なることが述べられている：

数学は、すべての科学の中で最も確かであるとされているが、他の科学とはまったく異なる形で現れるように見えようとも、この一般法則の例外を成すものではない。数学においても、定義は最初から必然的に制限された形で現れ、その一般化はさらなる発展の過程においてのみ出現する。しかしながら、この点で数学は他の科学から特色付けられるのだが、定義の拡張はもはや恣意性の余地を残さない。逆に、定義の拡張は初期の制限された定義の設ける強制的な必然性に従うのである。

この後、ピーコック流の「普遍性原理」のような思想が述べられる。つまり自然数は加法と乗法しか許されないが、減法や除法、負数の乗法などは必然性をもって導入されるのであるから、量の概念を使って説明したりすべきものではない、一定の方法で説明されるべきだと主張される。歴史的には有理数や無理数もアドホックに説明されてきたが、数体系の拡張には必然性があるのだとも述べられている。

したがって、デデキントは数体系には必然性はあるが、発見されるものではなく、創造されるものだ、という信念を持っていることになるだろう。

以上によって、「自由」という言葉が「恣意性」とは無縁であり、また「必然性」とも背反的でない使われ方をしているということが示唆されるだろう。こうした「自由」の概念の使い方としては次のような背景が考えられる：

1. 人間の選択行動に関して、それが内的必然性によって決定されていること（自律性による自由）。
2. 近世までは高貴なる者が有する特権を意味した。それが一般化して、人間（デデキントの言う「聖なる種族」）であることの特権を意味する場合がある。
3. 「人間の本質は自由である」（カント）という言葉から、自由とは人間であることの言い換え、あるいは修飾語になっている場合がある。

次のH. ウェーバー（1842-1913）に宛てて書いた書簡（1888）はこうした見方を裏付ける重要な史料である：

私はあなたに、基数ではなく、序数の方を根源的な数概念とみなすということをご告白しなければならない。（中略：この序数は通常の文法的な意味ではなく、単純無限集合の要素であることが断られている。）基数は序数の応用にすぎないと考えています。われわれの計算でも4という概念を経て初めて5という概念に達するのです。しかし仮にあなたの道筋を辿ったとしても、（この道を最後まで一度は極めてみることを強く勧めますが、）人は数というものを、類（互いに対等なすべての集合の系）そのものではなくて、精神が創り出す（この類に対応する）「新しい何か」（*etwas Neues*）だと理解しています。われわれは聖なる種族であり、疑いもなく創造する力を有しています。単に鉄道や電信といった物質的な物だけではなく、とりわけ精神的な物においてです。これはあなたが手紙の最後の方で私の無理数の理論との関連で取り上げた問題とちょうど一致しております。あなたは無理数は切断以外の何物でもないとおっしゃいますが、私は切断に対応して、切断とは異なる新しい何かを創造する、そしてまた逆にそれが切断を生み出す、と考えたいと思います。

われわれはわれわれ自身にそのような創造力を帰する権利を有します。しかもさらにすべての数の相似性の故にこんな風に進む方がより適切でもあります。有理数も切断を生じますが、有理数をそれが生じる切断と同一であるとは私は決して言いません。（中略）まったく類似のことが基数の類としての定義に当てはまります。人は大いに不承不承にその数に適用する類について多くのことを言うでしょう（たとえば、無限に多くの相似な要素を持つ系であるとか）：だれであろうと数4が無数の要素を持った系であると好んで考えたりはしません。（しかし数4は数3の子供であり、数5の母であるということはだれもが忘れない何かです。）

同じ理由で、私はクンマーによる理想数の創造を、それが厳密に実行されさえすればですが、完全に正当化されると考えます。

ここでは「自由な」という形容語は使われていないから、デデキントの言葉が素直に耳に入って来るのではないだろうか？ デデキントは同値類別等によって定義された対象は、新たに創造された対象であって、古いしがらみを脱しているのだということを強調している。

結論として、「自由」というのは「人間」であることの言い換え、あるいは強調に過ぎないと見られる。73節では、抽象化したのであるから人間精神の自由な創造であると書いている。つまり、人間だから可能なことなので、「自由を本性とする人間精神の創造である」というのが噛み砕いた主張なのではないだろうか。同時にこうした概念が人間とは無関係に実在しているものの発見ではないということも強く主張していると思われる。

4 「自由」という言葉の使い方比較

4.1 カントルの場合

カントル、ブラウワーも自由という言葉を使った数学者として知られている。その用法の違いを見てみよう：

カントルは『一般多様体論の基礎』（“*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*”：1883）の中で無限順序数を定義し、その理論の正当性を主張するために数学の自由性について論じている。要約すると次のようである：

数学の諸概念は無矛盾でなければならないが、同時に先に与えられた概念との関係が確定的に区別できるように与えられていさえすれば、数学においてはその概念は存在しており、実在的であるとみなせる。しかし、当の概念が実りないものであれば、この概念は自らの無用さによって放棄されるのである。これとは反対に、数学的な研究の衝動を過剰に狭めようとすることは何であれ、はるかに重大な危険をもたらす。こうした狭隘化を正当化するいかなる論拠もこの学問の本質からは導き出せないが故に、この危険は一層重大なのである。導き出せないというのは、数学の本質はまさにその自由に存するからである。

（カントル『一般多様体論の基礎』第8節）

最後の一節がきわめて有名だが、この「自由」はごく普通の、現在でも使われている意味であり、クロネッカーがカントルの論文の出版を妨害したり、就職を邪魔したりしたことに抗議する意図から書かれていることは明白である。ここではカントルは「無矛盾 \equiv 存在」という現代数学では広く認められるに至ったテーゼを述べたに過ぎないが、カントル自身は自らの集合論に対して強烈な実在意識を持っていて「自然数の全体のなす集合は神の御許に厳然と実在している」と記した書簡も残されている（だから後に発見される素朴集合論の矛盾などは、カントルにとっては、集合論の豊穡性を示す、新しく解決されるべき問題でしかなかった

た)。つまり、この論文では、自らの信条を、百歩譲って、無矛盾であって、しかも理論が実り豊かであれば、考えても構わないはずだと主張しているのである。

4.2 ブラウワーの場合

ブラウワーもデデキントと同じく「数学は人間精神の自由な創造である」という思想の持ち主であるが、その意味するところは大変異なる。ブラウワーの思想を簡単に要約してみると次のようになる：

1. 根源的な現象は時間直観以外の何物でもない。人間は自然とのすべての相互作用に伴う能力、生活を数学的に観る能力、つまり世界の中に列の反復、時間における因果の体系を観る能力を有する。
2. 根源的直観は1,2ばかりではなく、それに続くすべての順序数を創造する。数の必要にして十分な原料は「前後」関係だけである。基本的な2-1性直観は時間の動きの知覚に由来する。
3. 科学、推論、そして数学のすべては、究極的には、数の順序づけられた列そのものに還元し得る。
4. 直観主義の数学は本質的に言語のない精神構造であって、根源的直観としての抽象的「双性」の自己展開である。
5. 数学は言語的に表現される理論でもなければ、また何か客観的な実在に関する抽象的な真理の集積でもなく、むしろ人間精神の行動、あるいは創造である。
6. 数学は純粹直観に作用する個人の精神であり、自己充足的であり、物理的世界からは完全に隔離されてある。個人的意識だけに関係する自我の内的世界である。
7. 真理は実在（すなわち過去現在の意識の経験）の中、にある。
8. ヒルベルトの計画は最初から成功の可能性がない。彼の議論は数学の基礎を形式化といった不適切で無関係なものに求め、数学を閉じた体系として外部からの正当化に求めようとしている。真の正当化は根源的直観の把握の中に求められるべきである。
9. 言語的表現は数学に本質的なものではなく、数学的構成の精神的過程を個人的記憶として留めておくための補助手段である。言語は意思を通じるための不完全な道具に過ぎないから、相手に望むような構成を辿らせるのに成功しないかもしれない。

10. 証明とは数学的構成（建造）を実行することである。数学にとって絶対的に安全な言語は存在しないので、論理主義者や形式主義者が考えるように、証明を命題の論理的な関係の列と見ることはできない。
11. 印刷された言葉は読者をして著者が意図した構成を辿るのを可能にする説明書でしかない。
12. パラドクスなどというものは純然たる言語の問題にすぎないので、最初から問題ではない。それは創造する自我によって実行される数学的構成とは何の関係もない。論理と数学は何の関係もない。（したがって、1階述語論理で表した公理系などというものは最初からナンセンスで、その無矛盾性を証明しても、数学の実在性を証明したことにならない。）
13. 論理学は一種の応用数学である。論理は数学の基礎に依存するが、逆ではない。
14. 数学の構成は永遠に固定されているということではなく、自由に成長し、人間の経験とともに変化していく。形式的体系は、静的なため、創造的な数学的活動の開いたダイナミックな領域を把握することは不可能である。
15. 数学的命題は、証明されたか、否定が証明されたか、これから真偽が知られるかのどれかであるから、排中律の無原則な使用は認められない。
16. 直観主義的論理の有効な結論であっても、なお直接的精神的構成によって確認されるべきであって、不正確であることが判明する可能性がいつねにある。

ブラウワーの哲学の本質は「唯我主義」であろう。したがってブラウワーの「自由」は「恣意的」というのと同義であろう。

排中律の無原則な受容を認めないだけなら直観主義数学は手足を縛った不自由な数学でしかない。実際、クロネッカーにしても、ポアンカレ等の半直観主義者にしても、新しい数学を生み出すことはできなかった。ブラウワーが構成主義的実数論を展開したのは偉大な成果であったと評価される。ブラウワーの実数論と解析学については長らく

Heyting, A., *Intuitionism An Introduction* (1966 : North-Holland)

が標準的な教科書だったが、その後構成的数学全体の発展を展望した次の書籍が出現して面目を一新した。計算機関係の人たちからもこの分野は注目されている：

Troelstra, A.S.& van Dalen, D., *Constructivism in Mathematics: An Introduction* Vol. 1 (1988 : Elsevier)