RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B7**
(2008), 1–12

非リーマン対称空間における不連続群の剛性と変形について
(Rigidity and deformation of discontinuous groups for non-Riemannian symmetric spaces)

京都大学・数理解析研究所　小林 俊行 (Toshiyuki Kobayashi)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

Abstract

This is a proceedings paper of the RIMS workshop on "Representation Theory and Analysis on Homogeneous Spaces" held in Kyoto on 21–24 August 2006. We discuss the notions of 'stability' and 'local rigidity' of discontinuous groups with emphasis on non-Riemannian cases. Examples range from nilpotent, solvable, Riemannian, and pseudo-Riemannian symmetric spaces. In particular, structural results on the deformation space of discontinuous groups for semisimple group manifolds (as pseudo-Riemannian symmetric spaces) are explained, generalizing results of Kulkarni, Raymond, and Goldman.

Mathematics Subject Classifications (2000): Primary: 57S30;
Secondary: 22E25, 22E40, 53C30, 58H15

Key words: discontinuous group, deformation, rigidity, proper action, pseudo-Riemannian symmetric space, properly discontinuous action.

1　序：コンパクトな局所対称空間

2006 年夏の RIMS 研究集会[1]では（リーマン幾何の枠組を超えた，一般の）対称空間 X の不連続群に関して

This paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.
Received February 15, 2007.

[1] RIMS 研究集会「表現論と等質空間上の解析学」"コンパクトな局所対称空間について"（研究代表者＝関口英子氏），京都大学数理解析研究所 2006 年 8 月 21 日—24 日

1) 一様格子は存在するか？

2) 一様格子を変形することはできるか？

の２つをテーマに講演した．

1) に関しては，X がリーマンの場合は A. Borel (1923–2003) が，その人生の丁度まん中の 1963 年に

「すべてのリーマン対称空間に対して一様格子が存在する」

という重要な定理を発表した [1]．彼の証明は数論的部分群の理論に基づくものであり，この定理はその後の（リーマン対称空間の）不連続群論の大発展の礎となった．

対称空間という概念はリーマン構造を必要としない．すなわち，'対称空間' を定義するためにはアファイン接続だけが必要であり，その際のアファイン接続がリーマン多様体の Levi-Civita 接続である場合がリーマン対称空間に他ならない．より広いクラスの対称空間の一例として，半単純リー群 G をその位数 2 の自己同型の固定部分群 H で割って得られる等質空間 G/H を考えよう．この空間は Killing 形式から誘導される擬リーマン多様体[2]の構造をもち，その Levi-Civita 接続に関して対称空間となる．このような，リーマン多様体とは限らない，より一般の幾何構造をもつ対称空間に対する一様格子の存在問題は筆者が 1980 年代の半ばより取り組んできたモチーフである．非常に初期の段階でこの研究に関心をもってプリンストン高等研究所に筆者を招聘していただいた Borel 教授が 2003 年に急逝され，その追悼論文を依頼されたとき，迷わずテーマを

「対称空間の一様格子の存在問題」

と選んだ．この長編の論文（吉野太郎氏との共著 [10]）が出版されたばかりであり，内容の重複をさけるため，1) の話題についてはここでは述べない．なお，このテーマに関して 2004 年以前に得られた結果に関する日本語の解説は [7, 8] も参照されたい．

このような経緯のため，この論説のテーマは 2) の話題，すなわち，

「対称空間の一様格子の変形」

に絞ることにする．

2 不連続群の変形空間

計量が正定値とは限らない空間において不連続群の変形を考えるとき，何が問題になるのだろう．

まずは素朴に次のような状況を考えてみよう．

[2]ローレンツ多様体のように，定符号とは限らない計量をもつ空間

- 位相群 G が多様体 X に（何らかの幾何構造を保ちながら）作用している．
- Γ は X に真性不連続に作用する G の離散部分群である[3]．

このとき，次の問題を考える．

> Γ' は G の離散部分群であり Γ に十分‘近い’とする．
>
> **(R)′** （剛性）Γ' と Γ は G 内で共役か？
>
> **(S)′** （安定性）X への Γ' の作用も真性不連続か？

明らかに

$$(\mathrm{R}') \implies (\mathrm{S}')$$

が成り立つ．また，G が X に推移的に作用し，1 点における固定部分群がコンパクトならば[4]，(S′) は自動的に成り立つ．

この‘素朴な問題’を厳密に定式化しよう．このためには，Γ' が Γ と十分近いということを厳密に述べる必要がある．

以下では議論を簡単にするため，

- Γ を有限生成の離散群

としよう．

Γ から G への（抽象的な）群準同型写像全体のなす空間を

$$\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$$

と表すと，各点収束の位相によって $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ は位相空間となる．さて，Γ の生成元 $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ をとると，Γ から G への準同型写像 φ は $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ での値によって決定されるから，写像

$$\mathrm{Hom}(\Gamma, G) \hookrightarrow G \times \cdots \times G, \quad \varphi \mapsto (\varphi(\gamma_1), \ldots, \varphi(\gamma_k))$$

によって $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ を G の k 個の直積空間に埋め込むことができる．直積空間 $G \times \cdots \times G$ の相対位相によって $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ を位相空間としてみなしたときの位相は，先ほど考えた各点収束の位相に一致する（従って生成元の集合 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$ のとりかたによらない）．

我々は X に真性不連続に作用するような G の離散部分群のみに興味があるので，それを抽出するため $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ の部分集合 $R(\Gamma, G; X)$ を以下のように定義する．

$$R(\Gamma, G; X) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G) : \varphi \text{ は単射，} \varphi(\Gamma) \text{ は } X \text{ に真性不連続かつ自由に作用する}\} \tag{1}$$

[3]この条件だけで，Γ には強い制約がかかることがある．たとえば，このような Γ は有限群しかないというのが Calabi–Markus 現象である．

[4]この場合は X には G が等長変換群として作用するようなリーマン計量を入れることができる．

ここで，X への作用が自由[5]という条件はおまけである（Γ が捩れ元のない離散群ならば，真性不連続という条件から自由という条件は自動的に出る）．

注意 2.1 なお，$R(\Gamma, G; X)$ の定義では G の X への作用が推移的であることを仮定していない．X がリー群 G の等質空間 G/H として表される場合には [4, 7] で定義した $R(\Gamma, G, H)$ という集合はここでの $R(\Gamma, G; G/H)$ に相当する．さらに $X = G/H$ かつ H がコンパクト部分群のときの $R(\Gamma, G; G/H)$ は Weil [12] の定義した集合 $R(\Gamma, G)$ に対応している．[6]

$R(\Gamma, G; X)$ の基本的な性質を列挙しよう．

1) $\varphi \in R(\Gamma, G; X)$ ならば，商空間 $\varphi(\Gamma)\backslash X$ はハウスドルフであって，自然な商写像

$$X \to \varphi(\Gamma)\backslash X$$

が被覆写像となる．特に $\varphi(\Gamma)\backslash X$ には多様体の構造を入れることができる．

2) $R(\Gamma, G; X)$ は $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ の G-不変な部分集合である．すなわち，$\varphi \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$, $g \in G$ に対して $\varphi^g \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ を

$$\varphi^g(\gamma) := g\varphi(\gamma)g^{-1}$$

と定めると，

$$\varphi \in R(\Gamma, G; X) \Longrightarrow \varphi^g \in R(\Gamma, G; X)$$

が成り立つ．さらに，

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\sim} & X & \qquad & x & \longmapsto & gx \\ \downarrow & & \downarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \varphi(\Gamma)\backslash X & \xrightarrow{\sim} & \varphi^g(\Gamma)\backslash X & & \varphi(\Gamma)x & \longmapsto & \varphi^g(\Gamma)gx \end{array}$$

によって $\varphi(\Gamma)\backslash X$ と $\varphi^g(\Gamma)\backslash X$ は自然に同型になる．

1) は $\varphi \in R(\Gamma, G; X)$ が X のクリフォード–クライン形 $\varphi(\Gamma)\backslash X$ の ‘パラメータ空間’ であることを意味している．さらに 2) を考慮に入れて，‘無駄な変形’ を省いた空間

$$\mathcal{T}(\Gamma, G; X) = R(\Gamma, G; X)/G$$

を**変形空間 (deformation space)** とよぶことにする[7]．

---

[5]すなわち，$\gamma \cdot x = x \Longrightarrow \gamma = e$ がすべての $x \in X$ に対して成り立つ．

[6]H がコンパクトの場合は，離散部分群 $\Longleftrightarrow$ 作用が真性不連続である．

[7]$R(\Gamma, G; X)$ は $\mathrm{Aut}(\Gamma) \times G$ の作用で不変な $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ の部分集合である．この作用で割った商空間 $\mathcal{M}(\Gamma, G; X) = \mathrm{Aut}(\Gamma)\backslash R(\Gamma, G; X)/G$ は**モジュライ空間**を一般化した概念である（[7] 参照）．

例 2.2 $G = PSL(2,\mathbb{R})$, $X =$上半空間，M_g を種数 $g\,(\geq 2)$ の閉リーマン面，$\Gamma = \pi_1(M_g)$ とすると，$\mathcal{T}(\Gamma, G; X)$ は M_g のタイヒミュラー空間に他ならない．

さて，もとの '素朴な問題' に戻ろう．

X に真性不連続に作用する G の離散部分群を Γ とし，

$$\varphi_0 : \Gamma \hookrightarrow G$$

を対応する包含写像とする．Γ' が Γ に十分近いというのは，Γ' が単射な準同型写像 $\varphi : \Gamma \to G$ の像であり（従って Γ' と Γ は抽象群としては同型である），$\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ の位相に関して φ は φ_0 に十分近いと定義するのである．

この設定の下で，(R′) は

$$\varphi_0 \in V \underset{\text{open}}{\subset} \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$$

となる開近傍 V であって，

$$\text{任意の}\varphi \in V\text{に対して，適当な}\,g \in G\,\text{を選べば}\ \varphi = \varphi_0^g\,\text{となる} \tag{2}$$

と再定式化できる．このとき，$\varphi_0 \in V \subset G \cdot \varphi_0$ となるので，$G \cdot \varphi_0 \subset G \cdot V \subset G \cdot \varphi_0$ が成り立ち，従って $G \cdot \varphi_0 = G \cdot V$ となる．$G \cdot V$ は開集合 gV の和集合であるから，これも開集合である．逆に $G \cdot \varphi_0$ が開集合ならば $V = G \cdot \varphi_0$ とおけば (2) は明らかに成り立つ．よって，

> **(R)** （φ_0 における局所剛性）$G \cdot \varphi_0$ は $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ における開集合である

は (R)′ を定式化したものといえる．$\varphi_0 \in R(\Gamma, G; X)$ なので $G \cdot \varphi_0 \subset R(\Gamma, G; X)$ となっていることに注意しよう．

同様に考えて，(S′) は

> **(S)** （φ_0 の安定性）$\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ における開集合 V であって
>
> $$\varphi_0 \in V \subset R(\Gamma, G; X)$$
>
> となるものが存在する

と述べることができる．

以下ではこの定式化で考えよう．定義より明らかに次が成り立つ．

定理 2.3 ((**R**) $\Rightarrow$ (**S**)) $\Gamma \subset G$ が局所剛性ならば，X における変換群として安定である．

例 2.4 (リーマン対称空間の場合 [12]) X が既約リーマン対称空間 G/K，$\varphi_0(\Gamma)$ は G の捩れ元のない一様格子とする．このとき Selberg，Weil は次のことを証明した．

- $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \Longrightarrow$ (R) が成り立つ.
- (S) は常に成り立つ.

例 2.5 (3 次元ローレンツ対称空間の例 [2]) 原論文の定式化は異なるが，ここで導入した (R), (S) を用いれば

$$X = (G' \times G')/\Delta(G'), \quad \mathfrak{g}' = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$$

のときに Goldman は

- (R) が成り立たない一様格子 $\Gamma = \Gamma' \times 1$ が存在する

ことを証明し，これを non-standard Lorentz form と呼んだ．さらに

- (S) は成り立つだろうか

という問題を（特定の変形[8]に対して）提起した.

[9] の序文に述べられた次の初等的な例は，対称空間の一様格子であっても一般には (R) も (S) も成り立たないことを示すものである.

例 2.6 (アファイン対称空間の例) $X = \mathbb{R}$ をアファイン対称空間 G/H とみなす．ここで

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a > 0,\ b \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}_{>0} \ltimes \mathbb{R}, \\ H &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a > 0 \right\} \qquad\qquad \simeq \mathbb{R}_{>0}. \end{aligned}$$

このとき $\Gamma = \mathbb{Z}$ とすると，

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Hom}(\Gamma, G) \simeq G = \{(a,b) : a > 0,\ b \in \mathbb{R}\} \\ \quad\ \cup \\ R(\Gamma, G; X) \qquad \simeq \{(1,b) : b \neq 0\} \end{array}$$

となり，$R(\Gamma, G; X)$ は $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ の開集合ではない．従って (R) も (S) も成り立たない．特に，どの $\varphi \in R(\Gamma, G; X)$ も X の一様格子 $\varphi(\Gamma)$ を定めるが，安定ではない.

なお，同じ空間 $X = \mathbb{R}$ をリーマン対称空間 G'/K'，但し $G' = K' \ltimes \mathbb{R}$, $K' = SO(1)$ とすれば $R(\Gamma, G'; X) = R(\Gamma, G; X)$ は明らかに $\mathrm{Hom}(\Gamma, G') \simeq \mathbb{R}$ の開集合であり，(R) も (S) も成り立つことに注意しよう.

[8]後述する (3) であって ρ の像が可換かつ非コンパクトの場合

例 2.6 では G は可解リー群であり，Γ は X の一様格子であった．G がべき零リー群，Γ が一様格子の場合は (S) は成り立つ（吉野）．一方，Γ が一様格子ではない場合には (R) も (S) も成り立たない例を構成することができる ([9]).

例 2.7 (べき零対称空間の例) G が 2 step べき零リー群，Γ が可換な離散部分群の場合の変形空間の例が [9, 13] で具体的に求められている．

3 半単純リー群多様体の不連続群

等長変換が豊富に存在する擬リーマン多様体として半単純リー群 G 自身をとりあげよう．この節では，リー群は線型であるか，あるいはその有限被覆群であると仮定する．

最初に変換群の立場から多様体 G を等質空間として表示する 2 通りの視点を述べる．

①		②
$G/\{e\}$	$\simeq$	$(G\times G)/\Delta G$
左からの作用のみ		左と右からの作用
リーマン		擬リーマン

ここで ΔG は直積群 $G\times G$ の部分群 $\{(g,g) : g\in G\}$ を表す．ΔG は直積群 $G\times G$ を多様体 G に

$$G\to G,\quad x\mapsto g_1xg_2^{-1}$$

として作用させたとき，原点 e における固定部分群に他ならない．

G が単純リー群ならば，$T_eG\simeq\mathfrak{g}$ における Killing 形式（あるいはその定数倍）を G で左移動することによって G 上の擬リーマン計量が得られる（右移動しても同じものが得られる）．このとき，直積群 $G\times G$ はこの擬リーマン計量に関する等長変換群として作用する．このような擬リーマン計量は定数倍を除いて一意的である．すなわち ② の立場では不変な計量は内在的である．なお，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を G のリー環 $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解とするとき，この擬リーマン計量の符号は $(\dim\mathfrak{p},\dim\mathfrak{k})$ である．

一方，多様体 G を等質空間 $G/\{e\}$ とみた ① の立場では，任意符号の擬リーマン計量（特にリーマン計量）であって，G がその計量に関して等長変換として作用するものが存在する．すなわち，① の立場では変換群が（推移的とはいえ）“小さい” ため，不変な計量はたくさんあり，それらは一般には内在的なものではない．

例 3.1 $G=SL(2,\mathbb{R})$ のとき，Killing 形式を用いることにより，G に 3 次元の定曲率ローレンツ多様体[9]の構造を与えることができる．この場合はリー群の局所同型

$$SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})\approx SO(2,2)$$

[9]すなわち，計量の符号が (2, 1) で，断面曲率が定数であるような多様体

を使えば，$G \times G/\Delta G$ がローレンツ対称空間 $SO(2,2)/SO(2,1)$ と局所微分同相（2 重被覆）になっていることがわかる．

さて，

$$\Gamma \subset G$$

を G の離散部分群とする．多様体 $G \curvearrowleft \Gamma$ を左から作用させるということは②の立場では

$$\Gamma \times 1 \quad を \quad (G \times G)/\Delta G$$

に作用させることに他ならない．従って②では Γ の左作用の変形は準同型写像

$$\Gamma \times 1 \to G \times G$$

を変形させることによって定義できる．①の立場と②の立場で局所剛性定理がどのように違うかを比較しよう．以下では G を単純リー群とし $\Gamma \subset G$ を G の一様格子とする．

定理 3.2 (Selberg–Weil の局所剛性定理 [12]) 立場①で考えたとき，連続変形できる一様格子が存在する $\Leftrightarrow G \approx SL(2,\mathbb{R})$ （局所同型）

定理 3.3 (群多様体の局所剛性定理 [6]) 立場②で考えたとき，連続変形できる一様格子が存在する $\Leftrightarrow G \approx SO(n,1)$ または $SU(n,1)$ （局所同型）

定理 3.3 によって，既約な半単純対称空間の剛性定理は，高次元でも成り立たない系列が存在することがわかる．

定理 3.3 の証明のスケッチ

$\Rightarrow$) リー環のコホモロジーの計算を用いる．

$\Leftarrow$) $G = SO(n,1)$, $SU(n,1)$ のときには $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ が無限群になるような一様格子 Γ が存在する[10]．そこで例えば，準同型写像 $\Gamma/[\Gamma,\Gamma] \to G$ （このような準同型写像全体を G の内部同型で割った空間は $\mathrm{rank}\,\Gamma/[\Gamma,\Gamma]\,\mathrm{rank}\,G$ の次元をもつ）と $\Gamma \to \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ を合成することにより $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ の元を作ることができる．不連続群が構成できることを示すのには後述の定理 3.8 を用いる．

定理 3.3 で述べた変形空間の構造をもう少し精密に見よう．

$$\rho : \Gamma \to G$$

を準同型写像とすると，$G \times G$ の部分群

$$\Gamma_\rho := \{(\gamma, \rho(\gamma)) : \gamma \in \Gamma\} \tag{3}$$

[10] $G = SO(n,1)$ の任意の一様格子 Γ に対して $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ は無限群であるだろうという予想は Thurston の予想（および，その高次元の一般化）として知られる．数論的部分群に対する肯定的な結果はあるが，一般には現在も未解決である

が定まる．Γ_ρ は抽象群としては Γ と同型なので，変形パラメータ ρ によって Γ を②の立場で変形したとみなせる．まず，$G = SO(n,1)$ あるいは $SU(n,1)$ の場合，群多様体 $G \times G/\Delta G$ の不連続群 $\widetilde{\Gamma}$ としてどのような形が許されるだろうか．

Kulkarni と Raymond は 3 次元のローレンツ空間形の研究において，$G = SL(2,\mathbb{R})$ の左右からの群作用を考察し，次の定理を証明した．

定理 3.4 **(Kulkarni–Raymond [11])** $G = SL(2,\mathbb{R})$ とする．3 次元の群多様体 G に真性不連続に作用する $G \times G$ の離散部分群は，もしそれが捩れ元を含まないならば適当な $\Gamma \subset G$ と $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ を用いて Γ_ρ の形（あるいは左右を逆にしたもの）に表される．

この定理は [3]（あるいはもっと強い形としては [5]）で証明された作用の固有性の判定条件を用いることによって次の形に拡張された．

定理 3.5 **([4])** 実階数が 1 の半単純リー群 G に対して，定理 3.4 と同じ結論が成り立つ．

注意 3.6 逆に実階数 ≥ 2 の場合には，$\Gamma_1 \times \Gamma_2$（但し Γ_1, Γ_2 は G の離散部分群）の形の不連続群も存在することが証明されている ([4])．特に，実階数 ≥ 2 の場合には定理 3.4 の結論は成り立たない．

定理 3.5 の証明のスケッチ　以下では真性不連続性の判定条件を与えるために [5] で導入された記号 $\sim, \pitchfork$ を用いる[11]．

$\widetilde{\Gamma} \subset G \times G$ を②の立場の不連続群とし，$\Gamma_1 = \widetilde{\Gamma} \cap (G \times 1), \Gamma_2 = \widetilde{\Gamma} \cap (1 \times G)$ とおく．Γ_1 または Γ_2 の少くとも 1 つが単位元だけからなる群 $\{e\}$ であることを言えばよい（実際 $\Gamma_2 = \{e\}$ が示されれば，$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ と表すとき，$\widetilde{\Gamma} \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_1 = \{e\}$ であるから，φ_1 は単射となる．そこで $\Gamma = \varphi_1(\widetilde{\Gamma})$，$\rho = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ とおけばよい）．さらに，$\widetilde{\Gamma}$ には捩れ元が存在しないという仮定の下では，Γ_1 あるいは Γ_2 が有限群であることを言えばよい．このために次の補題を用いる．

補題 3.7 G が実階数 1 の半単純リー群とする．このとき，G の任意の離散部分群 Γ に対して，$\Gamma \sim G$ が成り立つ[12]．

この補題より，Γ_1 と Γ_2 の両方が無限群ならば，

$$\Gamma_1 \times \Gamma_2 \sim G \times G \tag{4}$$

が成り立つ．然るに $\widetilde{\Gamma} \pitchfork \Delta G$ であるから，特に $(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \pitchfork \Delta G$ が成り立つ．従って (4) より $G \times G \sim \Delta G$ となるが，これが成り立つのは G がコンパクト群に限るので，G が実階数 1 であることに矛盾する．よって Γ_1 あるいは Γ_2 の少くとも一方は有限群でなければならない．これで定理が証明された．□

[11] $\sim$ や $\pitchfork$ は群構造（の一部）さえ忘却して '粗い' 概念で不連続性を捉えたものであるが，詳しい定義やその意義は [7] あるいは [8] の解説文を参照されたい

[12] すなわち，G のコンパクト部分集合 S を適当にとれば，$S\Gamma S = G$ が成り立つ

局所剛性が成り立たない群多様体 $G = SO(n,1), SU(n,1)$ はいずれも実階数 1 の半単純群である．そこで前述の定理が適用できる．

Γ_ρ と $(\mathrm{id} \times \rho) \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G \times G)$ を同一視すると

$$\mathrm{Hom}(\Gamma, G) \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, G \times G), \ \rho \mapsto \Gamma_\rho$$

という埋め込みが得られる．そこで，真性不連続な作用のパラメータ空間

$$R(\Gamma, G \times G; G) \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, G \times G)$$

を $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ の切り口で調べよう．すなわち，Γ を G の一様格子としたとき，どのような ρ に対して Γ_ρ が G に真性不連続に作用するかを考えるのである．特に $\rho = \mathbf{1}$ のとき $\Gamma_{\mathbf{1}} = \Gamma \times 1$ であるから，$\Gamma_{\mathbf{1}}$ が安定であるか（すなわち，ρ と $\mathbf{1}$ が十分近ければ Γ_ρ は G に真性不連続に作用するか？）を考えよう（Goldman の提起した問題（例 2.5 参照）の一般化）．

以下，G を半単純リー群（$\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G = 1$ は仮定しない），Γ を G の一様格子とする．G/K の適当なコンパクト集合 S をとれば

$$\pi(S) = \Gamma\backslash G/K$$

となる．ここで $\pi : G/K \to \Gamma\backslash G/K$ は自然な商写像である．このような S を 1 つ選んでおく．Γ は G/K に真性不連続に作用するので

$$\Gamma_S := \{\gamma \in \Gamma : \gamma \cdot S \cap S \neq \emptyset\}$$

は有限集合である．dist をリーマン対称空間 G/K の距離とし，$o = eK \in G/K$ とおく．またコンパクト集合間の距離は最小距離として定める．

$$T := \min_{\gamma \notin \Gamma_S} \mathrm{dist}(\gamma \cdot S, S)$$
$$M_\rho := \max_{\gamma \in \Gamma_S} \mathrm{dist}(\rho(\gamma) \cdot o, o)$$

とおく．T は論文 [6] では ν_Γ と表記した正数に対応する．例えば $\rho = \mathbf{1}$ ならば $M_\rho = 0$ である．

$$\mathrm{Hom}(\Gamma, G) \to \mathbb{R}, \quad \rho \mapsto M_\rho$$

は連続関数であることに注意しよう．

次の定理は論文 [6] の第 3 節の内容を要約したものである．

定理 3.8 $M_\rho < T$ ならば Γ_ρ は Γ と（抽象群として）同型であり，さらに $\Gamma_\rho \in R(\Gamma, G \times G; G)$．

すなわち，**1** に十分近い $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ によって Γ の左作用（$\Gamma \times 1 = \Gamma_1$ の作用）を $G \times G$ 内で変形して得られる Γ_ρ は G に真性不連続に作用する．従って，Goldman の提起した問題（例 2.5 参照）は $SL(2, \mathbb{R})$ だけでなく，一般の半単純リー群の一様格子に対しても正しいことが示された． □

$R(\Gamma, G \times G; G)$（あるいは，本質的に同じことであるが，変形空間 $\mathcal{T}(\Gamma, G \times G; G)$）についてはまだまだ多くの基本的な性質が解明されていない．ここで次の問題を提起しておこう．

問題 $G = SO(n,1), SU(n,1)$ とする．特定の一様格子 Γ に対して変形空間 $\mathcal{T}(\Gamma, G \times G; G)$ の次元を決定せよ[13]．

参考文献

[1] A. Borel, Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces, *Topology* **2** (1963), 111–122.

[2] W. M. Goldman, Nonstandard Lorentz space forms, *J. Differential Geometry* **21** (1985), 301–308.

[3] T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type, *Math. Ann.* **285** (1989), 249–263.

[4] T. Kobayashi, On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with non-compact isotropy subgroups, *J. Geom. Phys.* **12** (1993), 133–144.

[5] T. Kobayashi, Criterion of proper actions on homogeneous spaces of reductive groups, *J. Lie Theory* **6** (1996), 147–163. http://www.emis.de/journals/JLT/vol.6_no.2/index.html .

[6] T. Kobayashi, Deformation of compact Clifford–Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds, *Math. Ann.* **310** (1998), 394–408.

[7] T. Kobayashi, Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces, Mathematics Unlimited-2001 and Beyond, (eds. B. Engquist and W. Schmid), Springer, Berlin, (2001), pp. 723–747; 邦訳: 非リーマン等質空間の不連続群論，数学の最先端 21 世紀への挑戦, 第 1 巻, (砂田利一監修), (2002), pp. 18–73.

[13] 定理 3.8 より，$\dim \mathcal{T}(\Gamma, G \times G; G) \geq \operatorname{rank} \Gamma/[\Gamma,\Gamma] \operatorname{rank} G$ であることはわかる．ここで $\operatorname{rank} G = [\frac{n+1}{2}]$（$G = SO(n,1)$ のとき），n（$G = SU(n,1)$ のとき）．

[8] 小林俊行, 「非リーマン等質空間の不連続群について」(論説), 『数学』, **57** (2005), 267–281; An English translation by M. Reid is to appear in Sugaku Exposition, Amer. Math. Soc. math.DG/0603319

[9] T. Kobayashi and S. Nasrin, Deformation of properly discontinuous actions of $\mathbb{Z}^k$ on $\mathbb{R}^{k+1}$, *Internat. J. Math.* **17** (2006), 1175–1193, math.DG/0603318.

[10] T. Kobayashi and T. Yoshino, Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces: revisited, *Pure and Appl. Math. Quarterly* **1** (2005), 603–683, Special Issue: In Memory of Professor Armand Borel.

[11] R. S. Kulkarni and F. Raymond, 3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces, *J. Differ. Geom.* **21** (1985), 231–268.

[12] A. Weil, Remarks on the cohomology of groups, *Ann. Math.* **80** (1964), 149–157.

[13] 吉野太郎, ハイゼンベルグ群の等質空間のコンパクト Clifford–Klein 形の変形空間