RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B7**
(2008), 29–44

$K3$ 曲面と DEL PEZZO 曲面の双対性? (A DUALITY BETWEEN $K3$ AND DEL PEZZO SURFACES?)

吉川 謙一 (KEN-ICHI YOSHIKAWA)
東京大学 数理科学研究科 (UNIVERSITY OF TOKYO)

ABSTRACT. This note is a survey of our recent paper [21]. We explain the structure of the automorphic form on the moduli space of $K3$ surfaces with involution, which we constructed using equivariant analytic torsion [19]. We find a single series of elliptic modular form for $\Gamma_0(4)$ whose Borcherds lift provides the corresponding automorphic form. By rewriting the Borcherds product as a function on the Kähler moduli of a Del Pezzo surface, we suggest that the mirror dual of a certain $K3$ surfaces with involution may be a Del Pezzo surface equipped with a complex Kähler form. The details of this note will be given in [21].

内容

1. 序

この節では, 筆者が現在考えている問題の一つを大雑把に述べてみたい. そのため, 記号の説明等は必要最小限に止め, 記述もかなりいい加減な部分を含むことを予め断っておく. ある意味で, この文章は筆者の論説 [18] の続編である.

X を $K3$ 曲面とし, $\iota\colon X \to X$ を正則対合とする. ι は X 上の正則 2-形式に非自明に作用するものと常に仮定する. このとき, ι は X の全コホモロジー格子 (向井格子と呼ばれる)

$$\begin{aligned} H(X,\mathbf{Z}) &= H^0(X,\mathbf{Z}) \oplus H^2(X,\mathbf{Z}) \oplus H^4(X,\mathbf{Z}) \\ &\cong \mathbb{U} \oplus \mathbb{U} \oplus \mathbb{U} \oplus \mathbb{U} \oplus \mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8 =: \mathbb{M} \end{aligned}$$

に作用する. ただし, $\mathbb{U}$, $\mathbb{E}_8$ はそれぞれ階数 2, 8 の偶ユニモジュラー格子で, $\mathbb{U}$ の符号は $(1,1)$, $\mathbb{E}_8$ の符号は $(0,8)$ である. ι^* の定める $\mathbb{M}$ 上の対合を I で表せば, ι^*-作用に関する ±1-固有空間 $H_\pm(X,\mathbf{Z})$ は以下のように表せる:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_+(I) &:= \{l \in \mathbb{M};\, I(l) = l\} \\ &\cong H_+(X,\mathbf{Z}) \\ &= H^0(X,\mathbf{Z}) \oplus H^2_+(X,\mathbf{Z}) \oplus H^4(X,\mathbf{Z}), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{M}_-(I) &:= \{l \in \mathbb{M};\, I(l) = -l\} \\ &\cong H_-(X,\mathbf{Z}) \\ &= H^2_-(X,\mathbf{Z}). \end{aligned}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 58G26, 14J28, 14J15, 32G20, 32N10, 32N15.
This paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.
Received October 31, 2006. Revised January 11, 2007.

$\mathbb{M}_+(I)$ と $\mathbb{M}_-(I)$ はいずれも符号が $(2,*)$ の形の 2-elementary 格子である. 筆者の理解する所では, 格子の同型 $H(X,\mathbf{Z}) \cong \mathbb{M}$ を一つ定めることにより, X の ι-不変複素シンプレクティク類（これを (X,ι) の複素シンプレクティク類と呼ぶことにする）は $\mathbb{M}_+(I)$ の重さ 2 の偏極 Hodge 構造を定め, 又 (X,ι) の周期は $\mathbb{M}_-(I)$ の重さ 2 の偏極 Hodge 構造を定める. 前者はシンプレクティク幾何学において重要らしく, 後者は代数幾何学において重要である. $\mathbb{M}_\pm(I)$ の重さ 2 の偏極 Hodge 構造の分類空間を $\Omega_{\mathbb{M}_\pm(I)}$ で表すことにすると, 固定された対合付き $K3$ 曲面 (X,ι) に対して, その上の複素シンプレクティク類のモジュライ空間がおよそ $\Omega_{\mathbb{M}_+(I)}$ であり, 複素多様体 (X,ι) のモジュライ空間がおよそ $\Omega_{\mathbb{M}_-(I)}$ である. （本当は適当な集合を除外したり, 適当な離散群の作用で割ったりする必要がある.）Borcea と Voisin による対合付き $K3$ 曲面のミラー対称性 [7] はおよそ以下のように要約できる.

対合付き $K3$ 曲面 (X,ι) と対応する $\mathbb{M}$ 上の対合 I が与えられると, 対合付き $K3$ 曲面 $(X^\vee,\iota^\vee)$ と対応する $\mathbb{M}$ 上の対合 $I^\vee$ が存在して, 以下のようになる:

$$\mathbb{M}_+(I) = \mathbb{M}_-(I^\vee), \qquad \mathbb{M}_-(I) = \mathbb{M}_+(I^\vee).$$

その結果, 対応する複素シンプレクティク類のモジュライ空間と複素構造のモジュライ空間の間には以下の同型が存在する:

$$\Omega_{\mathbb{M}_+(I)} = \Omega_{\mathbb{M}_-(I^\vee)}, \qquad \Omega_{\mathbb{M}_-(I)} = \Omega_{\mathbb{M}_+(I^\vee)}.$$

3 次元 Calabi-Yau 多様体では Kähler モジュライと複素構造のモジュライの同一視（ミラー写像）に種数 0-Gromov-Witten 不変量による効果が生じ, そのためにミラー写像は複雑である. 一方, $K3$ 曲面では $\Omega_{\mathbb{M}_\pm(I)}$ と $\Omega_{\mathbb{M}_\mp(I^\vee)}$ の同一視は自明である.

上の主張は多くの I に対して正しいが, すべての I に対して正しいわけではない. 実際, $\mathbb{M}_-(I) = \mathbb{M}_+(I^\vee)$ ならば, $\mathbb{M}_-(I) = \mathbb{U} \oplus L$ のように直和分解されるはずであるが, このような直和分解を許容しない I の例が存在する. どのような例かというと, $\mathbb{M}_-(I)$ とその（ある基底に関する）Gram 行列を同一視したとき,

$$(\star) \qquad \mathbb{M}_-(I) = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

となる (X,ι) が存在するのである. 従って, 対合付き $K3$ 曲面のミラーは必ずしも対合付き $K3$ 曲面でないと推測される. そのような対合付き $K3$ 曲面のミラーは何であろうかというのが, この小論で考える問題である.

ここでは対合付き $K3$ 曲面の同変解析的捩率を手掛りにこの問題を考える. 3 次元 Calabi-Yau 多様体が対合付き $K3$ 曲面と楕円曲線の直積から適当な構成（Borcea-Voisin 構成）によって得られている時, 3 次元 Calabi-Yau 多様体の解析的捩率のある種の簡約として対合付き $K3$ 曲面の同変解析的捩率が得られる. Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa の予想 [2] を信じれば, 3 次元 Calabi-Yau 多様体の解析的捩率は Kähler モジュライ空間 $\Omega_{\mathbb{M}_+(I^\vee)} \times \mathfrak{H}$ （$\mathfrak{H}$ は複素上半平面）上で種数 1 の Gromov-Witten ポテンシャルに等価なはずであるから, 対合付き $K3$ 曲面の同変解析的捩率は種数 1 の Gromov-Witten ポテンシャルであることを反映した $\Omega_{\mathbb{M}_-(I)}$ 上の関数を与えるはずである. 実際, 同変解析的捩率を用いて対合付き $K3$ 曲面の不変量を構成することが可能であり, その不変量を $\Omega_{\mathbb{M}_-(I)}$ 上の関数と見た時, その関数は判別式軌跡を特徴付ける保型形式の Petersson ノルムなのである [19]. 多くの場合, Bershadsky-Cecotti-大栗-Vafa が予想するように, この保型形式は Borcherds 型の無限積展開を持つ. $(\star)$ の場合にその無限積の構造を見ると, 以下のことが推測される:

$\mathbb{M}_-(I)$ が上の $(\star)$ 形のとき, (X,ι) のミラー双対は *Del Pezzo* 曲面に見える.

この主張が正しいと確信するには筆者はまだ至っていない. $(\star)$ の場合に, 問題となる保型形式を Del Pezzo 曲面（あるいはその上の適当な構造）のシンプレクティク幾何学等を用いて完全に説明することができていないからである. 何となく状況証拠らしい物が存在する程度でこのような主張をするのは勇み足かもしれない. 現在の段階では作業仮説くらいに考えると良いのではないかと思う.

一応, $\Omega_{\mathbb{M}_-(I)}$ 上で同変解析的捩率を考える動機の一つを述べたのであるが, 実際に対応する保型形式を計算をしてみると皆美しく統一的な表示を持っている. ミラー対称性や弦双対性はこの美しく統一的な表示の理由を説明してくれるのではないかと, 筆者は期待している. 例えば, 保型形式が無限積であるという事は, それが種数 1 の Gromov-Witten ポテンシャルであるとすれば当然な事なのである.

この小論の構成は以下のようになっている. 第 2 節では対合付き $K3$ 曲面について復習する. 第 3 節では同変解析的捩率を用いた対合付き $K3$ 曲面の構成を復習する. 第 4 節では Del Pezzo 曲面の Kähler モジュライを記述し, 同変解析的捩率を表示する保型形式が如何に Del Pezzo 曲面の幾何を用いて書けるかを説明する. この保型形式に対しては, 無限積の構成に用いる楕円モジュラー形式以外は全て Del Pezzo 曲面の幾何を用いて記述される. 第 5 節では同変解析的捩率を表示する保型形式の Borcherds 積を用いた表示について筆者が現在持っている計算結果を報告する. 第 6 節では第 5 節で登場する保型形式をミラー双対の Kähler モジュライ上で $K3$ 曲面の幾何学を用いて記述する. 第 4 節と第 6 節で与える保型形式の無限積表示は Gritsenko–Nikulin によるミラー予想 [9] で述べられている形の無限積に非常に近い. （全く同じという訳ではない.）

2. 対合付き $K3$ 曲面

Definition 2.1. 連結かつ単連結なコンパクト非特異複素曲面 X が $K3$ 曲面 $\Longleftrightarrow$ X の標準束 $K_X = \Omega_X^2 := \wedge^2 T^*X$ が自明, i.e., $K_X \cong \mathcal{O}_X$. ただし, T^*X は X の正則余接束である.

Fact 2.2. $K3$ 曲面に対して, 以下の事実が知られている:
(1) すべての $K3$ 曲面は *Kähler* 計量を持つ.
(2) $K3$ 曲面の任意の *Kähler* 類は唯一の *Ricci*-平坦な *Kähler* 形式を含む.
(3) X が $K3$ 曲面ならば, 以下の格子の等長同型が存在する:

$$\alpha\colon (H^2(X,\mathbf{Z}),\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{cup}}) \cong \mathbb{L}_{K3} := \mathbb{U}\oplus\mathbb{U}\oplus\mathbb{U}\oplus\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{E}_8.$$

ここで, $\mathbb{U} = (\mathbf{Z}^2, \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right))$ は双曲平面 *(hyperbolic plane)* であり, $\mathbb{E}_8$ は負定値 *Cartan* 行列 E_8 に付随する階数 8 の負定値偶ユニモジュラー格子 $(\mathbf{Z}^8, E_8)$ である.

Proof. [1], [16] 等を参照. □

Definition 2.3. X を $K3$ 曲面とし, $\iota\colon X\to X$ を正則対合, $M\subset \mathbb{L}_{K3}$ を部分格子とする. 組 (X,ι) が以下の条件をみたすとき, 型 M の 2-elementary $K3$ 曲面という:
(1) ι は $H^0(X,K_X)$ に非自明に作用する, i.e.,

$$\iota^*\eta = -\eta, \qquad \forall\eta\in H^0(X,K_X)\cong\mathbf{C}.$$

(2) Fact 2.2 (3) の等長同型 α で以下の条件をみたすものが存在する:

$$\alpha(H^2_+(X,\mathbf{Z})) = M, \qquad H^2_+(X,\mathbf{Z}) := \{l\in H^2(X,\mathbf{Z});\ \iota^* l = l\}.$$

Definition 2.3 は M に以下の条件 (i), (ii), (iii) を課す．逆に，下の条件 (i), (ii), (iii) を充たす格子 M に対して，型 M の 2-elementary $K3$ 曲面の存在が知られている [13], [14]:

(i) $M \subset \mathbb{L}_{K3}$ は原始的, i.e., $\mathbb{L}_{K3}/M$ は自由 $\mathbf{Z}$-加群.

(ii) M は 2-elementary である, i.e., 整数 $l(M) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ が存在して, $M^{\vee}/M = \mathbf{Z}_2^{l(M)}$.

(iii) M は双曲型である, i.e., $\mathrm{sign}(M) = (1, r(M)-1)$, $r(M) = \mathrm{rank}_{\mathbf{Z}} M$.

整数 $r(M) := \mathrm{rank}_{\mathbf{Z}} M$ と $l(M) := \dim_{\mathbf{Z}_2} M^{\vee}/M$ は対合 $\iota\colon X \to X$ の重要な位相不変量である．条件 (i), (ii), (iii) と Nikulin の定理 [13] から, M は以下の格子の直和として表される:

$$\mathbb{A}_1^+ = \langle 2 \rangle, \quad \mathbb{A}_1 = \langle -2 \rangle, \quad \mathbb{U}, \quad \mathbb{U}(2), \quad \mathbb{D}_{2k}, \quad \mathbb{E}_7, \quad \mathbb{E}_8, \quad \mathbb{E}_8(2).$$

ただし, Lie 代数のルート格子は負定値であると約束する．また, 格子 $L = (\mathbf{Z}^r, \langle\cdot,\cdot\rangle_L)$ に対して, $L(k)$ は $L(k) = (\mathbf{Z}^r, k\langle\cdot,\cdot\rangle_L)$ として定まる格子である．上の格子の勝手な直和は必ずしも $\mathbb{L}_{K3}$ への原始的な埋め込みを持たないことを注意する．条件 (i), (ii), (iii) をみたす格子の等長類は全部で 75 個存在する [13], [8]．従って, 2-elementary $K3$ 曲面の位相型は全部で 75 個存在する．以下, $\mathbb{L}_{K3}$ の部分格子 M に対して, その直交補格子を $M^{\perp}$ で表す, i.e., $M^{\perp} = \{l \in \mathbb{L}_{K3};\ \langle l, M \rangle = 0\}$.

Example 2.4. 以下, 2-elementary $K3$ 曲面の代表的な例を幾つか挙げる．

(1) $C \subset \mathbf{P}^2$ を非特異平面 6 次曲線とし, C で分岐する $\mathbf{P}^2$ の二重被覆を $p\colon X \to \mathbf{P}^2$ とする．$\iota\colon X \to X$ をこの二重被覆の非自明な被覆変換とすれば, X は $K3$ 曲面であり, (X, ι) は型 $\mathbb{A}_1^+$ の 2-elementary $K3$ 曲面である．

(2) S を Enriques 曲面とする, i.e., S は連結なコンパクト非特異複素曲面で以下の条件をみたす:

$$(i)\quad \pi_1(S) = \mathbf{Z}_2, \qquad (ii)\quad K_S \not\cong \mathcal{O}_S, \qquad (iii)\quad K_S^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}_S.$$

$p\colon X := \widetilde{S} \to S$ を普遍被覆とし, $\iota\colon X \to X$ を非自明な被覆変換とすれば, X は $K3$ 曲面であり, (X, ι) は型 $\mathbb{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8(2)$ の 2-elementary $K3$ 曲面である．Enriques 曲面のモジュライ空間は型 $\mathbb{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8(2)$ の 2-elementary $K3$ 曲面と自然に同型である．堀川はその事実を用いて Enriques 曲面のモジュライ空間を記述した．[1] を参照．

(3) $L_1, \ldots, L_6$ を一般の位置にある $\mathbf{P}^2$ の 6 直線とする．$P_{ij} = L_i \cap L_j$ $(i < j)$ とする．$p\colon S \to \mathbf{P}^2$ を $L_1 \cup \cdots \cup L_6$ で分岐する二重被覆とする．S は $p^{-1}(P_{ij})$ に 2 次元結節点を持つ特異 $K3$ 曲面である．X を S の極小特異点解消とし, 対合 $\iota\colon X \to X$ を二重被覆 $p\colon S \to \mathbf{P}^2$ の非自明被覆変換から誘導される X の対合とする．このとき, (X, ι) は型 $\mathbb{U} \oplus \mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{A}_1^6$ の 2-elementary $K3$ 曲面である．この 2-elementary $K3$ 曲面の周期写像やモジュライ空間の射影モデルは松本-佐々木-吉田により詳細に研究されたので, この 2-elementary $K3$ 曲面を松本-佐々木-吉田の $K3$ 曲面と呼ぶ. $(\mathbb{U} \oplus \mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{A}_1^6)^{\perp} = (\mathbb{A}_1^+)^2 \oplus \mathbb{A}_1^4$ なので, 松本-佐々木-吉田の $K3$ 曲面は $(\star)$ を充たす 2-elementary $K3$ 曲面である．$L_1, \ldots, L_6$ に内接する $\mathbf{P}^2$ の二次曲線が存在するとき, 松本-佐々木-吉田の $K3$ 曲面は Kummer 曲面である．[17], [20] を参照．

2-elementary $K3$ 曲面 (X, ι) に対して, 対合の不動点集合を X^{ι} で表す:

$$X^{\iota} := \{x \in X;\ \iota(x) = x\}.$$

Fact 2.5. (X, ι) を型 M の *2-elementary* $K3$ 曲面とする．

(1) $M \cong \mathbb{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8(2)$ ならば, $X^{\iota} = \emptyset$ であり, 商 X/ι は *Enriques* 曲面である．

(2) $M \cong \mathbb{U} \oplus \mathbb{E}_8(2)$ ならば, 交わらない楕円曲線 $C_1, C_2 \subset X$ が存在して,

$$X^{\iota} = C_1 \amalg C_2.$$

(3) $M \not\cong \mathbb{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8(2), \mathbb{U} \oplus \mathbb{E}_8(2)$ ならば, 種数 $g(M)$ のコンパクト *Riemann* 面 C と $k(M)$ 個の非特異有理曲線 $E_1, \ldots, E_{k(M)}$ が存在して,

$$X^\iota = C \amalg E_1 \amalg \cdots \amalg E_{k(M)}.$$

ただし,

$$g(M) := 11 - \frac{r(M) + l(M)}{2}, \qquad k(M) := \frac{r(M) - l(M)}{2}.$$

Proof. [14] を参照. □

Fact 2.5 から, 以下のように定めることは自然であろう:

$$M \text{ が } \begin{cases} \text{例外型} \\ \text{一般型} \end{cases} \iff M \cong \begin{cases} \mathbb{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8(2), \mathbb{U} \oplus \mathbb{E}_8(2) \\ \text{上以外の格子.} \end{cases}$$

型 M の 2-elementary $K3$ 曲面のモジュライ空間は以下のように与えられる. 一般に, 符号 $(2, r(\Lambda) - 2)$ の格子 $\Lambda = (\Lambda, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ に対して, 集合 Ω_Λ を以下の式で定める:

$$\Omega_\Lambda := \{[\eta] \in \mathbf{P}(\Lambda \otimes \mathbf{C});\ \langle \eta, \eta \rangle = 0, \quad \langle \eta, \bar{\eta} \rangle > 0\}.$$

Ω_Λ は 2 つの互いに交わらない領域の和であり, 各連結成分は $r(\Lambda) - 2$ 次元の IV 型有界対象領域に同型である. 格子 Λ の自己同型群を $O(\Lambda)$ で表せば, $O(\Lambda)$ は Ω_Λ に射影変換群として固有不連続に作用する. 特に, $\mathrm{Aut}(\Omega_\Lambda) \supset O(\Lambda)$ である.

$\mathcal{M}_M^\circ$ を型 M の 2-elementary $K3$ 曲面の粗モジュライ空間とする（同型類全体の集合に適当な解析空間の構造を入れたもの）. 集合としては,

$$\mathcal{M}_M^\circ := \{(X, \iota);\ H_+^2(X, \mathbf{Z}) \cong M\}/\text{isomorphism}$$

である. このとき, 周期写像 $\varpi_M \colon \mathcal{M}_M^\circ \to \Omega_{M^\perp}/O(M^\perp)$ を以下のように定める:

$$\varpi_M(X, \iota) := \left[\left(\cdots, \int_{\gamma_i} \eta, \cdots\right)\right], \qquad \eta \in H^0(X, K_X) \setminus \{0\}.$$

ここで, $\gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^{22}$ は等長同型 $H_2(X, \mathbf{Z}) \cong \mathbb{L}_{K3}$ を与える $H_2(X, \mathbf{Z})$ の基底であり, 以下の条件を充たすものである: γ に関する ι^* の行列表示を I_M とし, γ の定める同型により $H_2(X, \mathbf{Z})$ と $\mathbb{L}_{K3}$ を同一視するとき,

$$M = \{l \in \mathbb{L}_{K3};\ I_M(x) = x\}, \qquad M^\perp = \{l \in \mathbb{L}_{K3};\ I_M(x) = -x\}.$$

Theorem 2.6. 周期写像 ϖ_M は以下の同型を導く:

$$\varpi_M \colon \mathcal{M}_M^\circ \cong \Omega_{M^\perp}^\circ / O(M^\perp), \qquad \Omega_{M^\perp}^\circ := \Omega_{M^\perp} \setminus \bigcup_{d \in \Delta_{M^\perp}} H_d$$

ここで, $\Delta_{M^\perp} = \{d \in M^\perp;\ d^2 = -2\}$ は $M^\perp$ のルートの集合であり, 各ルートの定める鏡映面が $H_d := \{[\eta] \in \Omega_{M^\perp};\ \langle d, \eta \rangle = 0\}$ である.

Proof. [19] を参照. □

3. 解析的捩率と対合付き $K3$ 曲面の不変量

(X, g_X) をコンパクト Kähler 多様体とし, $\iota \colon X \to X$ を g_X に関して等長な X の正則対合とする. $\square_q = 2(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)^2$ を X 上の $(0, q)$-形式に作用するラプラシアンとする. ただし, $\bar{\partial}$ の共役 $\bar{\partial}^*$ は, g_X から定まる $(0, q)$-形式全体の成すベクトル空間上の内積（L^2-内積）に関する共役である. $\square_q$ の同変ゼータ関数を以下の式で定める:

$$\zeta_q(s, \iota) = \mathrm{Tr}\,[\iota\, \square_q^{-s}|_{(\ker \square_q)^\perp}] = \sum_{\lambda \in \sigma(\square_q) \setminus \{0\}} \lambda^{-s}\, \mathrm{Tr}[\iota^*|_{E(\square_q, \lambda)}].$$

ここで, $E(\square_q, \lambda)$ は固有値 λ に対する固有空間であり, 有限次元であることが知られている. 特に, 自明な対合 id_X に対して, 以下のように定める:

$$\zeta_q(s) := \zeta_q(s, \mathrm{id}_X).$$

Definition 3.1. (X, g_X) の解析的捩率 (analytic torsion) を以下の式で定める:

$$\tau(X, g_X) := \exp[-\sum_{q \geq 0}(-1)^q q\, \zeta_q'(0)].$$

(X, g_X, ι) の同変解析的捩率を以下の式で定める:

$$\tau_{\mathbf{Z}_2}(X, g_X)(\iota) := \exp[-\sum_{q \geq 0}(-1)^q q\, \zeta_q'(0, \iota)].$$

同変解析的捩率は Kähler 多様体 X にコンパクト Lie 群が等長かつ正則に作用しているとき, 同様に定義される. 解析的捩率, 同変解析的捩率については, [15], [3], [4], [11] を参照.

以下, (X, ι) を 2-elementary $K3$ 曲面に限定して考える. κ を X 上の ι-不変な Ricci-平坦 Kähler 形式とする, i.e.,

$$\kappa = \sqrt{-1}\sum_{i,j} g_{i\bar{j}}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j \quad \Longrightarrow \quad \iota^*\kappa = \kappa, \quad d\kappa = 0, \quad \frac{\partial^2 \log \det(g_{i\bar{j}})}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} = 0.$$

$X^\iota = \sum_i C_i$ を連結成分への分解とし, 以下のように定める:

$$\mathrm{vol}(X, \kappa) := \int_X \kappa^2/2, \qquad \mathrm{vol}(C_i, \kappa|_{C_i}) := \int_{C_i} \kappa|_{C_i}$$

Theorem 3.2. *型 M の 2-elementary $K3$ 曲面 (X, ι) に対して,*

$$\tau_M(X, \iota) := \mathrm{vol}(X, \frac{\kappa}{2\pi})^{\frac{14-r(M)}{4}} \tau_{\mathbf{Z}_2}(X, \kappa)(\iota) \prod_i \mathrm{Vol}(C_i, \kappa|_{C_i})\tau(C_i, \frac{\kappa}{2\pi}|_{C_i})$$

と定めれば, $\tau_M(X, \iota)$ は κ の選び方に依存しない. 特に, $\tau_M(X, \iota)$ は (X, ι) の不変量である.

Proof. [19] を参照. □

Remark 3.3. Ricci-平坦性は本質的な仮定ではない. κ の Ricci-平坦性を仮定しないときは或る Bott-Chern 二次特性数を上の $\tau_M(X, \iota)$ の定義式の右辺に掛ける [19].

Theorem 2.6 と Theorem 3.2 より, $\tau_M(X, \iota)$ は周期 $\varpi_M(X, \iota)$ により定まり, τ_M はモジュライ空間 $\mathcal{M}_M^o = \Omega_{M^\perp}^o / O(M^\perp)$ 上の関数を定める. [19] の主結果は以下の様に述べられる.

Theorem 3.4. *正整数 $\nu > 0$ と $\Omega_{M^\perp}$ 上の $O^+(M^\perp)$ に関する "保型形式" Φ_M が存在して,*

$$\tau_M = \|\Phi_M\|^{-1/2\nu}, \qquad \mathrm{div}\, \Phi_M = \nu \sum_{d \in \Delta_{M^\perp}} H_d.$$

ここで, "保型形式" とは $\Omega_{M^\perp}$ 上の適当な正則直線束に値を持つ保型形式の事である. 詳細は [19] を参照. M が例外型格子のとき, τ_M はそれぞれ 10 次元と 26 次元の Borcherds Φ-関数 (の 10 次元部分空間への制限) の Petersson ノルムとして表示される [19]. このように, M が例外型格子のとき τ_M の明示公式が既に得られているので, 以下 M が一般型格子のときに τ_M の明示公式を考える.

4. $K3$ 曲面と Del Pezzo 曲面の双対性?

Definition 4.1. コンパクトな連結非特異複素曲面 V は反標準束 K_V^{-1} が豊富なとき, Del Pezzo 曲面と呼ばれる. Del Pezzo 曲面 V の次数を以下の式で定める:

$$\deg V := \int_V c_1(V)^2 \in \mathbf{Z}_{\geq 1}.$$

Fact 4.2. *V を次数 d の Del Pezzo 曲面とする. 自然数 $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ に対して, $\mathbf{P}^2$ の n 点ブローアップを $\mathbf{P}^2[n]$ で表せば, 以下が成り立つ:*
(1) $1 \leq d \leq 9$ であり,

$$V \cong \begin{cases} \mathbf{P}^2[9-d] & (d \neq 8) \\ \mathbf{P}^2[1] \text{ or } \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 & (d = 8). \end{cases}$$

特に, $d = 10 - b_2(V)$ である.
(2) Hodge 指数定理から $(H^2(V, \mathbf{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{cup}})$ は双曲型格子であり, (1) から以下の格子の等長同型が存在する:

$$(H^2(V, \mathbf{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{cup}}) \cong \begin{cases} \mathbb{I}_{1,9-d} & (V \cong \mathbf{P}^2[9-d]) \\ \mathbb{U} & (V \cong \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1). \end{cases}$$

ただし, $\mathbb{I}_{1,m} = (\mathbf{Z}^{m+1}, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1_m \end{smallmatrix}\right))$, 1_m は m 次単位行列である.

Proof. [12] を参照. □

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ を V の全コホモロジー格子

$$H(V, \mathbf{Z}) := H^0(V, \mathbf{Z}) \oplus H^2(V, \mathbf{Z}) \oplus H^4(V, \mathbf{Z})$$

上のカップ積とする. $(H(V, \mathbf{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を V の向井格子と呼ぶ. Fact 4.2 より,

$$(H(V, \mathbf{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle) \cong \mathbb{U} \oplus \mathbb{I}_{1,9-d}, \qquad \mathrm{sign}(H(V, \mathbf{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle) = (2, 10-d)$$

が成り立つ. $H^2(V, \mathbf{R})$ の光錐を

$$\mathcal{C}_V = \{x \in H^2(V, \mathbf{R}); x^2 > 0\}$$

とすれば, $\mathcal{C}_V$ は二つの連結成分から成るが, V の Kähler 類を含む連結成分を $\mathcal{C}_V^+$ で表す. 条件 $\mathrm{sign}(H(V, \mathbf{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle) = (2, 10-d)$ と $H^0(V, \mathbf{Z}) \oplus H^4(V, \mathbf{Z}) \cong \mathbb{U}$ から, 以下の複素多様体の同型が成り立つ ($\Omega_{H(V,\mathbf{Z})}^+$ は $\Omega_{H(V,\mathbf{Z})}$ の連結成分):

$$(*) \qquad \iota_V : H^2(V, \mathbf{R}) + \sqrt{-1}\mathcal{C}_V^+ \ni z \to -\frac{z^2}{2}[1] \oplus z \oplus [V] \in \Omega_{H(V,\mathbf{Z})}^+.$$

ι_V により, $H^2(V, \mathbf{R}) + \sqrt{-1}\mathcal{C}_V^+$ は $\Omega_{H(V,\mathbf{Z})}^+$ の管状領域表示を与える.

$\mathcal{K}_V^+$ を V の Kähler 錐とする, i.e.,

$$\mathcal{K}_V^+ = \{x \in H^2(V, \mathbf{R}); x \text{ は Kähler 類 }\} \subset \mathcal{C}_V^+.$$

集合

$$\frac{H^2(V, \mathbf{R})}{H^2(V, \mathbf{Z})} + \sqrt{-1}\mathcal{K}_V^+ \subset H^2(V, \mathbf{C})/H^2(V, \mathbf{Z})$$

は V の複素 Kähler 錐と呼ばれ, その元を複素 Kähler 類と呼ぶ. 商空間

$$\mathcal{KM}(V) := \left(\frac{H^2(V, \mathbf{R})}{H^2(V, \mathbf{Z})} + \sqrt{-1}\mathcal{K}_V^+\right) / \mathrm{Im}\left\{\mathrm{Aut}(V) \to O^+(H^2(V, \mathbf{Z}))\right\}$$

は V の Kähler モジュライ空間と呼ばれる [7]. Del Pezzo 曲面 V に対して, 一般に, 群 $\mathrm{Im}\left\{\mathrm{Aut}(V) \to O^+(H^2(V, \mathbf{Z}))\right\}$ は有限群であることが知られている. (適当なルー

ト系の Weyl 群になる [12].) V の第一 Chern 類 $c_1(V) = -c_1(K_V) \in H^2(V, \mathbf{Z})$ はこの群の作用で不変なベクトルである.

正則写像 ι_V は以下の正則写像を誘導する:

$$\varpi_V : \mathcal{KM}(V) \ni [\eta] \to [\iota_V(\eta)] \in \mathcal{M}_{H(V,\mathbf{Z})} := \Omega^+_{H(V,\mathbf{Z})}/O^+(H(V,\mathbf{Z})).$$

$(*)$ により η は $H(V,\mathbf{Z})$ 上の重さ 2 の偏極 Hodge 構造と同一視され, $\mathcal{M}_{H(V,\mathbf{Z})}$ は $H(V,\mathbf{Z})$ 上の重さ 2 の偏極 Hodge 構造の分類空間なので, $\varpi_V([\eta])$ は Griffiths の意味での η の周期である. $\varpi_V([\eta])$ を $(V,[\eta])$ の Kähler 周期と呼ぶことにする. (一般的な呼び方かどうか知らない.)

以下, Kähler モジュライ空間 $\mathcal{KM}(V)$ 上に関数を構成するのであるが, その構成 (Borcherds 積) には楕円モジュラー形式を用いる. Dedekind η-関数, Jacobi テータ関数は以下の式で定義されていたことを思い出す:

$$\eta(q) := q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n), \qquad \vartheta_{\mathbb{A}_1}(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}, \qquad \vartheta_{\mathbb{A}_1+1/2}(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(n+\frac{1}{2})^2}.$$

この時, 数列 $\{c_k^{(0)}(l)\}_{l\in\mathbf{Z}}$, $\{c_k^{(1)}(l)\}_{l\in\mathbf{Z}+k/4}$ を以下の母関数により定義する:

$$f_k^{(0)}(\tau) = \sum_{l\in\mathbf{Z}} c_k^{(0)}(l)\, q^l := \frac{\eta(q^2)^8\,\vartheta_{\mathbb{A}_1}(q)^k}{\eta(q)^8\eta(q^4)^8},$$

$$f_k^{(1)}(\tau) = \sum_{l\in k/4+\mathbf{Z}} c_k^{(1)}(l)\, q^l := -8\frac{\eta(q^4)^8\,\vartheta_{\mathbb{A}_1+1/2}(q)^k}{\eta(q^2)^{16}}.$$

Theorem 4.3. *Del Pezzo* 曲面 V の *Kähler* モジュライ空間 $\mathcal{KM}(V)$ 上の形式的無限積を次式で定める*:*

$$\Phi_V(w) := e^{\pi i\langle c_1(V), w\rangle}\prod_{\delta\in\mathbf{Z}_2}\prod_{\lambda\in\mathrm{Eff}(V),\,\lambda\equiv\delta c_1(V) \mod 2}(1-e^{\pi i\langle\lambda,w\rangle})^{c^{(\delta)}_{\deg V}(\lambda^2/4)}.$$

ただし, $\mathrm{Eff}(V)\subset H^2(V,\mathbf{Z})$ は V 上の有効因子の同値類全体の集合

$$\mathrm{Eff}(V) := \{c_1(L)\in H^2(V,\mathbf{Z});\ L\in H^1(V,\mathcal{O}_V^*),\quad h^0(L) = \dim H^0(V,L) > 0\}$$

を表す. また, $\lambda\equiv\delta\, c_1(V) \mod 2$ は $\lambda-\delta\, c_1(V)$ がコホモロジー群 $H^2(V,\mathbf{Z})$ において 2 で割れることを意味する. 以下, 同型 $(*)$ により Φ_V を対応する $\Omega_{H(V,\mathbf{Z})}$ の開集合上の形式的関数と見なす. 同一視 $(*)$ の下で, 以下の主張が成り立つ*:*

(1) Φ_V は $\mathrm{Im}\, w \gg 0$ となる $w\in H^2(V,\mathbf{R})+\sqrt{-1}\mathcal{K}_V^+$ に対して絶対収束し, さらに $\Omega^+_{H(V,\mathbf{Z})}$ 上の $O^+(H(V,\mathbf{Z}))$ に関する重さ $\deg V+4$ の保型形式に解析接続される. Φ_V の零因子は $H(V,\mathbf{Z})$ のノルム -1-ベクトルに関する鏡映面全体の和集合である*:*

$$\mathrm{div}\,\Phi_V = \sum_{d\in H(V,\mathbf{Z}),\, d^2=-1} H_d.$$

(2) (X,ι) を型 M の *2-elementary* $K3$ 曲面, (V,η) を *Del Pezzo* 曲面と複素化 *Kähler* 類の組とする. このとき,

$$\deg V = r(M)-10, \qquad g(M) = 0$$

ならば, $M^\perp\cong H(V,\mathbf{Z})(2)$ である. 等長同型 $M^\perp\cong H(V,\mathbf{Z})(2)$ の下で, (X,ι) の周期と (V,η) の *Kähler* 周期が一致するならば, *i.e.,*

$$\varpi_M(X,\iota) = \varpi_V([\eta]),$$

以下の等式が成り立つ:

$$(**)\qquad \tau_M(X,\iota) = C_M \left\| \Phi_V\left(\frac{\varpi_V([\eta])}{2}\right)\right\|^{-1/2}.$$

ただし, C_M は M のみに依存する定数であり,

$$\|\Phi_V(w)\|^2 := \langle \operatorname{Im} w, \operatorname{Im} w\rangle^{\deg V+4}|\Phi_V(w)|^2$$

は保型形式 Φ_V の *Petersson* ノルムである.

Proof. [21] を参照. □

等式 $(**)$ の左辺は型 M の 2-elementary $K3$ 曲面のモジュライ空間上で解析的捩率を用いて構成された関数である. 一方, $(**)$ の右辺は Del Pezzo 曲面の Kähler モジュライ空間上の関数 (保型形式) である. この意味で, モジュライ空間上の特別な関数まで含めて考えたとき, Theorem 4.3 は 2-elementary $K3$ 曲面の複素構造のモジュライ空間と Del Pezzo 曲面 Kähler モジュライ空間との間のある種の等価性を意味している. 筆者は Φ_V が何らかの意味で V に関して自然で幾何学的な保型形式であると思うのであるが, それがどういう意味でなのか良く判らない. Fourier 係数 $c^{(\delta)}_{\deg V}(l)$ を V の幾何学から構成できていないという意味で, Theorem 4.3 は未完である. ミラー対称性では, Kähler モジュライ空間上で Gromov-Witten ポテンシャル等を考えたりするが, Φ_V も V のシンプレクティック幾何学を通して理解できるのであろうか?

Example 4.4. Φ_V がテータ関数を用いて表示できる例があるので, 紹介する [17], [20]. 集合 $\mathbb{H}_2$ を以下の式で定める:

$$\mathbb{H}_2 := H + i\,C^+ = \{W \in M(2,\mathbf{C});\ (W - W^*)/2i > 0\},\qquad W^* := {}^t\overline{W}.$$

ここで, H は 2×2-Hermite 行列全体の集合であり, C^+ は正定値な 2×2-Hermite 行列全体の集合である. $\mathbb{H}_2$ 上の座標 $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ を以下の式で定める:

$$w = w_1\,H + w_2\,E_1 + w_3\,E_2 + w_4\,E_3 \in \mathbb{H}_2.$$

ただし,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{1+i} \\ \frac{-1}{1-i} & 1 \end{pmatrix},\quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{1+i} \\ \frac{-1}{1-i} & 1 \end{pmatrix},\quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{1+i} \\ \frac{-1}{1-i} & 0 \end{pmatrix},\quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{1+i} \\ \frac{-i}{1-i} & 0 \end{pmatrix}$$

である. H 上の二次形式を以下の式で定める:

$$\langle w, w\rangle := 2\det(w) = w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 - w_4^2.$$

この二次形式により, 格子 $(\mathbf{Z}H + \mathbf{Z}E_1 + \mathbf{Z}E_2 + \mathbf{Z}E_3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は $\mathbb{I}_{1,3}$ と等長同型である. $V = \mathbf{P}^2[3]$ を次数 6 の Del Pezzo 曲面とし, $\pi\colon V \to \mathbf{P}^2$ を $\mathbf{P}^2$ の 3 点 P_1, P_2, P_3 におけるブローアップとする. このとき, $H = p^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$, E_i を例外因子 $\pi^{-1}(P_i)$ の定める V 上の正則直線束と同一視すれば, Chern 類を取る操作は等長同型

$$c_1\colon \mathbf{Z}H + \mathbf{Z}E_1 + \mathbf{Z}E_2 + \mathbf{Z}E_3 \to H^2(V,\mathbf{Z})$$

を誘導する. 従って, Chern 類写像は複素計量ベクトル空間の同型

$$c_1\colon \mathbb{H}_2 \cong H^2(V,\mathbf{C})$$

を誘導する. このとき, $\Omega_{H(V,\mathbf{Z})}$ は以下の写像 ι_V により $\mathbb{H}_2$ に同型である:

$$\iota_V\colon \mathbb{H}_2 \ni w \to -\det(w)\,[1] \oplus c_1(w) \oplus [V] \in \Omega_{H(V,\mathbf{Z})}.$$

$a,b\in\{0,\frac{1+i}{2}\}^2$ に対して, $\mathbb{H}_2$ 上の Freitag テータ関数を以下の式で定める:

$$\Theta_{a,b}(w):=\sum_{m\in\mathbb{Z}[i]^2}\exp\pi i\left\{\left(m+\frac{a}{1+i}\right)^* w\left(m+\frac{a}{1+i}\right)+2\operatorname{Re}\left(\frac{b}{1+i}\right)^* m\right\}.$$

Freitag テータ関数 $\Theta_{a,b}(w)$ は, $a^*b\in\mathbf{Z}$ が成り立つとき偶であると定義する. すると, 全部で 10 個の偶 Freitag テータ関数が存在する. 偶 Freitag テータ関数全部の積

$$\Delta_{\mathrm{MSY}}(w):=\prod_{\mathrm{even}}\Theta_{a,b}(w)$$

を松本-佐々木-吉田の保型形式と呼ぶ事にすれば, 6 次 Del Pezzo 曲面 V に対して Φ_V は松本-佐々木-吉田の保型形式に一致し, この保型形式の無限積展開を与える:

$$\Phi_V(w)=2^{-12}\Delta_{\mathrm{MSY}}(2w).$$

このようにして得られる無限積展開を 2 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_2=\{W\in\mathbb{H}_2;\ {}^tW=W\}$ に制限すれば, Gritsenko-Nikulin が 2 次の井草保型形式に対して与えた無限積展開を得る [10]. 第 2 節 Example 2.4 (3) で考えた松本-佐々木-吉田の $K3$ 曲面に対して, τ_M を与える保型形式が Δ_{MSY} である [20].

5. $g(M)$ が小さい時の τ_M の明示公式

M を $\mathbb{L}_{K3}$ の原始的 2-elementary 双曲型格子とすれば, $M^\perp$ は以下のように二つの双曲型格子の直和に分解する [8]:

$$M^\perp=\mathbb{U}(N)\oplus L.$$

ここで, $N\in\{1,2\}$ であり, L も 2-elementary 双曲型格子である.

Φ_V の一般化を述べるため, L の Weyl 部屋を定義したい. 前と同様,

$$\mathcal{C}_L:=\{x\in L\otimes\mathbf{R};\ x^2>0\}$$

を双曲型格子 L の光錐とする. L のルートの集合を $\Delta_L:=\{d\in L;\ d^2=-2\}$ で定める. ルート $d\in\Delta_L$ に対して, $s_d\in O(L)$ を d の定める鏡映とする:

$$L\ni x\to s_d(x):=x+\langle x,d\rangle\, d\in L.$$

このとき, s_d は光錐 $\mathcal{C}_L$ に作用する. 鏡映 $s_d\colon\mathcal{C}_L\to\mathcal{C}_L$ の不動点集合 (鏡映面) を $\mathbf{h}_d$ で表す. 即ち, $\mathbf{h}_d=\{x\in\mathcal{C}_L;\ \langle x,d\rangle=0\}$ である. L の Weyl 群 W_L は集合 $\{s_d\}_{d\in\Delta_L}$ により生成される $O(L)$ の部分群である. このとき,

$$\mathcal{C}_L\setminus\bigcup_{d\in\Delta_L}\mathbf{h}_d=\bigcup_\alpha\mathcal{W}_\alpha$$

を連結成分への分解とすれば, 任意の $\mathcal{W}_\alpha$ は W_L の $\mathcal{C}_L$ への作用に関する基本領域であり, L の Weyl 部屋と呼ばれる.

$\mathcal{W}\subset\mathcal{C}_L$ を L の一つの Weyl 部屋とし, $L\otimes\mathbf{R}+i\mathcal{W}$ 上で定義された形式的 Fourier 級数 $\Psi_{M^\perp}(z,f^{(0)}_{r(M)-10})$ を以下の無限積で定義する:

$$\begin{aligned}\Psi_{M^\perp}(z,f^{(0)}_{r(M)-10}):=e^{2\pi i\langle\varrho(L,\mathcal{W}),z\rangle}&\prod_{\lambda\in L,\,\lambda\cdot\mathcal{W}>0,\,\lambda^2\geq-2}(1-e^{2\pi i\langle\lambda,z\rangle})^{c^{(0)}_{r(M)-10}(\lambda^2/2)}\\ \times&\prod_{\lambda\in 2L^\vee,\,\lambda\cdot\mathcal{W}>0,\,\lambda^2\geq-2}(1-e^{\pi iN\langle\lambda,z\rangle})^{2^{g(M)}c^{(0)}_{r(M)-10}(\lambda^2/2)}\\ \times&\prod_{\lambda\in\rho(L,\mathcal{W})+L,\,\lambda\cdot\mathcal{W}>0,\,\lambda^2\geq0}(1-e^{2\pi i\langle\lambda,z\rangle})^{2c^{(1)}_{r(M)-10}(\lambda^2/2)}.\end{aligned}$$

ただし, $\varrho(L,\mathcal{W}) \in L\otimes\mathbf{Q}$ は $(L,\mathcal{W},f^{(0)}_{r(M)-10})$ の Weyl ベクトル [5], [6] と呼ばれるベクトルで, $f^{(0)}_{r(M)-10}$ の Fourier 係数を用いて明示的に与えることができる. $r(L)\leq 10$ のとき, $\rho(L,\mathcal{W})$ の具体的な表示を Lemma 5.4 で与える. 一般に, $(L,\mathcal{W},f^{(0)}_{r(M)-10})$ の Weyl ベクトルは通常の意味での双曲型格子 L の Weyl ベクトルに一致しないことを注意する.

Remark 5.1. $g(M)=0$ のとき, $N=2$, $L=H^2(V,\mathbf{Z})(2)$ であり, 以下の等式が成り立つ:

$$\Psi_{M^\perp}(z,f^{(0)}_{r(M)-10})=\Phi_V(z)^2.$$

ここで, V は $b_2(V)=r(L)$ をみたす Del Pezzo 曲面である. 従って, $\Psi_{M^\perp}(z,f^{(0)}_{r(M)-10})$ は一般の M に対する Φ_V の一般化と見なす事ができる. この例では, $c_1(V)$ は通常の双曲型格子の意味で $H^2(V,\mathbf{Z})$ の Weyl ベクトルになっている.

Theorem 4.3 は以下のように一般化される:

Theorem 5.2. *M は一般型格子で, 以下の条件 (i), (ii) の一つを充たすと仮定する:*

$$(i)\quad g(M)\leq 2. \qquad\qquad (ii)\quad g(M)=3,\quad r(M)\geq 11.$$

このとき, 次の主張が成り立つ:

(1) $\mathrm{Im}\,z\gg 0$ *ならば, 形式的無限積* $\Psi_{M^\perp}(z,f^{(0)}_{r(M)-10})$ *は絶対収束し, さらに* $O^+(M^\perp)$ *に関する* Ω^+_M *上の保型形式に解析接続される.*

(2) (X,ι) *が型* M *の 2-elementary* $K3$ *曲面ならば, 以下の等式が成り立つ:*

$$(\#)\qquad \begin{aligned}-4(2^{g(M)}+1)\log\tau_M(X,\iota)&=\log\|\Psi_{M^\perp}(\varpi_M(X,\iota),f^{(0)}_{r(M)-10})\|^2\\&\quad+\log\|\chi_{g(M)}(\Omega(X^\iota))^{2^{(4-g(M))}}\|^2+C_M.\end{aligned}$$

ここで, $\Omega(X^\iota)\in Sp_{2g(M)}(\mathbf{Z})\backslash\mathfrak{S}_{g(M)}$ *は曲線* X^ι *の周期であり,* $\|\cdot\|$ *は保型形式の Petersson ノルムを表す. また,* C_M *は格子* M *のみに依存する定数であり,* $\chi_g(\Omega)$ *は* g *次 Siegel 上半空間* $\mathfrak{S}_g$ *上の井草保型形式である, i.e.,*

$$\chi_g(\Omega):=\begin{cases}1 & (g=0)\\ \prod_{(a,b)\,\mathrm{even}}\theta_{a,b}(0,\Omega) & (g>0).\end{cases}$$

ただし, $\theta_{a,b}(z,\Omega)$ *は通常の Riemann テータ関数である.*

Proof. [21] を参照. □

$\Psi_{M^\perp}(z,f^{(0)}_{r(M)-10})$ は $\Gamma_0(4)$ の楕円モジュラー形式 $f^{(0)}_{r(M)-10}$ を $Mp_2(\mathbf{Z})$ のベクトル値楕円モジュラー形式に誘導し, その Borcherds 積 [5], [6] として得られる保型形式である. (1) はこの構成と Borcherds の定理 [5] から直ちに従う. $\Psi_{M^\perp}(z,f^{(0)}_{r(M)-10})$ の重さと零因子も Borcherds の定理 [5] から容易に計算される.

Remark 5.3. 条件 (i) または (ii) を充たす $\mathbb{L}_{K3}$ の原始的 2-elementary 双曲型格子の等長類は全部で 38 であり, そのリストは以下のように与えられる [8]:

(a) $g(M)=0$ ならば, $M^\perp$ は以下の 11 個の格子の何れかに等長である:

$$\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{A}_1^+\oplus\mathbb{A}_1^k\quad(0\leq k\leq 8),\quad \mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2),\quad \mathbb{A}_1^+\oplus\mathbb{A}_1^+.$$

(b) $g(M)=1$ ならば, $M^\perp$ は以下の 12 個の格子の何れかに等長である:

$$\mathbb{U}\oplus\mathbb{A}_1^+\oplus\mathbb{A}_1^k\quad(0\leq k\leq 9),\qquad \mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{D}_4,\quad \mathbb{U}\oplus\mathbb{U}(2).$$

(c) $g(M)=2$ ならば, $M^{\perp}$ は以下の 11 個の格子の何れかに等長である:

$$\mathbb{U}\oplus\mathbb{U}\oplus\mathbb{A}_1^k \quad (0\leq k\leq 9), \qquad \mathbb{U}\oplus\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{D}_4.$$

(d) $g(M)=3$ かつ $r(M)\geq 11$ ならば, $M^{\perp}$ は以下の 4 個の格子の何れかに等長である:

$$\mathbb{U}\oplus\mathbb{U}\oplus\mathbb{D}_4\oplus\mathbb{A}_1^k \quad (0\leq k\leq 3).$$

Theorem 5.2 より, 例外型格子 $\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8(2)$, $\mathbb{U}\oplus\mathbb{E}_8(2)$ と上の 38 の格子（の直交補格子）M に対して, τ_M の明示公式が得られたことになる.

$g(M)=0$ の場合の $\Psi_{M^{\perp}}(z,f^{(0)}_{r(M)-10})$ の Weyl ベクトルは Theorem 4.3 から具体的に求まっている. $g(M)>0$ の場合に $\Psi_{M^{\perp}}(z,f^{(0)}_{r(M)-10})$ の Weyl ベクトルの具体的な表示を与える. このとき, 2-elementary 双曲型格子 L を用いて,

$$M^{\perp}=\mathbb{U}\oplus L$$

と書ける. (序又は第 6 節を参照.) 以下の Lemma 5.4 では次のように記号を定める.

$\mathbb{A}_1^+$ の標準的な生成元を h, $\mathbb{A}_1^m$ の標準的な生成元を $\{d_1,\dots,d_m\}$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}(2)$ の標準的な生成元を $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ で表す. $L\subset\mathbb{L}_{K3}$ を原始的な 2-elementary 双曲型格子とし, $\mathcal{W}$ を L の Weyl 部屋の一つとする. 負定値ルート格子 $K\subset L$ に対して, $\mathcal{W}$ は Δ_K の分解を定める:

$$\Delta_K=\Delta_K^+\amalg-\Delta_K^+, \qquad \Delta_K^+:=\{d\in\Delta_K;\, d\cdot\mathcal{W}>0\}.$$

このとき K の Weyl ベクトル ρ_K を以下の式で定める:

$$\rho_K:=\frac{1}{2}\sum_{d\in\Delta_K^+}d.$$

Lemma 5.4. *$L\subset\mathbb{L}_{K3}$ を原始的な 2-elementary 双曲型格子とし, $\mathcal{W}$ を L の Weyl 部屋の一つとする. $r(L)\leq 10$ ならば, $\Psi_{\mathbb{U}\oplus L}(z,f^{(0)}_{10-r(L)})$ の Weyl ベクトル $\rho(L,\mathcal{W})$ は以下の式で与えられる:*

(1) *$k(L)=0$ ならば, L は以下の 12 個の格子の何れかに等長である:*

$$\mathbb{A}_1^+\oplus\mathbb{A}_1^m, \quad (0\leq m\leq 9), \quad \mathbb{U}(2), \quad \mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8(2).$$

このとき,

$$\rho(L,\mathcal{W})=\begin{cases}\frac{3}{2}h-\frac{1}{2}(d_1+\cdots+d_m) & \text{if} \quad L=\mathbb{A}_1^+\oplus\mathbb{A}_1^m\\ 2\,\mathfrak{e}+2\,\mathfrak{f} & \text{if} \quad L=\mathbb{U}(2)\\ 0 & \text{if} \quad L=\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8(2).\end{cases}$$

(2) *$k(L)=1$ ならば, L は以下の 11 個の格子の何れかに等長である:*

$$\mathbb{U}\oplus\mathbb{A}_1^m \quad (0\leq m\leq 8), \qquad \mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{D}_4, \quad \mathbb{U}\oplus\mathbb{E}_8(2).$$

このとき,

$$\rho(L,\mathcal{W})=\begin{cases}5\mathfrak{e}+4\mathfrak{f}-\frac{3}{2}(d_1+\cdots+d_m) & \text{if} \quad L=\mathbb{U}\oplus\mathbb{A}_1^m\\ 3\,\mathfrak{e}+3\,\mathfrak{f}-\rho_{\mathbb{D}_4} & \text{if} \quad L=\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{D}_4\\ \mathfrak{e} & \text{if} \quad L=\mathbb{U}\oplus\mathbb{E}_8(2).\end{cases}$$

(3) *$k(L)=2$ ならば, L は以下の 6 個の格子の何れかに等長である:*

$$\mathbb{U}\oplus\mathbb{D}_4\oplus\mathbb{A}_1^m \quad (0\leq m\leq 4), \qquad \mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{D}_4\oplus\mathbb{D}_4.$$

このとき,

$$\rho(L,\mathcal{W}) = \begin{cases} 7\mathfrak{e}+6\mathfrak{f}-\rho_{\mathbb{D}_4}-\frac{5}{2}(d_1+\cdots+d_m) & \text{if} \quad L=\mathbb{U}\oplus\mathbb{D}_4\oplus\mathbb{A}_1^m \\ 3\,\mathfrak{e}+3\,\mathfrak{f}-\rho_{\mathbb{D}_4\oplus\mathbb{D}_4} & \text{if} \quad L=\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{D}_4\oplus\mathbb{D}_4. \end{cases}$$

(4) $k(L)=3$ ならば, L は以下の 4 個の格子の何れかに等長である:

$$\mathbb{A}_1^+\oplus\mathbb{E}_7\oplus\mathbb{A}_1^m \quad (0\le m\le 2), \qquad \mathbb{U}\oplus\mathbb{D}_4\oplus\mathbb{D}_4.$$

このとき,

$$\rho(L,\mathcal{W}) = \begin{cases} \frac{27}{2}h-\rho_{\mathbb{E}_7}-\frac{9}{2}(d_1+\cdots+d_m) & \text{if} \quad L=\mathbb{A}_1^+\oplus\mathbb{E}_7\oplus\mathbb{A}_1^m \\ 7\,\mathfrak{e}+6\,\mathfrak{f}-\rho_{\mathbb{D}_4\oplus\mathbb{D}_4} & \text{if} \quad L=\mathbb{U}\oplus\mathbb{D}_4\oplus\mathbb{D}_4. \end{cases}$$

(5) $k(L)=4$ ならば, L は以下の 3 個の格子の何れかに等長である:

$$\mathbb{A}_1^+\oplus\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{A}_1^m \quad (0\le m\le 1), \qquad \mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8.$$

このとき,

$$\rho(L,\mathcal{W}) = \begin{cases} \frac{47}{2}h-\rho_{\mathbb{E}_8}-\frac{17}{2}(d_1+\cdots+d_m) & \text{if} \quad L=\mathbb{A}_1^+\oplus\mathbb{E}_8\oplus\mathbb{A}_1^m \\ 15\,\mathfrak{e}+15\,\mathfrak{f}-\rho_{\mathbb{E}_8} & \text{if} \quad L=\mathbb{U}(2)\oplus\mathbb{E}_8. \end{cases}$$

(6) $k(L)=5$ ならば, L は以下の格子に等長である:

$$\mathbb{U}\oplus\mathbb{E}_8.$$

このとき,

$$\rho(L,\mathcal{W}) = 31\mathfrak{e}+30\mathfrak{f}-\rho_{\mathbb{E}_8}.$$

Proof. [21] を参照. □

Question 5.5. 75 種類の格子の中で 40 個の格子に対して等式 (#) が成り立つのであるから, 75 個すべての格子に対して等式 (#) の成立を期待することは自然に思える. 実際はどうなのであろうか?

Question 5.6. 何故 τ_M は以下の一系列の楕円モジュラー形式の *Borcherds* 積になっているのか説明せよ:

$$f^{(0)}_{10-r(M)}(\tau) = \frac{\eta(q^2)^8\,\vartheta_{\mathbb{A}_1}(q)^{10-r(M)}}{\eta(q)^8\eta(q^4)^8}.$$

この楕円モジュラー形式は $r(M)$, 即ち商複素曲面 X/ι (一般型の M に対しては有理曲面) の 2 次元 *Betti* 数のみにより定まっている. *Theorem 4.3* の後で述べたことにも関連するが, 楕円モジュラー形式 $f^{(0)}_{10-r(M)}(\tau)$ あるいはその *Fourier* 係数の幾何学的意味を説明せよ. 有理曲面上のベクトル束のモジュライ空間やシンプレクティク幾何学等により $f^{(0)}_{10-r(M)}(\tau)$ を説明することは可能であろうか?

6. 対合付き $K3$ 曲面のミラー双対性?

Definition 6.1. 対合付き $K3$ 曲面 (X,ι) が非常に一般 $\Longleftrightarrow$

$$\mathrm{Pic}(X) := H^2(X,\mathbf{Z})\cap H^{1,1}(X,\mathbf{R}) = H^2_+(X,\mathbf{Z}).$$

$\rho(X) := \mathrm{rk}_{\mathbf{Z}}\,\mathrm{Pic}(X)$ を X の Picard 数と言う.

以下, (X,ι) は非常に一般であると仮定する. (X,ι) の光錐を

$$\mathcal{C}_{(X,\iota)} := \{x \in H^2_+(X,\mathbf{R});\ x^2 > 0\}$$

で定義し, $\mathcal{C}_{(X,\iota)}$ の Kähler 類を含む連結成分を $\mathcal{C}^+_{(X,\iota)}$ で表す. (X,ι) の Kähler 錐を

$$\mathcal{K}^+_{(X,\iota)} = \{x \in H^2_+(X,\mathbf{R});\ x \text{ は } X \text{ の Kähler 類}\} = \mathcal{K}^+_X \cap H^2_+(X,\mathbf{Z})$$

で定義する. (X,ι) の Kähler モジュライ空間は以下の式で定義される解析空間である:

$$\mathcal{KM}(X,\iota) := \left(\frac{H^2_+(X,\mathbf{R})}{\mathrm{Pic}(X)} + \sqrt{-1}\mathcal{K}^+_{(X,\iota)}\right) / \mathrm{Im}\{\mathrm{Aut}(X,\iota) \to O(H^2_+(X,\mathbf{Z}))\}.$$

序で述べたように $H^2_+(X,\mathbf{Z})$ の符号は $(2, \mathrm{rk}_{\mathbf{Z}} H_+(X,\mathbf{Z}) - 2)$ なので, 以下の写像により $H^2_+(X,\mathbf{R}) + \sqrt{-1}\mathcal{K}^+_{(X,\iota)} \cong \Omega^+_{H_+(X,\mathbf{Z})}$ である:

$$\iota_{(X,\iota)}(\eta) := -\frac{\eta^2}{2}[1] \oplus \eta \oplus [X].$$

非常に一般な対合付き $K3$ 曲面 (X,ι) に対して, Kähler 周期写像を次式で定める:

$$\kappa\colon \mathcal{KM}(X,\iota) \ni \eta \to [\iota_{(X,\iota)}(\eta)] \in \Omega^+_{H_+(X,\mathbf{Z})}/O^+(H_+(X,\mathbf{Z})).$$

Definition 6.2. (X,ι) を対合付き $K3$ 曲面とし, $(X^\vee,\iota^\vee,\eta^\vee)$ を対合付き $K3$ 曲面とその上の $\iota^\vee$-不変複素 Kähler 類の三つ組みとする. このとき,
$(X^\vee,\iota^\vee,\eta^\vee)$ が (X,ι) のミラー双対 $\Longleftrightarrow$ 以下の条件を充たす等長同型 $\alpha\colon H(X,\mathbf{Z}) \cong H(X^\vee,\mathbf{Z})$ が存在する:
(1) $\alpha(H_\pm(X,\mathbf{Z})) = H_\mp(X^\vee,\mathbf{Z})$
(2) $\alpha(H^0(X,\Omega^2_X)) = \mathbf{C}\left(-\frac{(\eta^\vee)^2}{2}[1] \oplus \eta^\vee \oplus [X^\vee]\right)$

Fact 6.3. (X,ι) のミラー双対が存在する $\quad\Longleftrightarrow\quad g(X^\iota) = g(H^2_+(X,\mathbf{Z})) > 0.$

Proof. [14] を参照. □

格子の等長同型 $\alpha\colon H(X,\mathbf{Z}) \cong H(X^\vee,\mathbf{Z})$ が $\alpha(H_\pm(X,\mathbf{Z})) = H_\mp(X^\vee,\mathbf{Z})$ を充たせば, α は以下の領域の同型を誘導する:

$$\alpha\colon \Omega_{H_\pm(X,\mathbf{Z})} \cong \Omega_{H_\mp(X^\vee,\mathbf{Z})}.$$

Lemma 6.4. (X,ι) が非常に一般で $\rho(X) \le 10$ ならば, 以下の条件を充たす $\mathbf{Q}$-因子類 $D \in \mathrm{Pic}(X)^\vee$ が存在する:
(1) $f^*D = D \quad (\forall f \in \mathrm{Aut}(X,\iota))$. 特に D は ι-不変.
(2) $E \subset X$ が非特異有理曲線ならば,

$$D \cdot E = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad c_1(E)/2 \notin \mathrm{Pic}(X)^\vee \\ 2^{b_0(X^\iota)-1}+1 & \text{if} \quad c_1(E)/2 \in \mathrm{Pic}(X)^\vee. \end{cases}$$

(3) D はネフ, *i.e.*, 任意の代数曲線 $D \subset X$ に対して $C \cdot D \ge 0$ である. さらに, $H^2_+(X,\mathbf{Z}) \not\cong \mathbb{U}(2)$, $\mathbb{U} \oplus \mathbb{E}_8(2)$, $\mathbb{U}(2) \oplus \mathbb{E}_8(2)$, $\mathbb{A}^+_1 \oplus \mathbb{A}^9_1$ ならば, D は豊富である.
(4) D は $H^2_+(X,\mathbf{Z})$ の特性元である, *i.e.*,

$$D \cdot x = \frac{x^2}{2} \mod 1, \qquad \forall x \in \mathrm{Pic}(X)^\vee.$$

Proof. $L = H^2_+(X,\mathbf{Z})$ とする. D として $\Psi_{\mathbb{U}\oplus L}(z, f^{(0)}_{10-r(L)})$ の Weyl ベクトル $\rho(L,\mathcal{W})$ を選ぶ. (1) は (X,ι) の Kähler 錐が (X,ι) の自己同型で不変な事から, (2) は Borcherds の壁越公式 (Wall crossing formula) [5] から従う. (3) は (2) と中井の判定法及び Weyl ベクトルの具体的な表示 Lemma 5.4 から従う. (4) は Lemma 5.4 から従う. □

条件 (1), (2), (3), (4) は因子類 D を一意的に特徴付けると筆者は予想している.

以上の準備の下で, 第 5 節の保型形式を $\mathcal{KM}(X,\iota)$ 上の保型形式として表示することができる.

Definition 6.5. $\mathcal{KM}(X,\iota)$ 上の形式的無限積 $\Phi_{(X,\iota)}(z)$ を以下の式で定義する:

$$\begin{aligned}\Phi_{(X,\iota)}(z) := e^{2\pi i\langle D,z\rangle} & \prod_{\lambda\in \mathrm{Eff}(X),\,\lambda^2\geq -2} \left(1-e^{2\pi i\langle \lambda,z\rangle}\right)^{c^{(0)}_{\rho(X)-10}(\frac{\lambda^2}{2})} \\ \times & \prod_{\lambda\in \mathrm{Eff}(X)\cap 2\mathrm{Pic}(X)^\vee,\,\lambda^2\geq -2} \left(1-e^{\pi i\langle \lambda,z\rangle}\right)^{2^{g(X^\iota)}c^{(0)}_{\rho(X)-10}(\frac{\lambda^2}{2})} \\ \times & \prod_{\lambda\in (D+\mathrm{Pic}(X))\cap \mathrm{Eff}(X)_{\mathbf{Q}},\,\lambda^2\geq 0} \left(1-e^{2\pi i\langle \lambda,z\rangle}\right)^{2c^{(1)}_{\rho(X)-10}(\frac{\lambda^2}{2})}.\end{aligned}$$

ここで, $\mathrm{Eff}(X)\subset \mathrm{Pic}(X)$ は X 上の有効類全体を表し, $\mathrm{Eff}(X)_{\mathbf{Q}} := \mathrm{Eff}(X)\otimes\mathbf{Q}$ である.

$K3$ 曲面に対して, このような無限積を最初に考えたのは Gritsenko–Nikulin [9] である. (Bershadsky–Cecotti–大栗–Vafa[2] や Borcherds[5] の先行する仕事にも当然言及すべきである.) Theorem 5.2 を以下のように書き換えることができる:

Theorem 6.6. *以下の主張が成り立つ.*

(1) $\Phi_{(X,\iota)}(z)$ *は* $\mathrm{Im}\, z \gg 0$ *のとき絶対収束し,* $\mathcal{KM}(X,\iota)$ *上の保型形式に解析接続される.*

(2) $(X^\vee,\iota^\vee,\eta^\vee)$ *を* (X,ι) *のミラー双対とする.* $H_-(X,\mathbf{Z}) = H_+(X^\vee,\mathbf{Z})$ *が Remark 5.3 で与えられる格子ならば, 以下の等式が成り立つ:*

$$\tau_M(X,\iota)^{-4(2^{g(X^\iota)}+1)} = C_M \left\| \Phi_{(X^\vee,\iota^\vee)}(\kappa(X^\vee,\iota^\vee,\eta^\vee)) \otimes \chi_{g(X^\iota)}(\Omega(X^\iota))^{2^{(4-g(X^\iota))}} \right\|^2.$$

ただし, $C_M>0$ *は格子* $M=H_+(X,\mathbf{Z})$ *のみに依存する定数である.*

Proof. Theorem 5.2 の言い換えである. □

REFERENCES

[1] Barth, W., Peters, C., Van de Ven, A. *Compact Complex Surfaces*, Springer, Berlin (1984)

[2] Bershadsky, M., Cecotti, S., Ooguri, H., Vafa, C. *Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes*, Commun. Math. Phys. **165** (1994), 311–427

[3] Bismut, J.-M. *Equivariant immersions and Quillen metrics*, Jour. Differ. Geom. **41** (1995), 53–157

[4] Bismut, J.-M., Gillet, H., Soulé, C. *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I,II,III*, Commun. Math. Phys. **115** (1988), 49–78, 79–126, 301–351

[5] Borcherds, R.E. *Automorphic forms with singularities on Grassmanians*, Invent. Math. **132** (1998), 491-562

[6] Bruinier, J.H. *Borcherds Products on $O(2,l)$ and Chern classes of Heegner Divisors*, Lecture Notes Math. **1780** Springer Berline (2002)

[7] Cox, D.A., Katz S. *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry*, Amer. Math. Soc. Providence (1999)

[8] Finashin, S., Kharlamov, V. *Deformation classes of real four-dimensional cubic hypersurfaces*, E-print, arXiv:math.AG/0607137 (2006)

[9] Gritsenko, V.A., Nikulin, V.V. *K3 surfaces, Lorentzian Kac-Moody Lie algebras and mirror symmetry*, Math. Res. Lett. **3** (1996), 211–229

[10] ——— *Siegel automorphic form corrections of some Lorentzian Kac-Moody Lie algebras*, Amer. Jour. Math. **119** (1997), 181–224

[11] Köhler, K., Roessler, D. *A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry I*, Invent. Math. **145** (2001) 333–396

[12] Manin, Y. *Cubic Forms*, North-Holland, Amsterdam (1974)

[13] Nikulin, V.V. *Integral Symmetric bilinear forms and some of their applications*, Math. USSR Izv. **14** (1980) 103–167

[14] ______ *Factor groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms with respect to subgroups generated by 2-reflections*, Jour. Soviet Math. **22** (1983), 1401–1476

[15] Ray, D.B., Singer, I.M. *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. of Math. **98** (1973), 154–177

[16] *Géométrie des surfaces $K3$: modules et périods*, Séminaire Palaiseau, Astérisque **126** (1985)

[17] 吉田正章「私説 超幾何関数」, 共立出版 (1997)

[18] 吉川謙一「解析的トーションとモジュライ空間上の保型形式」, 数学 **52** (2000), 142–158

[19] Yoshikawa, K.-I. *$K3$ surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space*, Invent. Math. **156** (2004), 53–117

[20] ______ *Discriminant of certain $K3$ surfaces*, Representation Theory and Automorphic Forms, ed. by T. Kobayashi, W. Schmid, J.-H. Yang, Progress in Math. **255** Birkhäuser, Boston (2007) to appear

[21] ______ *$K3$ surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space II*, in preparation