

部分ゼータ関数の解析性

Analytic properties of partial zeta functions

橋本康史 *

Yasufumi HASHIMOTO †

Abstract

In this manuscript, we study analytic properties of zeta functions defined by the Euler products over elements of subsets of the set of prime elements.

1 導入

2005 年度 7 月に行われた研究集会「群の表現と調和解析の広がり」([H1] を参照) において、負曲率局所対称リーマン多様体 X の素な測地線の X の (正規とは限らない) 有限被覆 \tilde{X} における分解密度に対する研究について発表を行った。とくに、 X, \tilde{X} の基本群がそれぞれ $SL_2(\mathbb{Z})$ およびその合同部分群である場合には、各測地線の分解の型を全て決定し分解密度を完全に記述することができたが、この結果を X と \tilde{X} のセルバーグゼータ関数どうしの関係を述べた Venkov-Zograf の公式 [VZ] に適用すると、 \tilde{X} に関するセルバーグゼータ関数を X の素測地線に関する積で表すことができる。この表示式から、2 つのセルバーグゼータ関数の商をとることで、素測地線全体ではなく、ある特定の分解の型をもつような素測地線のみに関するオイラー積で与えられるゼータ関数の関数等式が導かれ、この関数等式から、部分セルバーグゼータ関数の $\{\text{Res} > 0\}$ での解析接続を得ることができる。([H1], [HW] を参照)。

実は、同じような考察は既に 1987 年に黒川信重氏によって、リーマンゼータ関数に対して行われている。実際に [Ku] では、素数全体ではなく、平方因子をもたない d に対し

*九州大学大学院数理学研究院 日本学術振興会特別研究員

†Faculty of Mathematics, Kyushu University, JSPS Research Fellow

MSC: primary: 11S40; secondary: 11R42, 11M36

This paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.

Received October 15, 2006.

て $(d/p) = 1$ (または $= -1$) なる素数 p に関するオイラー積で定義されたゼータ関数が $\{\text{Res} > 0\}$ で解析接続され、しかも $\text{Res} = 0$ で自然境界をもつことが示されている。

本文では、もっと一般に、オイラー積で定義され全平面に有理型に解析接続されるゼータ関数に対して部分ゼータ関数を定義し、その解析性に関する考察を行う。まず Theorem 2.1 で、部分ゼータ関数を $\{\text{Res} > 0\}$ へ解析接続し、さらに、Theorem 2.2 では、部分ゼータ関数が $\text{Res} = 0$ で自然境界をもつための非自明零点の分布に関する十分条件を導く。そして、実際にこれらの定理を使って、有理数体のアーベル拡大に関するデデキントゼータ関数と $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群に関するセルバーグゼータ関数に対する部分ゼータ関数が $\{\text{Res} > 0\}$ へ解析接続され、 $\text{Res} = 0$ で自然境界をもつことを証明する。

2 記号の準備, および主結果

P を無限可算集合とし、 $N : P \rightarrow \mathbb{R}_{>1}$ をある $d > 0$ に対して $\sum_{p \in P} N(p)^{-d} < \infty$ をみたすような写像とする。また、簡単のためここでは $\inf\{d > 0 \mid \sum_{p \in P} N(p)^{-d} < \infty\} = 1$ と仮定しておく。このような (P, N) に対して、ゼータ関数 $\zeta_P(s)$ を

$$\zeta_P(s) := \prod_{p \in P} (1 - N(p)^{-s})^{-1} \quad \text{Res} > 1$$

と定義し、(i) $\zeta_P(s)$ は $\{\text{Res} > 1\}$ で non-zero holomorphic で $s = 1$ で 1 位の極をもつ、(ii) $\zeta_P(s)$ は全複素平面 \mathbb{C} に有理型に解析接続される、と仮定する。

次に、 G を有限群、 \hat{G} を G の有限次元既約ユニタリ表現とし、写像 $\varphi : P \rightarrow \text{Conj}(G)$ と表現 $\rho \in \hat{G}$ に対して、 L 関数を

$$L_P^{(G)}(s, \rho) = L_P(s, \rho) := \prod_{p \in P} \det(1 - \rho(\varphi(p))N(p)^{-s})^{-1} \quad \text{Res} > 1$$

と定義し、 $\rho \neq 1$ のときに、(i') $L_P(s, \rho)$ は $\{\text{Res} \geq 1\}$ で non-zero holomorphic、(ii) $L_P(s, \rho)$ は全複素平面 \mathbb{C} に有理型に解析接続される、と仮定する。

以上の設定の下で、 $P_n(G) = P_n := \{p \in P \mid \varphi(p) \text{ の } G \text{ での位数が } n\}$ と定義し、この部分集合に対して、部分ゼータ関数を以下で定義する。

$$\zeta_{P_n}(s) := \prod_{p \in P_n} (1 - N(p)^{-s})^{-1} \quad \text{Res} > 1.$$

簡単のためここでは、 G が素数位数 q の巡回群の場合のみを取り扱うことにすると、部分ゼータ関数の解析性について次のような結果が得られる。

Theorem 2.1. 部分ゼータ関数 $\zeta_{P_q}(s)$ は以下の関数等式をみたす.

$$\frac{(\zeta_{P_q}(s))^q}{\zeta_{P_q}(qs)} = \frac{(\zeta_P(s))^q}{Z_P(s)}. \quad (2.1)$$

ここで, $Z_P^{(G)}(s) = Z_P(s) := \prod_{\rho \in \hat{G}} L_P(s, \rho)^{\dim \rho}$ である. また, 任意の $r \geq 1$ に対して $(\zeta_{P_q}(s))^{q^r}$ は $\{\text{Res} > 1/q^r\}$ に有理型に解析接続され, $s = 0$ のまわりに無限個の特異点をもつ.

Proof. 関数 $Z_P(s)$ を定義どおりに直接計算すると次の表示式が得られる.

$$\begin{aligned} Z_P(s) &= \prod_{n|\#G} \prod_{\rho \in \hat{G}} \prod_{p \in P_n} \det(1 - \rho(\varphi(p))N(p)^{-s})^{-\dim \rho} \\ &= \prod_{n|\#G} \prod_{p \in P_n} (1 - N(p)^{-ns})^{-\#G/n} \\ &= \prod_{n|\#G} (\zeta_{P_n}(ns))^{\#G/n}. \end{aligned}$$

とくに G が位数 q の巡回群である場合,

$$Z_P(s) = (\zeta_{P_1}(s))^q \zeta_{P_q}(qs)$$

が成り立つ. また, 自明に $\zeta_P(s) = \zeta_{P_1}(s)\zeta_{P_q}(s)$ なので, 関数等式 (2.1) が導かれる.

記号を簡略化し, (2.1) を

$$\frac{f(s)^q}{f(qs)} = g(s). \quad (2.2)$$

と記述すると, (2.2) から, 帰納的に次の式を得る.

$$f(s)^{q^r} = f(q^r s) \prod_{i=0}^{r-1} g(q^i s)^{q^{r-i-1}}. \quad (2.3)$$

定義から, $g(s)$ は全平面で有理型で, $f(q^r s)$ は $\{\text{Res} > 1/q^r\}$ で non-zero holomorphic なので, $f(s)^{q^r}$ が $\{\text{Res} > 1/q^r\}$ で有理型であることがわかる.

ここで, $g(s) = \zeta_P(s)^q / Z_P(s)$ なので, 関数 $g(s)$ は $\{\text{Res} > 1\}$ で non-zero holomorphic で, $s = 1$ で位数 $q-1$ の極をもつ. なので, (2.3) より, $f(s)$ が $s = 1/q^i (i = 0, 1, \dots)$ という無限個の特異点をもつことが証明できる. \square

上述の定理によって $\zeta_{P_q}(s)$ の $\{\text{Res} > 0\}$ での解析接続が得られた. 次に $\{\text{Res} \leq 0\}$ での解析性について調べたいが, そのために次の記号を定義する.

まず, Λ を $g(s)$ の $\{0 < \text{Res} < 1, \text{Im}s > 0\}$ での特異点の集合とし, $m(\sigma)$ を $\sigma \in \Lambda$ の位数 (ただし, σ が極のときは $m(\sigma)$ を負値でとる) とする. 集合 Ω を $\Omega := \{q^{-k}\sigma \mid \sigma \in \Lambda, k \geq 0\}$ とおくと, (2.3) より $f(s)$ の $\{0 < \text{Res} < 1\}$ での特異点の集合は Ω の部分集合であることがわかる. ここで $\sigma \in \Lambda$ に対して, $[\sigma]$ をある $k \in \mathbb{Z}$ に対して $\sigma' = q^k\sigma \in \Lambda$ とあらわされる Λ の元の集合とし, $M_q(\sigma) := \sum_{\sigma' \in [\sigma]} q^{-k}m(\sigma')$, $\Lambda_q := \{[\sigma] \subset \Lambda \mid M_q(\sigma) \neq 0\}$ とおくと, 部分ゼータ関数の解析性に関して次のことがわかる.

Theorem 2.2. Λ_q の元 $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ を $\sigma_i \neq \sigma_j (i \neq j)$ で虚部 $\beta_i := \text{Im}\sigma_i$ が $0 < \beta_i \leq \beta_j (i < j)$ となるように重複抜きで番号をつける. このとき, $j \rightarrow \infty$ に対して $\beta_j \rightarrow \infty$ で $(\beta_j)^{1/j} \rightarrow 1$ がなりたつなら, 部分ゼータ関数 $\zeta_{P_q}(s)$ は $\text{Res} = 0$ で自然境界をもつ.

Proof. (2.3) より, $f(s)$ の $\text{Res} = 0$ の近くの特異点の集合が

$$\Omega_q := \{q^{-k}\sigma \mid \sigma \in \Lambda_q, k \geq 0\}$$

と書けることがわかる. ここで, 背理法による証明を行うため, $f(s)$ が $\text{Res} = 0$ では自然境界をもたない, つまり, ある定数 $T_1, T_2 > 0 (T_2 > T_1)$ が存在して, 任意の $j, k \geq 0$ に対して $\beta_j q^{-k} < T_2$ または $\beta_j q^{-k} > T_1$ をみたと, と仮定する. そして, $T > 0$ に対して $j(T) := \{j \geq 0 \mid \beta_j \leq T \leq \beta_{j+1}\}$, $k \geq 0$ に対して $J(k) := j(T_1 q^k)$ を定義すると, 仮定から, $q^{-k}\beta_{J(k)+1} > T_2$ をみとすことがわかる. また, $j(T)$ と $J(k)$ はそれぞれ T と k に対して非減少であることを注意する.

ここで, 十分大きな $k > 0$ に対して, $\beta_{J(k)+1} - \beta_{J(k)}$ を評価する. すると, $J(k)$ の定義と仮定から,

$$q^{-k}(\beta_{J(k)+1} - \beta_{J(k)}) > T_2 - T_1 > 0. \quad (2.4)$$

という評価を得る. しかしながら, $(\beta_j)^{1/j} \rightarrow 1$ より

$$\beta_{j+1} - \beta_j = o(\beta_j) \quad \text{as } j \rightarrow \infty$$

なので,

$$q^{-k}(\beta_{J(k)+1} - \beta_{J(k)}) = q^{-k}o(\beta_{J(k)}) < q^{-k}o(T_1 q^k) = o(1) \quad \text{as } k \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

とも評価される. これらの2とおりの評価(2.4)と(2.5)は互いに矛盾するため, 証明の冒頭の仮定が誤りであり, 部分ゼータ関数が自然境界をもつことがわかる. \square

Remark 2.3. 上述の議論は, G が素数位数の巡回群の場合にだけ行われているが, 一般の有限群の場合にも *Theorem 2.1* や *2.2* のような結果を得るのは決して難しくはない. たとえば, 相異なる素数 q_1, q_2 に対して $\#G = q_1 q_2$ であるとき, 次の等式が得られる.

$$\frac{\zeta_{P_{q_1 q_2}}(q_1 q_2 s) \zeta_{P_{q_1 q_2}}(s)^{q_1 q_2}}{\zeta_{P_{q_1 q_2}}(q_1 s)^{q_2} \zeta_{P_{q_1 q_2}}(q_2 s)^{q_1}} = \frac{Z_P^{(G)}(s) \zeta_P(s)^{q_1 q_2}}{Z_P^{(H_1)}(s)^{q_2} Z_P^{(H_2)}(s)^{q_1}}, \quad (2.6)$$

ここで, H_1, H_2 はそれぞれ位数が q_1, q_2 の G の部分群である. なので, (2.6) で

$$f(s) := \frac{\zeta_{P_{q_1 q_2}}(s)^{q_2}}{\zeta_{P_{q_1 q_2}}(q_2 s)} \quad g(s) := (2.6) \text{ の右辺,}$$

とおくと, 次の関数等式を得る.

$$\frac{f(s)^{q_1}}{f(q_1 s)} = g(s).$$

このことから, Theorem 2.1 や 2.2 で行った議論を 2 度繰り返すことで, 部分ゼータ関数の解析性に関する Theorem 2.1, 2.2 のような結果を得ることができる.

3 例

3.1 デデキントゼータ関数の場合

k を \mathbb{Q} の有限次拡大体, K を k の有限ガロア拡大とする. P を K 上不分岐な k の素イデアルの集合とし, N を $\mathfrak{p} \in P$ の k 上のノルムとする. このとき, $\zeta_P(s)$ は次のように本質的にデデキントゼータ関数になる.

$$\zeta_P(s) = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Prim}(k) \\ \mathfrak{p} \nmid D}} (1 - N_k(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} = \zeta_k(s) \prod_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Prim}(k) \\ \mathfrak{p} \mid D}} (1 - N_k(\mathfrak{p})^{-s}).$$

ここで, $\text{Prim}(k)$ は k の素イデアルの集合, D は K の k に対する相対判別式である. このことから, $\zeta_P(s)$ が条件 (i), (ii) をみたすことがわかる. また, $G := \text{Gal}(K/k)$, φ をフロベニウス置換とすると, L 関数たちが条件 (i'), (ii) をみたすこともよく知られている. さらに, Artin factorization formula から, $Z_P(s)$ が次のように本質的に K に関するデデキントゼータ関数であることもわかる.

$$Z_P(s) = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Prim}(K) \\ \mathfrak{p} \nmid D}} (1 - N_K(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} = \zeta_K(s) \prod_{\substack{\mathfrak{p} \in \text{Prim}(K) \\ \mathfrak{p} \mid D}} (1 - N_K(\mathfrak{p})^{-s}).$$

このようなゼータ関数に対する部分ゼータ関数に関して次がわかる.

Claim 3.1. G を素数位数 q の巡回群とする. このとき, $\zeta_{P_q}(s)$ は $\{\text{Res} > 0\}$ に解析接続できる. また, k と K がともに \mathbb{Q} のアーベル拡大であるとき, $\zeta_{P_q}(s)$ は $\text{Res} = 0$ で自然境界をもつ.

$\zeta_{P_q}(s)$ の $\{\text{Res} > 0\}$ での解析性は Theorem 2.1 からすぐにわかる. $\zeta_{P_q}(s)$ が自然境界をもつことを証明するために, 次の補題を準備する.

Lemma 3.1. $\chi_i^{(1)}$ と $\chi_j^{(2)}$ ($1 \leq i, j \leq m$) をそれぞれ $\text{mod } q_i^{(1)}, q_j^{(2)}$ の相異なるディリクレ指標とする. すると, 2つの L 関数

$$L_1(s) = \prod_{i=1}^m L(s, \chi_i^{(1)}), \quad L_2(s) = \prod_{i=1}^m L(s, \chi_i^{(2)})$$

と十分大きな $T > 0$ に対して,

$$\sum_{\substack{0 < \text{Re} \sigma < 1 \\ 0 < \text{Im} \sigma < T \\ L_1(\sigma)L_2(\sigma)=0}} |m_1(\sigma) - m_2(\sigma)| > C \frac{T}{2\pi} \log T$$

が成り立つ. ここで, $C > 0$ は定数, $m_j(\sigma)$ は $L_j(s)$ の零点としての σ の位数である.

Proof. $m = 1$ の場合は, [Fu] において証明されている. 一般の $m \geq 1$ に対しても, [BP] の結果を用いることでこの補題を証明することができる. \square

Lemma 3.2. ([Co1], [Co2] and [Ba]) $L(s)$ をディリクレ L 関数とする. このとき, $M \geq 1$ と十分大きな $T > 0$ に対して次が成り立つ.

$$\sum_{\substack{\text{Re} \sigma = 1/2 \\ 0 < \text{Im} \sigma < T \\ L(\sigma) = 0 \\ m(\sigma) \leq M}} m(\sigma) > C_M \frac{T}{2\pi} \log T.$$

ここで, $C_M > 0$ は $M \rightarrow \infty$ に対して $C_M = 1 - O(M^{-2})$ なる定数である.

Lemma 3.3. ([Mo]) $L(s)$ をディリクレ L 関数とする. このとき, $0 < \alpha < 1/2$ に対して次が成り立つ.

$$\sum_{\substack{0 < \text{Re} \sigma < \alpha \\ 0 < \text{Im} \sigma < T \\ L(\sigma) = 0}} m(\sigma) \ll T^{5/2\alpha + \epsilon}.$$

Claim 3.1 の証明. まず, $n := [K : \mathbb{Q}]$ とおく. k と K が \mathbb{Q} のアーベル拡大なので, デデキントゼータ関数 $\zeta_k(s), \zeta_K(s)$ はディリクレ L 関数の積であらわされる. なので, $g(s)$ は次のように記述される.

$$g(s) = \left(\prod_{i=1}^n L(s, \chi_i^{(1)}) \right) / \left(\prod_{i=1}^n L(s, \chi_i^{(2)}) \right).$$

Lemma 3.1 から, ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\sum_{\substack{0 < \operatorname{Re} \sigma < 1 \\ 0 < \operatorname{Im} \sigma < T \\ g(\sigma) = 0}} m(\sigma) > C \frac{T}{2\pi} \log T$$

が成り立つことがわかる. また, Lemma 3.2 から, $\tilde{C}_M = m - O(M^{-2})$ なる定数 $\tilde{C}_M > 0$ に対して,

$$\sum_{\substack{\operatorname{Re} \sigma = 1/2 \\ 0 < \operatorname{Im} \sigma < T \\ g(\sigma) = 0 \\ m(\sigma) \leq M}} m(\sigma) > \tilde{C}_M \frac{T}{2\pi} \log T$$

が成り立つことがわかる. なので, M を $C + \tilde{C}_M > m$ となるように十分大きくとることで,

$$I(T) := \sum_{\substack{\operatorname{Re} \sigma = 1/2 \\ 0 < \operatorname{Im} \sigma < T \\ g(\sigma) = 0}} 1 > \frac{C + \tilde{C}_M - m}{M} \frac{T}{2\pi} \log T$$

が成り立つことがわかる. さらに, Lemma 3.3 から,

$$J_\alpha(T) := \sum_{\substack{0 < \operatorname{Re} \sigma < \alpha \\ 0 < \operatorname{Im} \sigma < T \\ g(\sigma)^{-1} = 0}} m(\sigma) \ll T^{5/2\alpha + \epsilon}.$$

なので,

$$\Omega_q(T) := \#\{\sigma \in \Omega_q \mid 0 < \operatorname{Im} \sigma < T\} > I(T) - \sum_{l \geq 1} J_{q-l-1}(q^l T) = O(T \log T)$$

であることがわかる. 以上より, Theorem 2.2 での条件が満たされ, 部分ゼータ関数が $\operatorname{Res} = 0$ で自然境界をもつことがわかる. \square

3.2 セルバーグ (ルエル) ゼータ関数の場合

\mathbb{H} を複素上半平面, Γ を $X_\Gamma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ の体積が有限であるような $SL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群とする. また, $P = \operatorname{Prim}(\Gamma)$ を Γ の素な双曲的共役類, $N(p)$ を $p \in \operatorname{Prim}(\Gamma)$ の固有値の大きいほうの 2 乗とする. このとき, $\zeta_P(s)$ はセルバーグ (ルエル) ゼータ関数

$$\zeta_\Gamma(s) := \prod_{p \in \operatorname{Prim}(\Gamma)} (1 - N(p)^{-s})^{-1} \quad \operatorname{Res} > 1$$

になり、条件 (i) と (ii) をみたく ([He] を参照) .

ここで、 Γ の指数有限な正規部分群 Γ' をとり、 $G = \Gamma/\Gamma'$ とし、 φ を $\text{Conj}(\Gamma)$ から $\text{Conj}(G)$ への自然射影とする。すると、 L 関数たちは条件 (i') と (ii) をみたく。このとき、[VZ] から、次が成り立つことがわかる。

$$Z_P(s) = \zeta_{\Gamma'}(s) := \prod_{p \in \text{Prim}(\Gamma')} (1 - N(p)^{-s})^{-1} \quad \text{Res} > 1.$$

このようなセルバーグゼータ関数に対して、部分ゼータ関数は次の性質をみたく。

Claim 3.2. G を奇素数位数 q の巡回群とする。このとき、 $\zeta_{P_q}(s)$ は $\{\text{Res} > 0\}$ に解析接続される。また、 Γ と Γ' がともに $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群であるとき、 $\zeta_{P_q}(s)$ は $\text{Res} = 0$ で自然境界をもつ。

Proof. $\{\text{Res} > 0\}$ での解析接続については、デデキントゼータ関数の場合と同様に Theorem 2.1 を使って導くことができる。

Γ が $SL_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群であるとき、セルバーグゼータ関数の判別式表示 ([Hu] と [Ko] を参照) から、

$$\Lambda = \{1/2 + ir_j \mid \lambda_j > 1/4\} \cup \bigcup_{l=1}^{h_\Gamma} \{\sigma \mid L(2\sigma, \chi_l) = 0, 0 < \text{Re}\sigma < 1/2, \text{Im}(\sigma) > 0\}$$

がわかる。ここで、 $\lambda_j = 1/4 + r_j^2$ は X_Γ 上のラプラシアン Δ の j 番目の固有値、 m_j を λ_j の重複度、 h_Γ は X_Γ のカスプの個数、そして、 $\chi_1, \dots, \chi_{h_\Gamma}$ は Γ によって定まるディリクレ指標である。このことから、デデキントゼータ関数の場合と同様に、 $q > 2$ の場合に Theorem 2.2 の条件がみたされ、Claim 3.2 が成り立つことを確認することができる。□

Remark 3.4. X_Γ と $X_{\Gamma'}$ がともにコンパクトリーマン面のときは、 $\Lambda = \{1/2 + ir_j\}$ で

$$\sum_{|r_j| < T} m_j \sim \frac{\text{vol}(X_\Gamma)}{4\pi} T^2, \quad m_j \ll \frac{r_j}{\log r_j}$$

であることが知られている。ここで、もし $f_1(s) := \zeta_\Gamma(s)^q, f_2(s) := \zeta_{\Gamma'}(s)$ に対して、

$$\sum_{\substack{\sigma = 1/2 + i\beta \\ 0 < \beta < T \\ \{f_1(\sigma)f_2(\sigma)\}^{-1} = 0}} |m_1(\sigma) - m_2(\sigma)| \gg T^{1+\delta} \quad (3.1)$$

なる $\delta > 0$ が存在することが示せれば、部分ゼータ関数が $\text{Res} = 0$ で自然境界をもつことを証明できる。しかしながら、今のところセルバーグゼータ関数に対して Lemma 3.1 や (3.1) のような結果は得られていないので、ここではコンパクトな場合の部分セルバーグゼータ関数が自然境界をもつかどうかを結論付けることはできない。

謝辞. 東京工業大学の黒川信重先生には数々の助言や参考文献の紹介をいただきましたことを感謝いたします. また, 2005 年度表現論シンポジウムにおける講演 ([H2]) の中で, コンパクトリーマン面の場合に部分セルバーグゼータ関数が自然境界をもつことを証明できた, との報告を行いました, Remark 3.4 で述べたように, 証明は不完全であることがわかりましたので, お詫びするとともに訂正をさせていただきます.

参考文献

- [Ba] P. J. Bauer, *Zeros of Dirichlet L-series on the critical line*, Acta. Arith. **93** (2000), 37–52.
- [BP] E. Bombieri and A. Perelli, *Distinct zeros of L-functions*, Acta. Arith. **83** (1998), 271–281.
- [Co1] B. Conrey, *More than two-fifth of the zeros of the Riemann zeta-function are on the critical line*, J. Reine Angew. Math. **399** (1989) 1–26.
- [Co2] B. Conrey, *Zeros of derivatives of Riemann’s Xi-function on the critical line. II*, J. Number Theory **17** (1983) 71–75.
- [Fu] A. Fujii, *On the zeros of Dirichlet L-functions (V)*, Acta Arith. **28** (1976) 395–403.
- [H1] 橋本康史, 離散群の素元の分解密度, および, ‘部分’セルバーグゼータ関数, 数理解析研究所講究録 **1467** p.112–121.
- [H2] 橋本康史, *Analytical properties of partial Selberg zeta functions*, 2005 年度表現論シンポジウム講演集, p.176–181.
- [HW] Y. Hashimoto and M. Wakayama, *Splitting density for lifting about discrete groups*, math.NT/0501284.
- [He] D. Hejhal, *The Selberg trace formula of $PSL(2, \mathbb{R})$ I, II*, Springer Lec. Notes in Math. **548**, **1001** Springer-Verlag, (1976, 1983).
- [Hu] M. N. Huxley, *Scattering matrices for congruence subgroups*, Modular forms (Ellis Horwood Ser. Math. Appl. 1984), 141–156.
- [Iw] H. Iwaniec, *Spectral Methods of Automorphic Forms*, Graduate Studies in Mathematics, **53**, 2nd edition, American Mathematical Society, (2002).

- [Ko] S. Koyama, *Determinant expressions of Selberg zeta functions I*, Trans. Amer. Math. Soc. **324** (1991), 149-168.
- [Ku] N. Kurokawa, *On certain Euler products*, Acta Arith. **48** (1987), 49-52.
- [Mo] H. L. Montgomery, *Zeros of L-functions*, Invent. Math. **8** (1969), 346-354.
- [Su] T. Sunada, *L-functions in geometry and some applications*, Curvature and topology of Riemannian manifolds (Katata, 1985), 266-284, Lecture Notes in Math., **1201**, Springer, Berlin (1986).
- [Ti] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta function*, 2nd ed., Clarendon Press, 1988.
- [VZ] A. B. Venkov and P. G. Zograf, *Analogues of Artin's factorization formulas in the spectral theory of automorphic functions associated with induced representations of Fuchsian groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), 1150-1158, 1343 (Russian), Math. USSR-Izv. **21** (1983), 435-443 (English translation).

連絡先 : 〒 812-0001 福岡市早良区百道浜 2-1-22 7 階,
財団法人九州システム情報技術研究所第 2 研究室 橋本康史

Current Address: Yasufumi HASHIMOTO
Institute of Systems & Information Technologies/KYUSHU,
7F 2-1-22, Momochihama, Fukuoka 814-0001, JAPAN

e-mail:hasimoto@isit.or.jp