RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B7**
(2008), 83–99

既約な multiplicity-free 空間における可視的作用[†]

(Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces)

早稲田大学・大学院理工学研究科　笹木 集夢 (Atsumu SASAKI)[††]
Department of Mathematical Sciences,
School of Science and Engineering,
Waseda University

Abstract

The notion of visible actions on complex manifolds is the geometric condition that every generic orbit of a Lie group in a connected complex manifold meets a totally real submanifold with some properties. It plays an important role in a propagation theorem of multiplicity-free property from fibers to the space of holomorphic sections for a holomorphic vector bundle, meanwhile we can treat some classical Lie group decomposition theorems using this idea. So it is important to study the structures of such a totally real submanifolds. In this paper we prove that the action on any irreducible multiplicity-free spaces is strongly visible, and we find a totally real submanifold explicitly in some cases.

1 導入

1 次元トーラス $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ の $\mathbb{C}$ への標準的な作用における各軌道は，よく知られているように複素平面上では原点を中心とする円となる．このとき，$\mathbb{R}_{\geq 0}$ は各 $\mathbb{T}$-軌道と 1 回だけ交差している (図 1.1 参照)．この幾何的性質は，$\mathbb{R}_{\geq 0} \times S^1 \to \mathbb{R}^2$ が全射であることを示し，$\mathbb{R}^2$ の極分解を与えていることに対応する．また，$G = SL(2, \mathbb{R})$ は上半平面 $\mathcal{H}_+ = \{z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C} : y > 0\}$ に 1 次分数変換として作用する (この作用は非線型であることに注意する)：

$$g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d} \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, \ z \in \mathcal{H}_+.$$

G の部分群を

$$K = SO(2), \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a > 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

とする．このとき，$\mathcal{H}_+$ における G の作用をその部分群 K, A, N に制限して得られる軌道はそれぞれ $\{\sqrt{-1}r : 0 < r \leq 1\}$, $\mathcal{H}_+^0 = \{z \in \mathcal{H}_+ : |z| = 1\}$, $\sqrt{-1}\mathbb{R}_+$ と 1 回ずつ交差してい

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 32M05; Secondary 22E46
This paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.
Received October 31, 2006. Revised February 19, 2007.

† 京都大学数理解析研究所研究集会「表現論と等質空間上の解析学」2006 年 8 月 21 日〜2006 年 8 月 24 日 (研究代表者：関口英子氏) における講究録

†† E-mail : atsumu@ruri.waseda.jp

ることが分かる (図 1.2–1.4). このことは，複素上半平面 $\mathcal{H}_+$ がエルミート対称空間 G/K と $G/K \simeq \mathcal{H}_+$，$gK \leftrightarrow g \cdot \sqrt{-1}$ であることを用いることで，K の作用から Cartan 分解 $G = KAK$ が，A の作用から $G = ABK$ が (2 つの対称対 (G, K)，(G, A) に対する G の分解，[FJ] 参照)，N の作用から岩澤分解 $G = NAK$ が得られ，軌道分解の観点から Lie 群の分解を解釈したことになる．なお，$G = ABK$ における B は

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}$$

で与えられる．

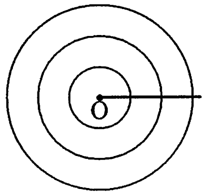

図 1.1　$\mathbb{C}$ 内の $\mathbb{T}$-軌道

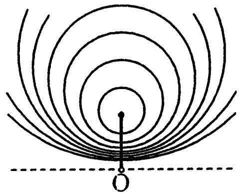

図 1.2　$\mathcal{H}_+$ 内の K-軌道

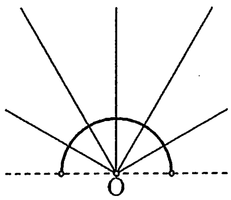

図 1.3　$\mathcal{H}_+$ 内の A-軌道

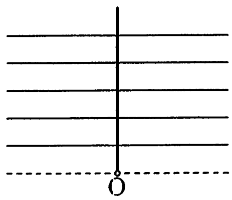

図 1.4　$\mathcal{H}_+$ 内の N-軌道

これまで知られている Lie 群の分解には，対応する軌道に何らかの対称性が存在している．上記の例は軌道が目に見える形であったためにその対称性を容易に見つけられたが，余次元が大きい場合，あるいは軌道の個数が無限個の場合に応用するためには，この概念を定式化する必要がある．そこで，次の強可視的作用を用いる．

Definition 1.1 ([Ko04], [Ko05a]). Lie 群 H が連結な複素多様体 D に正則に作用しているとする．この作用が**強可視的である (strongly visible)** とは，次の 2 条件を満たすことである．

(a) D の部分多様体 S が存在して，次の (V.1) を満たす．
  (V.1) $D' := H \cdot S$ は D の開集合である．
(b) さらに，D' 上の反正則微分同相 σ が存在して，次の (S.1) と (S.2) を満たす．
  (S.1) $\sigma|_S = \mathrm{id}_S$.
  (S.2) $\sigma(H \cdot x) = H \cdot x$ $(\forall x \in D')$.

Remark 1.2. J を D の複素構造とするとき，Definition 1.1 を満たす S は自然に totally real になる．つまり，任意の $x \in S$ に対して $T_xS \cap J_x(T_xS) = \{0\}$ を満たす．また，任意の $x \in S$ に対して $J_x(T_xS) \subset T_x(H \cdot x)$ を満たすため，強可視的作用ならば可視的作用である ([Ko05a] 参照).

Example 1.3. 先程の例はこの観点から説明できる．$\mathbb{C}$ における $\mathbb{T}$ の作用 (図 1.1) は $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, σ を複素共役をとる写像とすると，この S と σ によって強可視的であることがわかる．同様に，$\mathcal{H}_+$ における K の作用 (図 1.2) は $S = \{\sqrt{-1}r : 0 < r \le 1\}$, $\sigma(z) = -\overline{z}$ ($z \in \mathcal{H}_+$) によって，A の作用 (図 1.3) は $S = \mathcal{H}_+^0$, $\sigma(z) = 1/\overline{z}$ ($z \in \mathcal{H}_+$) によって，そして N の作用 (図 1.4) は $S = \sqrt{-1}\mathbb{R}_+$, $\sigma(z) = -\overline{z}$ ($z \in \mathcal{H}_+$) によっていずれも強可視的であることがわかる．

このようにして，強可視的作用は作用の線型性・非線型性を問わずに定義され，かつ古典的な群の分解などを統一的に説明できるという点で有用である．逆に，この強可視的作用からまだ知られていない Lie 群の分解の発見が期待される．よって，(V.1)–(S.2) を満たす S の構造を研究することは重要である．

この強可視的作用という概念は [Ko04] において初めて導入され，正則なエルミートベクトル束に対して，ファイバー上のユニタリ表現の multiplicity-free という性質がいつ正則な切断全体の空間内に実現されるユニタリ表現に伝播するかを述べた定理において重要な役割を果たす ([Ko05a], [Ko06b] など)．連結な複素多様体 D 上の正則エルミートベクトル束 $\mathcal{V} \to D$ に Lie 群 H が同変に作用するとき，自然に正則な切断全体の空間 $\mathcal{O}(D, \mathcal{V})$ に H の連続表現が定義されるが，次の条件を満たすとき，$\mathcal{O}(D, \mathcal{V})$ 内に実現されたユニタリ表現は multiplicity-free である．

Fact 1.4 ([Ko05a], [Ko06b])**.** 上の設定において次の条件を満たすとする．

(1.4.a) H の D における作用は強可視的である ((V.1)–(S.2) を満たす S と σ が存在する)．さらに，$\widehat{\sigma}(h) \cdot \sigma(x) = \sigma(h \cdot x)$ ($h \in H$, $x \in D$) を満たす H の群同型 $\widehat{\sigma}$ が存在する．

(1.4.b) $x \in S$ を任意にとる．このとき，x におけるファイバー $\mathcal{V}_x$ は x における H の固定部分群 H_x の表現として $\mathcal{V}_x \simeq \bigoplus_{i=1}^{n(x)} \mathcal{V}_x^{(i)}$ と multiplicity-free に既約分解される．

(1.4.c) σ は $\mathcal{V}$ の反正則束同型 $\widetilde{\sigma}$ まで持ち上げることができ，任意の $x \in S$ に対して $\widetilde{\sigma}_x(\mathcal{V}_x^{(i)}) = \mathcal{V}_x^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, n(x)$) が成り立つ．

このとき，$\mathcal{O}(D, \mathcal{V})$ 内に実現可能な H のユニタリ表現は multiplicity-free である．

特に $\mathcal{V}$ が自明直線束 $D \times \mathbb{C}$ の場合は $\mathcal{O}(D, \mathcal{V})$ は D 上の正則関数全体 $\mathcal{O}(D)$ と同一視され，さらに (1.4.b) と (1.4.c) は自動的に満たされるため，$\mathcal{O}(D)$ の multiplicity-free 性は強可視性から導かれることが分かる (なおこの場合は，σ を対合的であるという仮定の下で，Faraut と Thomas が [FJ] で $\mathcal{O}(D)$ の multiplicity-free 性を示している).

この主張では，表現の multiplicity-free 性は S によってコントロールされていると言ってもよい．S がよい性質を持ち，次元を小さくとることは表現論の観点からも重要になることがわかる．本講究録では既約な multiplicity-free 空間が強可視的であること，そして，S の次元が十分小さくなるようにとれることを報告したい．

2 Multiplicity-free 空間

まず，multiplicity-free 空間について簡単に述べよう．V を複素ベクトル空間とし，$G_{\mathbb{C}}$ を V 上の一般線型群 $GL_{\mathbb{C}}(V)$ の複素簡約部分群とする．このとき，V 上の多項式環 $\mathbb{C}[V]$ 上に $G_{\mathbb{C}}$ の表現が

$$(g \cdot f)(v) := f(g^{-1} \cdot v) \quad (g \in G_{\mathbb{C}},\ f \in \mathbb{C}[V],\ v \in V)$$

によって自然に定まる．この $\mathbb{C}[V]$ を $G_{\mathbb{C}}$ の表現空間として既約分解したときに各既約成分が重複なく (multiplicity-free) 現れるとき，$(G_{\mathbb{C}}, V)$ を **multiplicity-free 空間**という．

この multiplicity-free 空間についてはすでに研究されている．Kac は [Ka] において，$H_{\mathbb{C}}$ を複素半単純 Lie 群として $G_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^*$ でありかつ $G_{\mathbb{C}}$ の V における作用が既約な場合に分類を与えた．このときを既約な multiplicity-free 空間という．

Fact 2.1 ([Ka]). 既約な multiplicity-free 空間は表 2.1 のように分類される．

No.	$H_{\mathbb{C}}$		V
1	$SL(n,\mathbb{C})$		$\mathbb{C}^n$
2	$Sp(n,\mathbb{C})$		$\mathbb{C}^{2n}$
3	$SO(n,\mathbb{C})$	$(n \geq 3)$	$\mathbb{C}^n$
4	$SL(n,\mathbb{C})$		$S^2(\mathbb{C}^n)$
5	$SL(n,\mathbb{C})$		$\bigwedge^2(\mathbb{C}^n)$
6	$SL(m,\mathbb{C}) \times SL(n,\mathbb{C})$		$\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$
7	$SL(2,\mathbb{C}) \times Sp(n,\mathbb{C})$	$(n \geq 2)$	$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2n}$
8	$SL(3,\mathbb{C}) \times Sp(n,\mathbb{C})$	$(n \geq 2)$	$\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{2n}$
9	$SL(n,\mathbb{C}) \times Sp(2,\mathbb{C})$	$(n \geq 4)$	$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^4$
10	$Spin(7,\mathbb{C})$		$\mathbb{C}^8$
11	$Spin(9,\mathbb{C})$		$\mathbb{C}^{16}$
12	$Spin(10,\mathbb{C})$		$\mathbb{C}^{16}$
13	$G_2(\mathbb{C})$		$\mathbb{C}^7$
14	$E_6(\mathbb{C})$		$\mathbb{C}^{27}$

表 2.1 既約 multiplicity-free 空間 $(H_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^*, V)$

表 2.1 について説明しておこう．

(1) $Sp(n,\mathbb{C}) = \{g \in GL(2n,\mathbb{C}) : {}^t gJg = J\}$ における J は，

$$J_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J := \mathrm{diag}\,(J_1, \ldots, J_1)$$

で定義する．

(2) $\mathbb{C}^*$ は複素ベクトル空間 V にスカラー倍に作用する．

(3) $S^2(\mathbb{C}^n)$ は2次の対称テンソル空間を表し, $SL(n,\mathbb{C})$ は $S^2(\mathbb{C}^n)$ に $g\cdot(v\otimes w)=gv\otimes gw$ ($g\in SL(n,\mathbb{C})$, $v,w\in\mathbb{C}^n$) によって作用する.

(4) $\bigwedge^2(\mathbb{C}^n)$ は2次の交代テンソル空間を表し, $SL(n,\mathbb{C})$ は $\bigwedge^2(\mathbb{C}^n)$ に $g\cdot(v\wedge w)=gv\wedge gw$ ($g\in SL(n,\mathbb{C})$, $v,w\in\mathbb{C}^n$) によって作用する.

(5) $SL(m,\mathbb{C})\times SL(n,\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^m\otimes\mathbb{C}^n$ に $(g,h)\cdot(v\otimes w)=gv\otimes hw$ ($g\in SL(m,\mathbb{C})$, $h\in SL(n,\mathbb{C})$, $v\in\mathbb{C}^m$, $w\in\mathbb{C}^n$) によって作用する.

一方で，可約な場合は Benson–Ratcliff が [BR96] で，Leahy が [Le] で分類をそれぞれ独立に与えた．また，$G_\mathbb{C}$ の表現空間としての $\mathbb{C}[V]$ の既約分解は [Ho] や [HU] などに詳しい.

3 主結果

以下では $(G_\mathbb{C},V)$ を表 2.1 にある既約な multiplicity-free 空間としよう．$G_\mathbb{C}$ は複素半単純 Lie 群 $H_\mathbb{C}$ によって $G_\mathbb{C}=H_\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ と表すことにする．$G_\mathbb{C}$ は複素簡約 Lie 群であるため，そのコンパクトな実型 G_U が存在し，それは $H_\mathbb{C}$ のコンパクトな実型 H_U を用いて $G_U=H_U\times\mathbb{T}$ で表される．このとき，$G_\mathbb{C}$ のコンパクトな実型 G_U の V における作用が強可視的であるかどうかを判定したのが，今回の主結果である.

Theorem 3.1 ([Sa]). $(G_\mathbb{C},V)$ を表 2.1 にある既約 multiplicity-free 空間とする．このとき，$G_\mathbb{C}$ のコンパクトな実型 G_U の V における作用は強可視的である．特に，(V.1)–(S.2) を満たす S の実次元は表 3.1 にあるようにとれる.

Theorem 3.1 は multiplicity-free 性から強可視性が成り立つことを主張している．逆については，Fact 1.4 を $\mathcal{V}=V\times\mathbb{C}\to V$ の場合に適用することにより成り立つことが分かる.

Corollary 3.2. $GL_\mathbb{C}(V)$ の複素簡約部分群 $G_\mathbb{C}=H_\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ は V に既約に作用すると仮定する．このとき，$(G_\mathbb{C},V)$ が既約な multiplicity-free 空間であるための必要十分条件は $G_\mathbb{C}$ のコンパクトな実型 G_U の V における作用が強可視的であることである.

さらに Theorem 3.1 において，(V.1)–(S.2) を満たす S は $G_\mathbb{C}$ の表現空間としての $\mathbb{C}[V]$ の既約分解と次のような関係をもつ.

Corollary 3.3. Theorem 3.1 の設定において，S の実次元 $\dim_\mathbb{R} S$ (表 2.1 参照) は，$G_\mathbb{C}$ の表現空間として $\mathbb{C}[V]$ を既約分解したときに現れる既約成分の本質的に独立なパラメーターの個数に一致する．なお，ここでいう本質的に独立なパラメーターの個数とは，既約成分に対応する最高ウェイトたちの作る自由 Abel 半群の生成元の個数のことを示す.

Corollary 3.3 は [Ko06a] で提起された問題 ([Ko06a], Conjecture 3.2) に肯定的な例を与えている.

1つ例を挙げよう．自然数 m,n は $m<n$ として，$(G_U,V)=(U(m)\times U(n),\mathbb{C}^m\otimes\mathbb{C}^n)$ の場

No.	G_U		V	$\dim_{\mathbb{R}} S$	証明方針
1	$U(n)$		$\mathbb{C}^n$	1	1
2	$Sp(n) \times \mathbb{T}$		$\mathbb{C}^{2n}$	1	2
3	$SO(n) \times \mathbb{T}$	$(n \geq 3)$	$\mathbb{C}^n$	2	1
4	$U(n)$		$S^2(\mathbb{C}^n)$	n	1
5	$U(n)$		$\bigwedge^2(\mathbb{C}^n)$	$[n/2]$	1
6	$SU(m) \times SU(n) \times \mathbb{T}$		$\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$	$\min(m,n)$	1
7	$U(2) \times Sp(n)$	$(n \geq 2)$	$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{2n}$	3	3
8	$U(3) \times Sp(2)$		$\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^4$	5	3
	$U(3) \times Sp(n)$	$(n \geq 3)$	$\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{2n}$	6	3
9	$U(n) \times Sp(2)$	$(n \geq 4)$	$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^4$	6	3
10	$Spin(7) \times \mathbb{T}$		$\mathbb{C}^8$	2	2
11	$Spin(9) \times \mathbb{T}$		$\mathbb{C}^{16}$	3	4
12	$Spin(10) \times \mathbb{T}$		$\mathbb{C}^{16}$	2	1
13	$G_2 \times \mathbb{T}$		$\mathbb{C}^7$	2	2
14	$E_6 \times \mathbb{T}$		$\mathbb{C}^{27}$	3	1

表 3.1 コンパクトな実型 G_U と S の実次元

合を考えよう．$SU(m) \times SU(n) \times \mathbb{T}$ の $M(m,n;\mathbb{C})$ における作用は，

$$S = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} r_1 & & & \\ & \ddots & & O \\ & & r_m & \end{array} \right) : r_1 \geq \cdots \geq r_m \geq 0 \right\} \tag{3.1}$$

$$\sigma(X) = \overline{X} \ (X \in M(m,n;\mathbb{C})) \tag{3.2}$$

によって強可視的である (表 2.1 の 6)．この S の実次元は m $(= \min(m,n))$ である．また，$\mathbb{T}$ が scalar 倍に作用することから，$U(m) \times U(n) \simeq SU(m) \times SU(n) \times \mathbb{T}^2$ の作用も (3.1) と (3.2) によって強可視的である．

次に，最高ウェイト $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ をもつコンパクト群 G の既約ユニタリ表現を π_λ^G で表すとき，$\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n \simeq M(m,n;\mathbb{C})$ 上の多項式環は $U(m) \times U(n)$ の表現として

$$\mathbb{C}[M(m,n;\mathbb{C})] \simeq \bigoplus_{\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0} \pi^{U(m)}_{(-\lambda_m, \ldots, -\lambda_1)} \otimes \pi^{U(n)}_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0)} \tag{3.3}$$

と既約分解されることが知られている (GL_m-GL_n duality)．特に，各既約成分は分割 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ によって決まる．分割全体の集合は $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \mapsto (\lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1} - \lambda_m, \lambda_m)$ によって $\mathbb{N}^m$ と同一視される．これより，最高ウェイトたちの作る自由 Abel 半群の生成元の個数は m であり，確かに $\dim_{\mathbb{R}} S$ と一致している．

Remark 3.4. $(G_{\mathbb{C}}, V)$ が表 2.1 の 1 (ただし $n \geq 2$), 2, 5 (ただし n は奇数), 6 (ただし $m \neq n$), 9 (ただし $n \geq 5$), 12 の場合は，$\mathbb{C}^*$ の作用を除いても (つまり $(H_{\mathbb{C}}, V)$ は) multiplicity-free 空間

であることが知られている．一方で，上記の場合は H_U の V における作用は強可視的である．このことは，$H_U \times \mathbb{T}$ の作用による軌道と H_U の作用による軌道が一致することに起因するためであり，本質的に差異はない．よって，この講究録ではすべて $H_U \times \mathbb{T}$ の作用を考えることにする．

4 主結果の証明

4.1 証明の方針

では，Theorem 3.1 の証明に入ろう．証明は表 3.1 をいくつかに場合分けして行う．詳細に入る前にその分け方および証明方法を簡単に説明しよう．

Case 1 (1, 3, 4, 5, 6, 12, 14 の場合)．この場合は，エルミート対称空間における強可視性の結果から導かれる．

Case 2 (2, 10, 13 の場合)．この場合は軌道空間が Case 1 と同じになることを示すことによって証明される．

Case 3 (7, 8, 9 の場合)．$G_U = U(n_1) \times Sp(n_2)$，$V = \mathbb{C}^{n_1} \otimes \mathbb{C}^{2n_2}$ とおこう．(n_1, n_2) は表 2.1 の 7, 8, 9 のいずれかを満たす整数である．この証明は線型代数を用いて具体的に S を求める．

Case 4 (11 の場合)．$G_U = Spin(9) \times \mathbb{T}$，$V = \mathbb{C}^{16}$ の場合である．ここでは $Spin(9)$ をコンパクトな例外型単純 Lie 群 F_4 の部分群として実現し，V を複素例外 Jordan 代数の部分ベクトル空間 $\mathfrak{J}_{\mathbb{C}}^{23}$ として実現することで証明を行う．

4.2 Case 1 の証明

先に一般的な記号を用意しておこう．簡約 Lie 群 G に対して，G の Cartan 対合を θ として $K = G^\theta$ を極大コンパクト部分群とする．G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の θ に関する Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ で表す．また $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間とする．

いま，G を中心が有限で非コンパクトかつ単連結なエルミート型単純 Lie 群としよう．このとき，次の Fact 4.1 が成り立つ．

Fact 4.1 ([Ko05a] Theorem 18, [Ko06d] Theorem 1.5)．Section 4.2 の設定の下で次が成り立つ．

(1) K のエルミート対称空間 G/K における作用は強可視的である．

(2) K は $\mathfrak{p}$ に随伴表現として作用するが，この作用も強可視的である．特に，(V.1)–(S.2) を満たす S として $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとることができ，σ は対合的なものがとれる．

中心が有限で非コンパクトかつ単連結なエルミート型単純 Lie 群 G は表 4.1 のようになる

Case 1 の (G_U, V) は，表 4.1 のある中心が有限で非コンパクトかつ単連結なエルミート型単純 Lie 群 G に対して，$G_U = K$ かつ $V \simeq \mathfrak{p}$ を満たすことがわかる．この意味で (G_U, V) をエルミー

Type	G	K	$\mathfrak{p}$	$\mathbb{R}$-rank $\mathfrak{g}$
A III	$SU(m,n)$	$S(U(m)\times U(n))$	$M(m,n;\mathbb{C})$	$\min(m,n)$
BD I	$SO_o(n,2)$	$SO(n)\times SO(2)$	$\mathbb{C}^n$	2
C I	$Sp(n,\mathbb{R})$	$U(n)$	$S^2(\mathbb{C}^n)$	n
D III	$SO^*(2n)$	$U(n)$	$\bigwedge^2(\mathbb{C}^n)$	$[n/2]$
E III	$E_{6(-14)}$	$Spin(10)\times\mathbb{T}$	$\mathbb{C}^{16}$	2
E VI	$E_{7(-25)}$	$E_6\times\mathbb{T}$	$\mathbb{C}^{27}$	3

表 4.1 エルミート型の対称対

ト型という．よって，Fact 4.1 の $(K,\mathfrak{p})$ の強可視性から Case 1 の場合は示された．

Remark 4.2. $(G_U,V)=(U(n),\mathbb{C}^n)$ の場合は，G_U が原点を中心とする球面に推移的に作用することを利用することにより容易に証明できる．実際に，任意の $v\in V$ に対して適当な $g\in G_U$ を選べば $r\geq 0$ を用いて $gv=r\vec{e}_1$ と表されるため，各軌道は $S=\mathbb{R}\vec{e}_1$ と交差する (特に $\{r\vec{e}_1:r\geq 0\}$ とは 1 回だけ交差する)．これより，σ として複素共役写像をとることで強可視的であることが分かる．また，次の Case 2 に分類される $(G_U,V)=(Sp(n),\mathbb{C}^{2n})$ も，$(U(n),\mathbb{C}^n)$ と同様に証明される．

4.3 Case 2 の証明

ここでは，$G_U=G_2\times\mathbb{T}$, $V=\mathbb{C}^7$ の場合を考えよう．Cayley 代数を $\mathfrak{C}$ とし，$e_0,\dots,e_7$ を $\mathfrak{C}$ の標準基底とするとき，

$$\mathfrak{C}^0_{\mathbb{R}}:=\{x=x_1e_1+\cdots+x_7e_7\in\mathfrak{C}:x_1,\dots,x_7\in\mathbb{R}\}=\{x\in\mathfrak{C}:\operatorname{Re}x=0\}$$

で定義し，$\mathfrak{C}^0_{\mathbb{C}}$ をその複素化 $\mathfrak{C}^0_{\mathbb{R}}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ で定義する．この $\mathfrak{C}^0_{\mathbb{C}}$ を V とする．G_2 は

$$G_2=\{g\in\operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{C}):(gx)(gy)=g(xy)\ (\forall x,y\in\mathfrak{C})\}$$

で定義されるコンパクトかつ単連結な単純 Lie 群である．$g\in G_2$ は $ge_0=e_0$ を満たすため，$\mathfrak{C}^0_{\mathbb{C}}$ に作用する．$z\in\mathfrak{C}^0_{\mathbb{C}}$ を $z=x+\sqrt{-1}y$ $(x,y\in\mathfrak{C}^0_{\mathbb{R}})$ と表そう．このとき，$\mathbb{T}$ の作用によって x と y は $\mathfrak{C}$ 上の標準内積

$$\langle x,y\rangle_{\mathfrak{C}}=x_0y_0+\cdots+x_7y_7\quad(x,y\in\mathfrak{C})\tag{4.1}$$

によって直交すると最初から仮定してよい．

まず，G_2 の $\mathfrak{C}^0_{\mathbb{R}}$ における作用から，適当な $g_1\in G_2$ を選ぶと $r_1\geq 0$ を用いて $gx=r_1e_4$ と表される．e_4 を固定する G_2 の部分群は $SU(3)$ であるため，適当な $g_2\in SU(3)$ を選ぶと $r_2\geq 0$ を用いて $g_2(g_1y)=r_2e_1+y_4'e_4$ と表される．G_2 は $SO(7)$ の閉部分群であることから $\mathfrak{C}$ 上の内積を保

存する．よって，$y'_4 = 0$ でなければならない．つまり，$g_2 g_1 z = r_1 e_4 + \sqrt{-1} r_2 e_1$ となる．ここで，

$$S_{G_2} = \{r_1 e_4 + \sqrt{-1} r_2 e_1 : r_1, r_2 \geq 0\}$$

とおく．G_2 は $SO(7)$ の閉部分群であり，Case 1 の Type BD I から $SO(7) \times \mathbb{T}$ の $\mathbb{C}^7$ への作用に関して，(V.1)–(S.2) を満たす S は実2次元であり，S として S_{G_2} をとることができる．つまり，$\mathbb{C}^7$ 内の $G_2 \times \mathbb{T}$ の作用による軌道空間は $SO(7) \times \mathbb{T}$ の作用による軌道空間と一致する．

このように，Case 2 は Case 1 の結果に帰着でき，Fact 4.1 によって強可視的である．Case 2 の (G_U, V) を，Case 1 に帰着できるということで弱エルミート型とよぶ．

なお，複素 Cayley 代数 $\mathfrak{C}_\mathbb{C} = \mathfrak{C} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ $(\simeq \mathbb{C}^8)$ 内の $(Spin(7) \times \mathbb{T})$-軌道は

$$\{r_1 e_0 + \sqrt{-1} r_2 e_1 : r_1, r_2 \geq 0\}$$

と交差する (Section 4.5 の最後を参照)．

4.4 Case 3 の証明

これまでは，何らかの幾何的背景を利用して証明したが，これ以降は，コンパクト群 G_U の性質を利用して具体的に軌道の様子を見ていくことになる．この Case での証明方法はすべて同じなので，$G_U = U(3) \times Sp(n)$，$V = \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{2n} \simeq M(3, 2n; \mathbb{C})$ $(n \geq 2)$ の場合を挙げて証明の内容を見ていこう．

$X \in V = M(3, 2n; \mathbb{C})$ の行列成分を

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{2n} \\ y_1 & \cdots & y_{2n} \\ z_1 & \cdots & z_{2n} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

で表し，各行ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{2n})$，$\ldots$，$\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_{2n})$ で表すことにする．このとき，X の各行ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は $\mathbb{C}^{2n}$ のエルミート内積に関して直交していると仮定してよい．実際に XX^* は半正定値エルミート行列であるから，適当な $g \in U(3)$ を選ぶと $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq 0$ を用いて $g(XX^*)g^* = \operatorname{diag}(r_1, r_2, r_3)$ と対角化できる．gX の行列成分を (4.2) の右辺のように表すと，

$$gXX^*g^* = (gX)(gX)^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^* & \boldsymbol{x}\boldsymbol{z}^* \\ \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^* & \boldsymbol{y}\boldsymbol{z}^* \\ \boldsymbol{z}\boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{z}\boldsymbol{y}^* & \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^* \end{pmatrix}$$

これより，gX の各行ベクトルは直交していることがわかり，この gX を改めて X とおけばよい．

まず，$n = 2$ の場合を示そう：$G_U = U(3) \times Sp(2)$，$V = M(3, 4; \mathbb{C})$．$Sp(2)$ の右作用により適当な $h_1 \in Sp(2)$ を選べば，$r_1 \geq 0$ を用いて $\boldsymbol{x} h_1^{-1} = r_1 {}^t\vec{e}_1$ と表される．$Sp(2)$ の右作用は各行ベクトルの直交性を保存するので，

$$Xh_1^{-1} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \\ 0 & z'_2 & z'_3 & z'_4 \end{pmatrix}$$

となる．次に，$U(3)$ の部分群 $\{1\}\times\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ の左作用もまた各行ベクトルの直交性を保存し，1行目を不変にする．これより，適当な $g_1\in\{1\}\times\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ を選ぶと $r_2,r_3\geq 0$ を用いて

$$g_1(Xh_1^{-1})=\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & r_2 & y_3'' & y_4''\\ 0 & r_3 & z_3'' & z_4''\end{pmatrix}$$

と表される．さらに，適当な $h_2\in\{I_2\}\times Sp(1)\subset Sp(2)$ を選ぶと $r_4\geq 0$ を用いて

$$(g_1Xh_1^{-1})h_2^{-1}=\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & r_2 & 0 & r_4\\ 0 & r_3 & z_3''' & z_4'''\end{pmatrix}$$

と表される．ここで2行目のと3行目の行ベクトルの直交性から $r_2r_3+r_4z_4'''=0$ を得る．よって，z_4''' は実数からとることができる (これを r_5 とおき直す)．最後に $z_3'''=r_6e^{2\sqrt{-1}\theta}$ と表したとき，

$$g_2=\operatorname{diag}(e^{\sqrt{-1}\theta},e^{-\sqrt{-1}\theta},e^{-\sqrt{-1}\theta})\in U(3)$$
$$h_3^{-1}=\operatorname{diag}(e^{-\sqrt{-1}\theta},e^{\sqrt{-1}\theta},e^{-\sqrt{-1}\theta},e^{\sqrt{-1}\theta})\in Sp(2)$$

とおくと，

$$g_2(g_1Xh_1^{-1}h_2^{-1})h_3^{-1}=\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & r_2 & 0 & r_4\\ 0 & r_3 & r_6 & r_5\end{pmatrix}$$

となる．以上より，

$$S=\left\{\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & r_2 & 0 & r_4\\ 0 & r_3 & r_6 & r_5\end{pmatrix} : r_1,\dots,r_6\in\mathbb{R},\ r_2r_3+r_4r_5=0\right\}$$

とし，σ を行列の各成分の複素共役をとる写像とすることで，G_U の V への作用は強可視的であることが示された．特に $\dim_{\mathbb{R}} S=5$ である．

$n\geq 3$ のときも，$n=2$ のときと同様の議論によって，適当な $g\in U(3)$ と $h\in Sp(n)$ を選ぶと

$$gXh^{-1}=\left(\begin{array}{cccc|ccc} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & r_2 & 0 & r_4 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & r_3 & r_6 & r_5 & z_5' & \cdots & z_{2n}'\end{array}\right)$$

と表される．そして，適当な $h'\in\{I_4\}\times Sp(n-2)$ を選ぶと $r_7\geq 0$ を用いて

$$(gXh^{-1})(h')^{-1}=\left(\begin{array}{cccc|cccc} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & r_2 & 0 & r_4 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & r_3 & r_6 & r_5 & r_7 & 0 & \cdots & 0\end{array}\right)$$

と表すことができる．よって，

$$S=\left\{\left(\begin{array}{cccc|cccc} r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & r_4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_3 & r_6 & r_5 & r_7 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) : r_1,\dots,r_7\in\mathbb{R},\ r_2r_3+r_4r_5=0\right\}$$

とすればよい．特に $\dim_{\mathbb{R}} S=6$ である．

なお，$(U(2)\times Sp(n), M(2,2n;\mathbb{C}))$ の場合の S は

$$\left\{\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & r_3 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} : r_1,r_2,r_3\in\mathbb{R}\right\}$$

で与えられ，$(U(n)\times Sp(2), M(n,4;\mathbb{C}))$ の場合の S は

$$\left\{\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & r_3 \\ 0 & r_4 & r_5 & r_7 \\ 0 & r_6 & r_9 & r_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} r_1,\dots,r_9\in\mathbb{R} \\ r_2r_4+r_3r_7=0 \\ r_2r_6+r_3r_8=0 \\ r_4r_6+r_5r_9+r_7r_8=0 \end{array}\right\}$$

で与えられる．

4.5 Case 4 の証明

最後に $(G_U,V)=(Spin(9)\times\mathbb{T},\mathbb{C}^{16})$ の場合を考えよう．Cayley 代数 $\mathfrak{C}$ 上の写像 τ を $z=c_0e_0+\cdots+c_7e_7\in\mathfrak{C}$ に対して

$$\tau(z):=c_0e_0-(c_1e_1+\cdots+e_7e_7)$$

で定義し，

$$\mathfrak{J}=\left\{X=\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \tau(x_2) \\ \tau(x_3) & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \tau(x_1) & \xi_3 \end{pmatrix} : \xi_i\in\mathbb{R},\ x_i\in\mathfrak{C},\ i=1,2,3\right\}$$

とすると，$\mathfrak{J}$ は 27 次元の実ベクトル空間となる．この $\mathfrak{J}$ に Jordan 積を

$$X\circ Y=\frac{1}{2}(XY+YX)$$

で定義する．この $\mathfrak{J}$ を例外 Jordan 代数といい，$\mathfrak{J}$ の複素化 $\mathfrak{J}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{J}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ を複素例外 Jordan 代数という．$\mathfrak{J}$ の部分空間を

$$\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{23}:=\left\{\begin{pmatrix} 0 & x_3 & \tau(x_2) \\ \tau(x_3) & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in\mathfrak{J}_{\mathbb{C}} : x_2,x_3\in\mathfrak{C}\right\}$$

とし，その複素化 $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{23} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ を $\mathfrak{J}_{\mathbb{C}}^{23}$ で表す．$\mathfrak{J}_{\mathbb{C}}^{23}$ は 16 次元複素ベクトル空間である．この $\mathfrak{J}_{\mathbb{C}}^{23}$ を V とする．記号を簡略化するために，$z \in \mathfrak{C}_{\mathbb{C}}$ に対して $F_2(z)$, $F_3(z)$ を

$$F_2(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau(z) \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3(z) = \begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ \tau(z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定めておく．これを用いると，$\mathfrak{J}_{\mathbb{C}}^{23} = \{F_2(z_2) + F_3(z_3) : z_2, z_3 \in \mathfrak{C}_{\mathbb{C}}\}$ と表される．

コンパクトかつ単連結な例外型単純 Lie 群 F_4 は $\mathfrak{J}$ の自己同型群

$$F_4 = \{g \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{J}) : g(X \circ Y) = gX \circ gY \ (\forall X, Y \in \mathfrak{J})\}$$

で定義され，$Spin(9)$ は F_4 の部分群として

$$Spin(9) = \{g \in F_4 : gE_1 = E_1\}$$

と実現できる．ただし，$E_1 = \mathrm{diag}\,(1,0,0) \in \mathfrak{J}_{\mathbb{C}}$ である．このとき，$\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{23}$ は $Spin(9)$ の作用に関して不変である．よって，$\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{23}$ は $Spin(9)$ の表現空間とみなせ，ゆえに $\mathfrak{J}_{\mathbb{C}}^{23}$ は $Spin(9)$ の表現空間とみなせる．$Z \in \mathfrak{J}_{\mathbb{C}}^{23}$ を $Z = X + \sqrt{-1}Y$ $(X, Y \in \mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{23})$ と表し，さらに $X, Y \in \mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{23}$ を $X = F_2(z_2) + F_3(z_3)$, $Y = F_2(w_2) + F_3(w_3)$ $(z_2, z_3, w_2, w_3 \in \mathfrak{C})$ と表すとしよう．このとき，$\mathbb{T}$ の作用によって X と Y は $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{23}$ 上の標準内積

$$\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{23}} = \langle z_2, w_2 \rangle_{\mathfrak{C}} + \langle z_3, w_3 \rangle_{\mathfrak{C}}$$

によって直交していると仮定してよい．ただし，$\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{C}}$ は (4.1) にある $\mathfrak{C}$ 上の標準内積である．

まず，$Spin(9)$ の $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{23}$ における作用により，適当な $g_1 \in Spin(9)$ を選ぶと $r_1 \geq 0$ を用いて $g_1X = r_1F_2(e_0)$，つまり，

$$g_1Z = g_1X + \sqrt{-1}g_1Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_1e_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_1e_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & y_3 & \tau(y_2) \\ \tau(y_3) & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表される ($g_1Y = F_2(y_2) + F_3(y_3)$ と表した)．

次に，$Spin(7) \subset Spin(9)$ について説明しよう．$Spin(8)$ は $\mathfrak{J}$ 上の自己同型の部分群としての実現と $\mathfrak{C}$ 上の実線型写像の組からなる群としての実現があり，それらは Lie 群として同型である．

$$\begin{aligned} Spin(8) &= \{g \in F_4(\mathbb{R}) : gE_i = E_i \ (i = 1,2,3)\} \\ &\simeq \{(g_1, g_2, g_3) \in SO(8)^3 : (g_2x)(g_3y) = \kappa g_1(xy) \ (\forall x, y \in \mathfrak{C})\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

ただし，$E_2 = \mathrm{diag}\,(0,1,0)$，$E_3 = \mathrm{diag}\,(0,0,1)$ とし，$\kappa g := \tau g \tau$ とする．なお，$(g_1, g_2, g_3) \in SO(8)^3$ が任意の $x, y \in \mathfrak{C}$ に対して $(g_2x)(g_3y) = \kappa g_1(xy)$ を満たせば $(g_1x)(g_2y) = \kappa g_3(xy)$ を満たすことが知られている (cf. [Yo])．特に $Spin(8)$ は $Spin(9)$ の部分群である．一方で

$$Spin(7) \simeq \{\tilde{g} \in SO(8) : \exists g \in SO(7) \text{ s.t. } (gx)(\tilde{g}y) = \tilde{g}(xy) \ (\forall x, y \in \mathfrak{C})\}$$

であるため,

$$Spin(7) \hookrightarrow Spin(8), \quad \widetilde{g} \mapsto (\kappa\widetilde{g}, g, \widetilde{g}) \quad (g \in SO(7))$$

によって, $Spin(7)$ は $Spin(8)$ の部分群とみなせる．よって，(4.3) の同型によって $Spin(7)$ は $Spin(9)$ の部分群とみなせる．$Spin(8)$ は $\mathfrak{J}$ に

$$(g_1, g_2, g_3) \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 & y_3 & \tau(y_2) \\ \tau(y_3) & \xi_2 & y_1 \\ y_2 & \tau(y_1) & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & g_3y_3 & \tau(g_2y_2) \\ \tau(g_3y_3) & \xi_2 & g_1y_1 \\ g_2y_2 & \tau(g_1y_1) & \xi_3 \end{pmatrix}$$

で作用し, $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{23}$ はこの作用に関して不変であるため, $Spin(8)$ を $Spin(7)$ に制限することで $Spin(7)$ の $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{23}$ における作用が定義される：

$$\widetilde{g} \cdot \begin{pmatrix} 0 & y_3 & \tau(y_2) \\ \tau(y_3) & 0 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{g}y_3 & \tau(gy_2) \\ \tau(\widetilde{g}y_3) & 0 & 0 \\ gy_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$F_2(e_0)$ を固定する $Spin(9)$ の部分群は $Spin(7)$ である．F_3-成分への $Spin(7)$ の作用から，適当な $\widetilde{g}_2 \in Spin(7)$ を選ぶと $r_2 \geq 0$ を用いて $\widetilde{g}_2y_3 = r_2e_0$ と表される．さらに，e_0 を固定する $Spin(7)$ の部分群は $G_2 \simeq \{(g, g, g) \in Spin(8) : \kappa g = g\}$, $g \mapsto (g, g, g)$ であるから，適当な $g_3 \in G_2$ を選ぶと $r_3 \geq 0$ を用いて $g_3(\widetilde{g}_2y_2) = y_2'e_0 + r_3e_4$ と表される (y_2' は $\widetilde{g}_2y_2$ の e_0-成分である)．よって,

$$g_3\widetilde{g}_2g_1Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_1e_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_1e_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & r_2e_0 & y_2'e_0 - r_3e_4 \\ r_2e_0 & 0 & 0 \\ y_2'e_0 + r_3e_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで, $Spin(9)$ の作用は $\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{23}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{J}_{\mathbb{R}}^{23}}$ を保存するので, $y_2' = 0$ でなければならない．以上より,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_1e_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_1e_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & r_2e_0 & -r_3e_4 \\ r_2e_0 & 0 & 0 \\ r_3e_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{J}_{\mathbb{C}}^{23} : r_1, r_2, r_3 \geq 0 \right\} \tag{4.4}$$

は $\mathfrak{J}_{\mathbb{C}}^{23}$ 内の $(Spin(9) \times \mathbb{T})$-軌道と交差する．つまり (V.1) を満たす．

$\mathfrak{J}_{\mathbb{C}}^{23}$ 上の反正則微分同相を構成しよう．$c \in \mathbb{C}$ の複素共役を $\overline{c}$ で表し, $z = c_0e_0 + \cdots + c_7e_7 \in \mathfrak{C}_{\mathbb{C}}$ に対して,

$$\rho(z) = (\overline{c_0}e_0 + \cdots + \overline{c_3}e_3) - (\overline{c_4}e_4 + \cdots + \overline{c_7}e_7)$$

とする．この ρ を用いて

$$\sigma\begin{pmatrix} 0 & z_3 & \tau(z_2) \\ \tau(z_3) & 0 & 0 \\ z_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\rho(z_3) & \tau(\rho(z_2)) \\ \tau(-\rho(z_3)) & 0 & 0 \\ \rho(z_2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

で定義する．このとき，(S.1) を満たすことは明らかである．(S.2) を満たすことは明らかではないが (V.1) によって次の 2 つを示せば十分であることが分かる．

Claim 4.3. $X = F_2(e_0 + \sqrt{-1}e_4) + F_3(\sqrt{-1}e_0) \in S$ とする.

(1) 任意の $\alpha \in \mathbb{T}$ に対して $\sigma(\alpha X) \in \mathbb{T}X$ である.

(2) 任意の $g \in Spin(9)$ に対して $\sigma(g \cdot X) \in Spin(9) \cdot X$ である.

まず，$\mathbb{T}$ はスカラー倍として作用するから，$\sigma(\alpha X) = \overline{\alpha}X \in \mathbb{T}X$ ある.

次に，$g \in Spin(9)$ に対して，$\sigma(g \cdot X)$ は群の作用のみを用いて表される．具体的には

$$I_{4,4} = \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix}, \quad I_0 = (-I_{4,4}, I_{4,4}, -I_{4,4}) \in SO(8)^3$$

を用いて

$$\sigma(g \cdot X) = (I_0 g I_0) \cdot X$$

と表される．特に,

$$I_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & z_3 & \tau(z_2) \\ \tau(z_3) & 0 & 0 \\ z_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I_{4,4}z_3 & \tau(I_{4,4}z_2) \\ \tau(-I_{4,4}z_3) & 0 & 0 \\ I_{4,4}z_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と作用する.

Lemma 4.4. I_0 は (4.3) を満たす．つまり，$I_0 \in Spin(8)$ である.

Proof. $x, y \in \mathfrak{C}$ を任意の選ぼう．$I_{4,4}$ は $(I_{4,4}x)(I_{4,4}y) = I_{4,4}(xy)$ を満たす (つまり，$I_{4,4} \in G_2$ である)．また，$\kappa(-I_{4,4}) = -I_{4,4}$ であるため，$(-I_{4,4}x)(I_{4,4}y) = \kappa(-I_{4,4})(xy)$ を満たす．よって，$(-I_{4,4}, I_{4,4}, -I_{4,4}) \in Spin(8)$ となる. □

Lemma 4.4 と $Spin(8) \subset Spin(9)$ より，$I_0 g I_0 \in Spin(9)$ であることが分かる.

以上より，(4.4) と (4.5) によって $Spin(9) \times \mathbb{T}$ の $\mathfrak{J}_{\mathbb{C}}^{23}$ $(\simeq \mathbb{C}^{16})$ における作用が強可視的であることが示された.

この節の最後に，$Spin(9, \mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^{16}$ における作用について整理しよう.

(1) $Spin(9, \mathbb{C})$ は $Spin(9)$ の複素化，$\mathbb{C}^{16} = \mathbb{R}^{16} + \sqrt{-1}\mathbb{R}^{16}$ である.

(2) $Spin(9)$ は $\mathbb{R}^{16}$ に既約に作用する．また，$S^{15} \subset \mathbb{R}^{16}$ には推移的に作用し，$v_1 \in S^{15}$ に対して $\mathbb{R}^{16} = Spin(9) \cdot \mathbb{R}v_1$ となる.

(3) v_1 を固定する $Spin(9)$ の部分群は $Spin(7)$ であり，$Spin(7)$ の $\mathbb{R}^{16}$ における作用は可約である．実際に $\mathbb{R}^{16} = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^7) \oplus \mathbb{R}^8$ と split し，$\mathbb{R}$ には自明に，$\mathbb{R}^7$ には $Spin(7)$ の自然表現として，$\mathbb{R}^8$ には $Spin(7)$ が既約に作用する．また，$S^7 \subset \mathbb{R}^8$ に推移的に作用し，$v_2 \in S^7$ に対して $\mathbb{R}^8 = Spin(7) \cdot \mathbb{R}v_2$ となる.

(4) v_2 を固定する $Spin(7)$ の部分群は G_2 であり，G_2 の $\mathbb{R}^{16}$ における作用は可約である．実際に $\mathbb{R}^{16} = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^7) \oplus (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^7)$ と split し，$\mathbb{R}$ には自明に，$\mathbb{R}^7$ には既約に作用するまた，$S^6 \subset \mathbb{R}^7$ に推移的に作用し，$v_3 \in S^6$ に対して $\mathbb{R}^7 = G_2 \cdot \mathbb{R}v_3$ となる.

これより,

$$Spin(9)\cdot(\mathbb{R}v_1+\sqrt{-1}(\mathbb{R}v_1\oplus\mathbb{R}v_2\oplus\mathbb{R}v_3))=\mathbb{C}^{16}$$

と表される．また，(4.4) で与えた S は

$$S=\mathbb{R}v_1+\sqrt{-1}\,(\mathbb{R}v_2\oplus\mathbb{R}v_3)\simeq\mathbb{R}^3$$

と表される．ゆえに，$\mathbb{T}$ の作用を考慮すると，

$$(Spin(9)\times\mathbb{T})\cdot S=\mathbb{C}^{16}$$

を得る．

5 応用：$SU(2n,1)$ の分解

最後に，Theorem 3.1 およびその証明から Lie 群の新しい分解が得られる．それを $SU(2n,1)$ を例によって説明しよう．

$G=SU(2n,1)$, $K=U(2n)$, $H=Sp(n)$ とする．このとき，(G,K) はエルミート対称対，H は K の部分群であるが，(G,H) の複素化 $(SL(2n+1,\mathbb{C})$, $Sp(n,\mathbb{C}))$ は対称対でない spherical pair である．$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\,(G)$, $\mathfrak{k}=\mathrm{Lie}\,(K)$ とし，$\mathfrak{g}$ の Cartan 分解を $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ で表す．このとき，$\mathfrak{p}\simeq\mathbb{C}^{2n}$ である．H は $\mathfrak{p}$ に随伴表現として作用するが，これは H の $\mathbb{C}^{2n}$ における標準的な作用と対応する．Theorem 3.1 によって，H の $\mathbb{C}^{2n}$ における作用は $S=\mathbb{R}\vec{e}_1$ と複素共役を与える写像 σ によって強可視的である．ゆえに，H の $\mathfrak{p}$ における作用は強可視的であり，$\mathfrak{a}:=\mathbb{R}(E_{1,2n+1}+E_{2n+1,1})$ が各軌道と交差する．この $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間であることに注意する．

$$D=\{z\in\mathbb{C}^{2n}:{}^t z\overline{z}<1\}$$

とおくと，D は $\mathfrak{p}\simeq\mathbb{C}^{2n}$ の有界対称領域であり，$G=SU(2n,1)$ は D に 1 次分数変換で作用する．

$$g\cdot z=(Az+B)(Cz+d)^{-1},\quad g=\left(\begin{array}{c|c}A&B\\\hline C&d\end{array}\right)\in G,\ z\in\mathbb{C}^{2n}$$

特に G の部分群 $H=Sp(n)$ は D に線型に作用する．ゆえに，$\mathbb{C}^{2n}$ の開集合 D における H-軌道もやはり S と交差する．以上より，G/K と D は $G/K\to D$, $gK\mapsto g\cdot 0$ によって正則微分同相であることから，H の G/H における作用は強可視的である．特に，

$$A=\exp\mathfrak{a}=\left\{\left(\begin{array}{cc|c}\cosh t&0&\sinh t\\0&I_{2n-1}&0\\\hline\sinh t&0&\cosh t\end{array}\right):t\geq 0\right\}$$

とおくと，G/K における各 H-軌道は $A\cdot o$ $(o=eK\in G/K)$ と交差し，したがって次の分解を得る．

Theorem 5.1. 上の設定の下で，$G=HAK$ を得る．

これは，Cartan 分解 $G=KAK$ をより精密にしたと解釈できる．

参考文献

[BR96] C. Benson and G. Ratcliff, A classification of multiplicity free actions, *J. Algebra,* **181** (1996), no.1, 152–186

[BR04] C. Benson and G. Ratcliff, On multiplicity-free actions, *Representations of real and p-adic groups*, Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, (2004) 221–304

[FJ] M. Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces, *Ann. of Math.,* **111** (1980), 253–311

[FT] J. Faraut and E. G. F. Thomas, Invariant Hilbert spaces of holomorphic functions, *J. Lie Theory,* **9** (1990), 383–402

[He] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, New York, (1978)

[Ho] R. Howe, Remarks on classical invariant theory, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **313** (1989), 539–570

[HU] R. Howe and T. Umeda, The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions, *Math. Ann.,* **290** (1991), no.3, 565–619

[Ka] V. Kac, Some remarks on nilpotent orbits, *J. Algebra,* **64** (1980), 190–213

[Kn] F. Knop, Some remarks on multiplicity-free spaces, *Representation Theories and Algebraic Geometry*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **514** (1998), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 301–317

[Ko04] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, *Acta. Appl. Math.,* **81** (2004), 129–146

[Ko05a] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.,* **41** (2005), no.3, 497–549

[Ko06a] T. Kobayashi, Introduction to visible actions on complex manifolds and multiplicity-free representations, 数理解析研究所講究録 **1502** 「カルタン幾何の進化発展とそれに関連する数学の諸問題」(ed. 森本徹氏) (2006), 82–95,

[Ko06b] T. Kobayashi, Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles, *preprint*

[Ko06c] T. Kobayashi, A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3))\backslash U(n)/(U(p) \times U(q))$, *to appear in J. Math. Soc. Japan*, math.RT/0607006

[Ko06d] T. Kobayashi, Visible actions on symmetric spaces, *to appear in Transformation Groups*, math.DG/0607005

[KS] 小林俊行述, 笹木集夢記, Multiplicity-free 定理と複素多様体における可視的な作用, *in* *preparation*

[Le] A. Leahy, A classification of multiplicity free representations, *J. Lie Theory* **8** (1998), no.2, 367–391

[Sa] A. Sasaki, Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces, *in preparation*

[Yo] 横田一郎, 例外型単純リー群, 現代数学社 (1992)