RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B7**
(2008), 101–120

階数3のmultiplicity-free作用に関する不変式と不変微分作用素[1]

(Invariant polynomials and invariant differential operators for multiplicity-free actions of rank three)

京都大学大学院理学研究科　菊地克彦 (Katsuhiko Kikuchi)
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

Abstract

Let V be a finite-dimensional vector space over $\mathbb{C}$, K a connected compact Lie group acting on V as a linear isomorphism. We call the action (K, V) multiplicity-free if each irreducible K-module appears at most one in the polynomial ring $\mathcal{P}(V)$ on V. In this announcement we describe K-invariant polynomials and K-invariant differential operators for the multiplicity-free action (K, V) of rank three such that (K, V) is not derived from a Hermitian symmetric pair. Moreover, we give two 'symmetric' slices for visibility of each action (K, V) in this announcement. We show that the symmetric slice indicates a symmetry of invariant polynomials or of invariant differential operators for the action.

MSC Classification: Primary 22E46, Secondary 05E05, 16S32, 20G05.

1 準備

Vを有限次元複素vector空間, Kを連結compact Lie群で, Vに線型かつ局所効果的, 即ちVのすべての元を不変にするKの元は有限個であるように作用するとする. KはV上の(正則)多項式環$\mathcal{P}(V)$に自然に作用する.

定義 1 作用(K, V)が**multiplicity-free**であるとは, $\mathcal{P}(V)$のK-加群としての既約分解$\mathcal{P}(V) = \sum_\lambda V_\lambda$において各$K$-既約加群が高々重複度1で現れることである.

今回は, multiplicity-free作用のうち本質的にHermite対称対から得られないもので階数が3なるものについてK-不変式とK-不変微分作用素を具体的に記述する.

$\overline{\mathcal{P}(V)}$で$V$上の反正則多項式環を表す. これは次のように考えることができる. $\overline{V}$でVの複素共役なvector空間, 即ち実vector空間としてはVと同じもので, 複素数体の作用がVのときと複素共役になるものとする. すると, $\overline{\mathcal{P}(V)}$は$\overline{V}$上の正則多項式環とみなされる. $n = \dim V$とし, V上のK-不変なHermite内積$(\cdot,\cdot)_V$を1つ固定し, この内積に関する正規直交基底$\{e_1, \ldots, e_n\}$をとり, この基底についての座標函数を$z_1, \ldots z_n$とする. すると, $\mathcal{P}(V)$の元は$z_1, \ldots, z_n$の多項

[1]This paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.
Received November 1, 2006. Revised January 12, 2007.

式で表され, $\overline{\mathcal{P}(V)}$ の元は座標函数の複素共役 $\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_n$ の多項式で表される. $V_{\mathbb{R}}$ で V を実 vector 空間とみなしたものを表すとすると, $V_{\mathbb{R}}$ 上の複素係数多項式は $z_1,\dots,z_n$, $\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_n$ の多項式で表される. よって, $V_{\mathbb{R}}$ 上の複素係数多項式全体のなす環 $\mathcal{P}(V_{\mathbb{R}})$ は $\mathcal{P}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}(V)}$ と同じものとみなされる. $z=z_1e_1+\cdots+z_re_n\in V$ に対応する $\overline{V}$ の元を $\overline{z}$ で表すとする. すると, K は $k\cdot\overline{z}=\overline{k\cdot z}$ $(k\in K,\ \underline{z\in V})$ により V への作用と反傾に $\overline{V}$ に作用する. $f\in\mathcal{P}(V)$ に対して, $\overline{f}(\overline{z})=\overline{f(z)}$ で $\overline{\mathcal{P}(V)}$ の元が自然に決まる.

$\mathcal{P}(V)$ には以下で与えられる Fischer 内積を入れる.

$$(f_1,f_2)_{\mathcal{F}}=\frac{1}{\pi^n}\int_V f_1(z)\overline{f_2(z)}e^{-\|z\|_V^2}\,d\mu(z), \tag{1,1}$$

ただし, $f_1,f_2\in\mathcal{P}(V)$, $\|\cdot\|_V$ は V 上の K-不変な Hermite 内積から得られる norm で, μ は V を $\mathbb{R}^{2n}$ とみなしたときの Lebesgue 測度とする. これは次のようにも表される. $f_1(z)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}a_\alpha z^\alpha$, $f_2(z)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}b_\alpha z^\alpha$ としたとき, $(f_1,f_2)_{\mathcal{F}}=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\alpha!a_\alpha\overline{b}_\alpha$, ただし, $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$, $\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$.

V 上の多項式係数微分作用素全体のなす環を $\mathcal{PD}(V)$ で表すことにする. このとき, K は $\mathcal{P}(V)$, $\mathcal{P}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}(V)}$, $\mathcal{PD}(V)$ に以下のように作用する.

$$\begin{aligned}
k\cdot f(z)&=f(k^{-1}\cdot z),\\
(k\cdot f_1\otimes\overline{f}_2)(z,\overline{z})&=f_1\otimes\overline{f}_2(k^{-1}\cdot z,k^{-1}\cdot\overline{z})=f_1(k^{-1}\cdot z)\overline{f_2(k^{-1}\cdot z)},\\
(k\cdot D)f(z)&=k\cdot(D(k^{-1}\cdot f))(z)=D(k^{-1}\cdot f)(k^{-1}\cdot z).
\end{aligned}$$

K の $\mathcal{P}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}(V)}$ への作用は $\mathcal{P}(V_{\mathbb{R}})$ への自然な作用と一致していることに注意しておく. $V_{\mathbb{R}}$ 上の K-不変多項式全体のなす部分環を $\mathcal{P}(V_{\mathbb{R}})^K=(\mathcal{P}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}(V)})^K$, V 上の K-不変な多項式係数微分作用素のなす部分環を $\mathcal{PD}(V)^K$ と表すことにする. これらには, $\mathcal{P}(V)$ の既約成分 V_λ から以下のようにして定まる元がそれぞれ存在する. $d_\lambda=\dim V_\lambda$ とし, V_λ の Fischer 内積に関する正規直交基底 $\{f_1,\dots,f_{d_\lambda}\}$ を 1 つとり, $p_\lambda(z,\overline{z})$, $p_\lambda(z,\partial)$ を次のように定める.

$$p_\lambda(z,\overline{z})=\sum_{j=1}^{d_\lambda}f_j(z)\overline{f_j(z)}, \tag{1,2}$$

$$p_\lambda(z,\partial)=\sum_{j=1}^{d_\lambda}f_j(z)\overline{f}_j(\partial). \tag{1,3}$$

ただし, z_k に関する偏微分作用素を ∂_k とし, $f(z)=\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$ としたとき, $\overline{f}(\partial)=\sum_\alpha\overline{a}_\alpha\partial_{z_\alpha}$ とする. これらの $p_\lambda(z,\overline{z})$, $p_\lambda(z,\partial)$ を具体的に記述するのが今回の目標である.

以下 (K,V) **は multiplicity-free であると仮定する**. その具体的な記述を highest weight theory を用いて与えることにする. $\mathfrak{k}=\mathrm{Lie}(K)$ を K の Lie 代数, $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ をその複素化, $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分代数, $\mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{h}$ の双対空間とする. $\mathcal{P}(V)$ の既約成分はその highest weight $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ で決まる. λ に対応する既約成分を V_λ とし, highest weight vector を $f_\lambda\in V_\lambda$ と表すことにする. V_λ はある非負整数 l につ

いて l 次斉次多項式全体のなす $\mathcal{P}(V)$ の部分 vector 空間 P_l に含まれている. この l を λ の次数と呼び $\deg\lambda$ で表す. $\Lambda := \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ V_\lambda \neq 0\}$ とすると, Λ は Abel 半群になる. Λ の元 λ で highest weight vector f_λ が既約多項式となるものすべてを集めたものを $\Lambda_0 := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ とする. すると, Λ_0 は自由 Abel 半群として Λ を生成する.

定義 2 Λ_0 の元の個数 r を (K,V) の **rank** と呼ぶ.

Λ_0 の元 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を基本 highest weight, 対応する highest weight vector $f_{\lambda_1}, \ldots f_{\lambda_r}$ を基本 highest weight vector と呼ぶ. このとき, 次の結果が得られている.

命題 3 ([HU]) $\{p_{\lambda_j}(z,\overline{z})\}_{j=1}^r$ および $\{p_{\lambda_j}(z,\partial)\}_{j=1}^r$ はそれぞれ代数的に独立であり, かつ $(\mathcal{P}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}(V)})^K$, および $\mathcal{PD}(V)^K$ を可換環として生成する.

$D \in \mathcal{PD}(V)^K$ を V 上の任意の K-不変微分作用素とすると, D は $\mathcal{P}(V)$ のすべての既約成分 V_λ を保存し, 各 V_λ 上 scalar 倍として作用する. 特に, D として $p_\lambda(z,\partial)$ をとるとき, p_λ は各 V_μ $(\mu\in\Lambda)$ に scalar 倍で作用する, 即ち,

$$p_\lambda(z,\partial)|_{V_\mu} = \binom{\mu}{\lambda}\mathrm{Id}_{V_\mu}, \quad \exists\binom{\mu}{\lambda}\in\mathbb{C}. \tag{1,4}$$

この複素数 $\binom{\mu}{\lambda}$ を 2 項係数と呼ぶ. 2 項係数は以下のようにして特徴づけられる. $\rho\in\mathfrak{h}^*$ を $(\mathfrak{k}_\mathbb{C},\mathfrak{h})$ の正 root の和の $\frac{1}{2}$ 倍とし, 任意の $\lambda\in\Lambda$ について次の函数 $\tau_\lambda : \Lambda+\rho \longrightarrow \mathbb{C}$ を考える.

$$\tau_\lambda(\mu+\rho) = \binom{\mu}{\lambda}, \quad \mu\in\Lambda.$$

$\mathfrak{a}^* = \mathbb{C}\Lambda \subset \mathfrak{h}^*$ を Λ で生成される $\mathfrak{h}^*$ の部分 vector 空間とすると, τ_λ は $\mathfrak{a}^*+\rho$ 上の多項式函数とみなされる. この多項式 τ_λ は以下のようにして特徴づけられるものである.

命題 4 ([Kn1]) 有限群 W が存在して, その W が $\mathfrak{a}^*$ を保存し, かつ任意の $\lambda\in\Lambda$ について τ_λ が以下のように特徴づけられる.
(1) τ_λ は W-不変である,
(2) $\deg\tau_\lambda = \deg\lambda$,
(3) $\deg\mu \leq \deg\lambda$, $\mu\neq\lambda$ なる $\mu\in\Lambda$ に対して $\tau_\lambda(\mu+\rho)=0$,
(4) $\tau_\lambda(\lambda+\rho)=1$.

ここまでの事項についての詳細は [BR2] を参照してもらいたい.

命題 4 の W の幾何学的意味付けを行うために, 作用の可視性を定義する.

定義 5 ([Ko1]) V を有限次元複素多様体, K を V に正則に作用する連結 Lie 群とする. 作用 (K,V) が**可視的**であるとは, K-不変な開集合 D および V の全実部分多様体 M が存在して, 次の性質を満たすことである.
(1) $K\cdot M = D$,
(2) 任意の $x\in M$ について, $J_x(T_xM)\subset T_x(K\cdot x)$,
ただし, J_x は $x\in V$ における接空間上の複素構造である.

定義 6 ([Ko2]) V を有限次元複素多様体, K を V に正則に作用する連結 Lie 群とする. 作用 (K,V) が**強可視的**であるとは, V の開集合 D, V の全実部分多様体 M, および V 上の反正則同相 σ が存在して, 以下の性質が成り立つことである.
(1) $K \cdot M = D$,
(2) σ は M を保存し, $\sigma|_M = \mathrm{Id}_M$,
(3) 任意の $v \in M$ について $\sigma(K \cdot v) = K \cdot v$.
この M を作用 (K,V) の **slice** と呼ぶ.

作用 (K,V) が強可視的ならば可視的であり, 可視的ならば適当の条件の下で multiplicity-free である. 特に, 作用 (K,V) が強可視的ならば multiplicity-free である ([Ko2] を参照せよ). 本講究録の笹木集夢氏の報告 [Sas] において, 既約な multiplicity-free 作用が強可視的であることが示されている. なお, 本稿の第 3 節以降で述べられる作用はすべて強可視的である.

最後に, 不変式や 2 項係数, 不変微分作用素を記述するために, 下降冪を表す記号を与えておく.

$$a^{\underline{l}} = \begin{cases} a(a-1)\cdots(a-l+1), & l \geq 1, \\ 1, & l = 0. \end{cases}$$

2 Hermite 型の場合

multiplicity-free 作用のうち, もっとも典型的なものである Hermite 型作用について まとめておく. なお, 詳細は [H][FK1][FK2][J][Ko3] [Sat][Sch][Se][U] 等を参照してもらいたい. (G,K) を既約な Hermite 対称対, 即ち G を中心が有限な非 compact 単純 Lie 群, K を G の極大 compact 部分群で, 等質空間 G/K が Hermite 対称空間になるものとする. $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ をそれぞれ G, K の Lie 代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 分解, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{p}_-$ を $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{k}$ の中心の随伴作用に関する分解とする. すると, $\mathfrak{p}_+$ は複素 vector 空間であり, K の $\mathfrak{p}_+$ への作用 $(K,\mathfrak{p}_+)$ は multiplicity-free になる. $\mathfrak{p}$ から $\mathfrak{p}_+$ への自然な実線型写像により, $\mathfrak{p}$ を複素 vector 空間とみなす. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間とする. すると, $(K,\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{a}$ を slice とする強可視的な作用になる ([Ko1][Ko2][Sas] を参照せよ). さらに, G の実 rank である $\dim \mathfrak{a}$ は $(K,\mathfrak{p})$ の multiplicity-free 作用としての rank と一致し, $r = \mathrm{rank}(K,\mathfrak{p})$ とすると, 基本 highest weight $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ はそれぞれ対応する基本 highest weight vector $f_{\lambda_1},\ldots,f_{\lambda_r}$ が $\deg f_{\lambda_j} = j\ (1 \leq j \leq r)$ となるようにとれる. $\mathcal{P}(\mathfrak{p})$ に現れる K-既約成分に対応する highest weight たち全体のなす半群は $\Lambda_0 = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\}$ を生成系とする自由 Abel 半群であり, Λ を含む $\mathfrak{h}^*$ の最小の複素部分 vector 空間を $\mathbb{C}\Lambda$ とすると, $\mathbb{C}\Lambda$ は $\mathfrak{a}$ の複素化 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ の双対空間 $\mathfrak{a}^*$ と一致し, Λ_0 を基底にもつ. いま, compact 群 $N_K(\mathfrak{a})$, $Z_K(\mathfrak{a})$, $W_K(\mathfrak{a})$ を次のように定義する.

$$N_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K\,;\, k \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}\},$$
$$Z_K(\mathfrak{a}) = \{k \in K\,;\, k \cdot v = v \text{ for all } v \in \mathfrak{a}\},$$
$$W_K(\mathfrak{a}) = N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a}).$$

命題 7 (1) $W_K(\mathfrak{a})$ は有限群であり, $(\mathcal{P}(\mathfrak{p}) \otimes \overline{\mathcal{P}(\mathfrak{p})})^K \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{a}]^{W_K(\mathfrak{a})}$,
(2) $W = \mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}}(W_K(\mathfrak{a}))|_{\mathfrak{a}^*}$ とすると, W は命題4の W と一致する.

$\lambda \in \Lambda$ に対して, $p_\lambda(z, \overline{z})$, $p_\lambda(z, \partial)$ は具体的に計算することができる. そのために, Λ の元 λ を分割を用いて表す. 任意の $\lambda \in \Lambda$ は非負整数の減少列 $\lambda = (l_1, \ldots, l_r)$ $(l_1 \geq \cdots \geq l_r \geq 0)$ と表される. 特に, $1 \leq j \leq r$ なる j について $\lambda_j = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, ただし, 右辺の1は j 個であるとする.

命題 8 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, K-不変式および2項係数は次のように表される.

$$p_\lambda(z, \overline{z}) = c_{\alpha,\lambda} J^{(\alpha)}_\lambda(z^2), \quad z \in \mathfrak{a},$$
$$\binom{\mu}{\lambda} = c_{\alpha,\lambda} J^{*(\alpha)}_\lambda(\mu), \quad \mu \in \Lambda,$$

ただし, $J^{(\alpha)}_\lambda$ は Jack 多項式, $J^{*(\alpha)}_\lambda$ は shifted Jack 多項式 ([OO] を参照せよ) を表し, α は以下で与えられる実数で, $c_{\alpha,\lambda}$ は α, λ で決まる正実数である.

$$\alpha = \begin{cases} 2, & (G,K) = (\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R}), \mathrm{U}(n)), \\ 1, & (G,K) = (\mathrm{SU}(n,m), \mathrm{S}(\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(m))), \\ \frac{1}{2}, & (G,K) = (\mathrm{SO}^*(2n), \mathrm{U}(n)), \\ \frac{2}{n-2}, & (G,K) = (\mathrm{SO}_0(2,n), \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(n)), \\ \frac{1}{3}, & (G,K) = (\mathrm{E}_{6(-14)}, \mathbb{T} \cdot \mathrm{Spin}(10)), \\ \frac{1}{4}, & (G,K) = (\mathrm{E}_{7(-25)}, \mathbb{T} \cdot \mathrm{E}_6). \end{cases}$$

上の結果により, (K, V) が Hermite 型のときは K-不変式および2項係数がわかり, K-不変微分作用素も求まる. よって, 問題となるのは multiplicity-free 作用 (K, V) が Hermite 型と本質的に異なるものについて K-不変式や K-不変微分作用素を求めることである. そこで, 本質的に異なるということを明確に定義する.

定義 9 (K_1, V_1) が (K_2, V_2) と**弱同値**であるとは, 複素線型同型 $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ が存在して, 任意の $v \in V_1$ について $\phi(K_1 \cdot v) = K_2 \cdot \phi(v)$ が成り立つことである.

(K_1, V_1), (K_2, V_2) を弱同値な multiplicity-free 作用とすると, 自然な同型により, $\mathcal{P}(V_1)$ の既約分解は $\mathcal{P}(V_2)$ の既約分解と一致する. よって, それぞれの不変式環と不変微分作用素環は自然に同一視される.

もし, 局所効果的な multiplicity-free 作用 (K, V) において K の中心の次元が V の既約成分の個数より小さければ, 適当な torus T を付け加えることにより $T \times K$ の中心の次元と V の既約成分の個数が一致かつ $(T \times K, V)$ が局所効果的となるようにすることができる. このとき, $(T \times K, V)$ は (K, V) と弱同値である.

定義 10 K を連結かつ単連結な compact 半単純 Lie 群とし, V を K が線型かつ局所効果的に作用する複素 vector 空間とする. 作用 (K, V) が **indecomposable** であるとは, $K = K_1 \times K_2$, $V = V_1 \oplus V_2$ かつ $i \neq j$ のとき K_i が V_j に自明に作用するような自明でない (K_1, V_1), (K_2, V_2) が存在しないことである. 一般の連結 compact Lie 群については, K の半単純成分 K_s の普遍被覆群 $\widetilde{K}_s$ について $(\widetilde{K}_s, V)$ が indecomposable であるとき, 作用 (K, V) が **indecomposable** であるとする.

multiplicity-free 作用 (K,V) は, K に適当な torus T を付け加え, 必要ならば有限被覆群を考えることにより, indecomposable な multiplicity-free 作用の直積になる. このとき, 不変式環および不変微分作用素環はそれぞれ indecomposable 成分のそれらの tensor 積になる. indecomposable な multiplicity-free 作用は, 既約のときは Kac [Ka] により, 可約のときは Benson-Ratcliff [BR1], Leahy [L] によって独立に分類されている. indecomposable な multiplicity-free 作用の自明でない弱同値な組のうち torus の付加以外で得られるのは以下のものである.

・$((\mathbb{T}\times)\mathrm{Sp}(n),\mathbb{H}^n)\sim((\mathbb{T}\times)\mathrm{SU}(2n),\mathbb{C}^{2n}),\quad n\geq 2,$
・$(\mathbb{T}\times\mathrm{Spin}(7),\mathbb{C}^8)\sim(\mathbb{T}\times\mathrm{SO}(8),\mathbb{C}^8),$
・$(\mathbb{T}\times\mathrm{G}_2,\mathbb{C}^7)\sim(\mathbb{T}\times\mathrm{SO}(7),\mathbb{C}^7).$

特に, rank が 2 以下の multiplicity-free 作用はすべて Hermite 型作用と弱同値になる. $\mathrm{rank}(K,V)=3$ なる indecomposable な multiplicity-free 作用が Hermite 型作用と弱同値でなければ, 以下のものと弱同値である.

(1) $(\mathbb{T}\times\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{SU}(2),\mathrm{Mat}(2n,2,\mathbb{C})),\quad n\geq 2,$
(2) $(\mathbb{T}\times\mathrm{Spin}(9),\mathbb{C}^{16}),$
(3) $(\mathbb{T}^2\times\mathrm{SU}(n),\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{C}^n),\quad n\geq 2,$
(4) $(\mathbb{T}^2\times\mathrm{SU}(n),\mathbb{C}^n\oplus(\mathbb{C}^n)^*),\quad n\geq 3.$

ここで, $(\mathbb{C}^n)^*$ は複素 vector 空間としては $\mathbb{C}^n$ と同じものであり, (3) における $\mathrm{SU}(n)$ の 2 つの $\mathbb{C}^n$ への作用は同値であり, (4) における $\mathrm{SU}(n)$ の $(\mathbb{C}^n)^*$ への作用は $\mathbb{C}^n$ への作用と反傾なものとする. (1)~(3) はそれぞれある Hermite 型作用の制限とみなすことができる. また, (1), (2), (4) はそれぞれ 2 次の K-相対不変多項式をもつ. これらのことは, K-不変式や 2 項係数がみたす漸化式を導くのに重要な役割を果たす. 以下の節で, それぞれの作用について K-不変式と K-不変微分作用素を具体的に表示する.

3 $(K,V)=(\mathbb{T}\times\mathrm{Sp}(n)\times\mathrm{SU}(2),\mathrm{Mat}(2n,2,\mathbb{C}))\ (n\geq 2)$

まず, 群 $\mathrm{Sp}(n)$ の実現の方法を与える. 非退化 $2n$ 次交代行列 J_n として反対角なものをとる, 即ち

$$J_n:=\begin{pmatrix} O & I'_n \\ -I'_n & O\end{pmatrix},\quad I'_n:=\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ 1 & & & 0\end{pmatrix}. \tag{3,1}$$

これを用いて, $\mathrm{Sp}(n)$ を次のように実現する.

$$\mathrm{Sp}(n)=\{g\in\mathrm{U}(2n)\,;\,{}^t\!gJ_ng=J_n\}=\mathrm{SU}(2n)\cap\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C}).$$

このとき, K の V への作用を以下で定義する.

$$(u,g_1,g_2)\cdot v:=u\,{}^t\!g_1^{-1}vg_2^{-1},$$

ただし, $u \in \mathbb{T}$, $g_1 \in \mathrm{Sp}(n)$, $g_2 \in \mathrm{SU}(2)$, $v \in \mathrm{Mat}(2n, 2, \mathbb{C})$. $\mathrm{Sp}(n) \subset \mathrm{SU}(2n)$ により, K の $V = \mathrm{Mat}(2n, 2, \mathbb{C})$ への作用は $\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2n) \times \mathrm{SU}(2)$ の V への作用の K への制限とみなせる. 作用 $(\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2n) \times \mathrm{SU}(2), \mathrm{Mat}(2n, 2, \mathbb{C}))$ は Hermite 型であり, 基本 highest weight vector は $f_1 = z_{1,1}$, $f_2 = z_{1,1}z_{2,2} - z_{2,1}z_{1,2}$ である. このとき, $\mathcal{P}(V)$ は次のように既約分解される.

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{l_1 \geq l_2 \geq 0} P_{(l_1,l_2)}, \tag{3,2}$$

ただし, $P_{(l_1,l_2)}$ は多項式 $f_{(l_1,l_2)} = f_1^{l_1-l_2} f_2^{l_2}$ を highest weight vector にもつ既約成分である. ここで, 以下のような不変式と不変微分作用素を与える.

$$\begin{aligned}
q_1 &:= \sum_{\substack{1 \leq i \leq 2n \\ j=1,2}} |z_{i,j}|^2, \\
q_2 &:= \det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{2n} |z_{i,1}|^2 & \sum_{i=1}^{2n} z_{i,1}\overline{z}_{i,2} \\ \sum_{i=1}^{2n} z_{i,2}\overline{z}_{i,1} & \sum_{i=1}^{2n} |z_{i,2}|^2 \end{pmatrix}, \\
D_1 &:= \sum_{\substack{1 \leq i \leq 2n \\ j=1,2}} z_{i,j}\partial_{z_{i,j}}, \\
D_2 &:= \det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{2n} z_{i,1}\partial_{z_{i,1}} + 1 & \sum_{i=1}^{2n} z_{i,1}\partial_{z_{i,2}} \\ \sum_{i=1}^{2n} z_{i,2}\partial_{z_{i,1}} & \sum_{i=1}^{2n} z_{i,2}\partial_{z_{i,2}} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ただし, D_2 における行列式は列行列式とする. これらを用いると, 分割 $\lambda = (l_1, l_2)$, $\mu = (m_1, m_2)$ に対して, 不変式, 2 項係数, 不変微分作用素は以下のように表される.

$$\begin{aligned}
p_\lambda(z, \overline{z}) &= \frac{1}{\|f_\lambda\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\lfloor \frac{l_1+l_2}{2} \rfloor} (-1)^{j-l_2} \binom{l_1 - j}{j - l_2} q_1^{l_1+l_2-2j} q_2^j, \\
\binom{\mu}{\lambda} &= \frac{1}{\|f_\lambda\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\lfloor \frac{l_1+l_2}{2} \rfloor} (-1)^{j-l_2} \binom{l_1 - j}{j - l_2} (m_1 + m_2 - 2j)^{\underline{l_1+l_2-2j}} (m_1 + 1)^{\underline{j}} m_2^{\underline{j}}, \\
p_\lambda(z, \partial) &= \frac{1}{\|f_\lambda\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\lfloor \frac{l_1+l_2}{2} \rfloor} (-1)^{j-l_2} \binom{l_1 - j}{j - l_2} \prod_{a=2j}^{l_1+l_2-1} (D_1 - a) \prod_{b=0}^{j-1} (D_2 - bD_1 + b^2 - b).
\end{aligned}$$

ただし, $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ は (1,1) で与えられる Fischer 内積から得られる norm であり, $\|f_\lambda\|_{\mathcal{F}}^2 = (l_1 - l_2)!(l_1 + 1)^{\underline{l_2}} l_2!$ である.

$f_3 = \sum_{j=1}^{n} (z_{j,1}z_{2n-j+1,2} - z_{2n-j+1,1}z_{j,2})$ は $\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{SU}(2)$-不変な 2 次多項式であり, f_1, f_2, f_3 は作用 $(\mathbb{T} \times \mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{SU}(2), \mathrm{Mat}(2n, 2, \mathbb{C}))$ の基本 highest weight vector である. $\mathrm{SU}(2n)$ の作用を $\mathrm{Sp}(n)$ に制限することにより, $P_{(l_1,l_2)}$ は次のように既約分解される (例えば [KT] を参照せよ).

$$P_{(l_1,l_2)} = \sum_{l_3=0}^{l_2} P_{(l_1,l_2,l_3)},$$

ただし, $P_{(l_1,l_2,l_3)}$ は次の多項式 $f_{(l_1,l_2,l_3)} = f_1^{l_1-l_2} f_2^{l_2-l_3} f_3^{l_3}$ を highest weight vector にもつ既約成分である. f_3 が $\mathrm{Sp}(n) \times \mathrm{SU}(2)$-不変であることより, 次で与えられる q_3, D_3 がそれぞれ K-不変式, K-不変微分作用素であることが分かる.

$$q_3 = |f_3(z)|^2, \quad D_3 = f_3(z)\overline{f}_3(\partial).$$

このとき, 次のことが成り立つ.

$$\begin{aligned}
p_{(l_1,l_2)}(z,\overline{z}) &= \sum_{l_3=0}^{l_2} p_{(l_1,l_2,l_3)}(z,\overline{z}), \\
p_{(l_1+l,l_2+l,l)}(z,\overline{z}) &= \frac{1}{(l_1+l_2+l+2n-1)^{\underline{l}} l!} p_{(l_1,l_2,0)}(z,\overline{z}) q_3^l, \\
\binom{(m_1,m_2)}{(l_1,l_2)} &= \sum_{l_3=0}^{l_2} \binom{(m_1,m_2,m_3)}{(l_1,l_2,l_3)}, \\
\binom{(m_1,m_2,m_3)}{(l_1+l,l_2+l,l)} &= \frac{1}{(l_1+l_2+l+2n-1)^{\underline{l}} l!} \binom{(m_1-l,m_2-l,m_3-l)}{(l_1,l_2,0)} \\
&\quad \cdot (m_1+m_2-m_3+2n-1)^{\underline{l}} m_3^{\underline{l}}.
\end{aligned}$$

以上のことより, K-不変式, 2 項係数, K-不変微分作用素が求まる.

定理 11 $\lambda = (l_1,l_2,l_3)$, $\mu = (m_1,m_2,m_3)$ に対して K-不変式, 2 項係数, K-不変微分作用素が以下のように表される.

$$\begin{aligned}
p_\lambda(z,\overline{z}) &= \frac{\|f_{(l_1-l_2,0,0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1,l_2,l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} p_{(l_1-l_2,0)}(z,\overline{z}) \\
&\quad \cdot \left(\sum_{j=l_3}^{l_2} (-1)^{j-l_3} \binom{l_2-l_3}{j-l_3} \frac{(l_1-l_3+1)^{\underline{j-l_3}}}{(l_1+l_2-2l_3+2n-2)^{\underline{j-l_3}}} q_2^{l_2-j} q_3^j \right), \\
\binom{\mu}{\lambda} &= \frac{\|f_{(l_1-l_2,0,0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1,l_2,l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} \binom{(m_1-l_2,m_2-l_2)}{(l_1-l_2,0)} \\
&\quad \cdot \left(\sum_{j=l_3}^{l_2} (-1)^{j-l_3} \binom{l_2-l_3}{j-l_3} \frac{(l_1-l_3+1)^{\underline{j-l_3}}}{(l_1+l_2-2l_3+2n-2)^{\underline{j-l_3}}} \right. \\
&\quad \left. \cdot (m_1-j+1)^{\underline{l_2-j}} (m_2-j)^{\underline{l_2-j}} (m_1+m_2-m_3+2n-1)^{\underline{j}} m_3^{\underline{j}} \right), \\
p_\lambda(z,\partial) &= \frac{\|f_{(l_1-l_2,0,0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1,l_2,l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} p^{*l_2}_{(l_1-l_2,0)}(z,\partial) \\
&\quad \cdot \left(\sum_{j=l_3}^{l_2} (-1)^{j-l_3} \binom{l_2-l_3}{j-l_3} \frac{(l_1-l_3+1)^{\underline{j-l_3}}}{(l_1+l_2-2l_3+2n-2)^{\underline{j-l_3}}} \right. \\
&\quad \left. \cdot \prod_{c=j}^{l_2-1} (D_2 - cD_1 + c^2 - c) \prod_{d=0}^{j-1} (D_3 - dD_1 + d^2 - (2n-1)d) \right),
\end{aligned}$$

ただし, $p_{(l_1,l_2)}(z,\overline{z})$, $\left(\begin{pmatrix} (m_1,m_2) \\ (l_1,l_2) \end{pmatrix}\right)$, $p_{(l_1,l_2)}(z,\partial)$ はそれぞれ作用 $(\mathbb{T}\times SU(2n)\times SU(2)$, $\mathrm{Mat}(2n,2,\mathbb{C}))$ に関する不変式, 2 項係数, 不変微分作用素であり, $p^{*l_2}_{(l_1-l_2,0)}(z,\partial)$ は $p_{(l_1-l_2,0)}(z,\partial)$ において D_1, D_2 をそれぞれ D_1-2l_2, $D_2-l_2D_1+l_2^2-l_2$ に変えたものである. なお,

$$\frac{\|f_{(l_1-l_2,0,0)}\|^2_{\mathcal{F}}}{\|f_{(l_1,l_2,l_3)}\|^2_{\mathcal{F}}} = \frac{1}{(l_1-l_3+1)^{\underline{l_2-l_3}}(l_2-l_3)!(l_1+l_2-l_3+2n-1)^{\underline{l_3}}l_3!}.$$

特に, 基本 highest weight $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ については次のようになる.

$$\begin{aligned}
p_1(z,\overline{z}) &= p_{(1,0,0)}(z,\overline{z}) = q_1, \\
p_2(z,\overline{z}) &= p_{(1,1,0)}(z,\overline{z}) = \frac{1}{2}q_2 - \frac{1}{2n}q_3, \\
p_3(z,\overline{z}) &= p_{(1,1,1)}(z,\overline{z}) = \frac{1}{2n}q_3, \\
p_1(z,\partial) &= p_{(1,0,0)}(z,\partial) = D_1, \\
p_2(z,\partial) &= p_{(1,1,0)}(z,\partial) = \frac{1}{2}D_2 - \frac{1}{2n}D_3, \\
p_3(z,\partial) &= p_{(1,1,1)}(z,\partial) = \frac{1}{2n}D_3.
\end{aligned}$$

これらを q_1,q_2,q_3, D_1,D_2,D_3 について解くことにより, 各 $p_\lambda(z,\overline{z})$, $p_\lambda(z,\partial)$ がそれぞれ $\{p_j(z,\overline{z})\}_{j=1}^3$, $\{p_j(z,\partial)\}_{j=1}^3$ の多項式で具体的に表されることが分かる.

この作用 (K,V) に対して, Hermite 型作用の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ に当たるものを求める. まず, 簡単のために次の記号を導入する.

$$\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{2,2} \\ z_{2n-1,1} & z_{2n,2} \end{bmatrix} := \begin{pmatrix} z_{1,1} & 0 \\ 0 & z_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ z_{2n-1,1} & 0 \\ 0 & z_{2n,2} \end{pmatrix}.$$

これを用いて, 次の集合を考える.

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{2,2} \\ z_{2n-1,1} & z_{2n,2} \end{bmatrix} ; z_{1,1}, z_{2,2}, z_{2n-1,1}, z_{2n,2} \in \mathbb{R} \right\}, \\
\Omega &:= \{ v \in \mathrm{Mat}(2n,2,\mathbb{C}) ; f_3(v) \neq 0 \}, \\
M_0 &:= \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{2,2} \\ z_{2n-1,1} & z_{2n,2} \end{bmatrix} \in \Omega \cap M_1 ; z_{1,1}^2 z_{2n,2}^2 - z_{2n-1,1}^2 z_{2,2}^2 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} r\cos\theta_1\cos\theta_2 & -r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ r\cos\theta_1\sin\theta_2 & r\sin\theta_1\sin\theta_2 \end{bmatrix} ; r>0,\ \theta_1,\theta_2 \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \right\}.
\end{aligned}$$

すると, 作用 (K,V) は M_1, M_0 をともに slice にもつ強可視的な作用であり, $K\cdot M_1=V$, $K\cdot M_0=\Omega$ が成り立つ. M_1 について, 次の群を考える.

$$\begin{aligned} N_K(M_1) &= \{g\in K\,;\, g\cdot M_1=M_1\},\\ Z_K(M_1) &= \{g\in K\,;\, g\cdot v=v \text{ for all } v\in M_1\},\\ W_K(M_1) &= N_K(M_1)/Z_K(M_1). \end{aligned}$$

このとき, $W_K(M_1)$ は以下のようにして $(\mathrm{O}(2)\times\{\pm1\})\rtimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\simeq\{I_2,I_2'\})$ と同一視される.

$$\begin{aligned} (g,(-1)^\epsilon,I_2)\cdot\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{2,2}\\ z_{2n-1,1} & z_{2n,2}\end{bmatrix} &= g\begin{bmatrix} (-1)^\epsilon z_{1,1} & z_{2,2}\\ (-1)^\epsilon z_{2n-1,1} & z_{2n,2}\end{bmatrix}, \quad \epsilon=0,1,\\ (I_2,1,I_2')\cdot\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{2,2}\\ z_{2n-1,1} & z_{2n,2}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z_{2,2} & z_{1,1}\\ z_{2n,2} & z_{2n-1,1}\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

また, M_0 について次の群を考える.

$$\begin{aligned} N_K(M_0) &= \{g\in K\,;\, g\cdot M_0=M_0\},\\ \widetilde{W}_K(M_0) &= \mathrm{Ad}^*_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}}(N_K(M_0))|_{\mathbb{C}\Lambda}. \end{aligned}$$

すると, $\widetilde{W}_K(M_0)$ は以下のようにして $\{\pm1\}\times\{\pm1\}$ と同一視することができる. highest weight $\lambda=(l_1,l_2,l_3)\in\Lambda\in\mathfrak{a}^*$ について

$$\begin{aligned} (-1,1)\cdot(l_1,l_2,l_3) &= (l_1,l_2,l_1+l_2-l_3),\\ (1,-1)\cdot(l_1,l_2,l_3) &= (l_2,l_1,l_3). \end{aligned}$$

これは次のように考えると分かりやすい.

$$\begin{aligned} (-1,1)\,&:\,(l_1+l_2,l_1-l_2,l_1+l_2-2l_3)\mapsto(l_1+l_2,l_1-l_2,-(l_1+l_2-2l_3)),\\ (1,-1)\,&:\,(l_1+l_2,l_1-l_2,l_1+l_2-2l_3)\mapsto(l_1+l_2,-(l_1-l_2),l_1+l_2-2l_3). \end{aligned}$$

命題 12 (1) $(\mathcal{P}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}(V)})^K\simeq\mathbb{C}[M_1]^{W_K(M_1)}$,
(2) $\widetilde{W}_K(M_0)$ は命題 4 の W と一致する.
(3) M_0 は M_1 を実 vector 空間として生成する.

4 $(K,V)=(\mathbb{T}\times\mathrm{Spin}(9),\mathbb{C}^{16})$

この作用は Spin(9) の spin 表現であるが, これを Spin(10) の半 spin 表現の制限とみなす. そのために, まず Spin(10) の半 spin 表現を外積代数上で実現する. $\wedge(\mathbb{C}^5)$ を 5 次複素 vector 空間 $\mathbb{C}^5$ で生成される外積代数とし, $\wedge_e(\mathbb{C}^5)$ でその偶数次の元を集めた部分代数とする. すると, $\wedge_e(\mathbb{C}^5)$ は vector 空間としては 16 次元である. これを Spin(10) の半 spin 表現, および Spin(9) の spin 表現の表現空間とする. $e_1,\ldots,e_5$ を $\mathbb{C}^5$ の基底とし, $\wedge_e(\mathbb{C}^5)$ の基底を次のように表すことにする.

$$\begin{aligned} e_0 &:= 1\in\wedge^0(\mathbb{C}^5)\simeq\mathbb{C},\\ e_{jk} &:= e_j\wedge e_k\in\wedge^2(\mathbb{C}^5), \quad 1\le j<k\le 5,\\ e_{abcd} &:= e_a\wedge e_b\wedge e_c\wedge e_d\in\wedge^4(\mathbb{C}^5), \quad 1\le a<b<c<d\le 5. \end{aligned}$$

Spin(10) の Lie 代数 $\mathfrak{o}(10)$ を (3,1) の I'_n を用いて次のように実現する.

$$\begin{aligned}\mathfrak{o}(10) &= \{X \in \mathfrak{u}(10)\,;\, {}^tXI'_{10} + I'_{10}X = O\}\\ &= \mathbb{C}\{\widetilde{E}_{j,k} = E_{j,k} - E_{11-k,11-j}\,;\, 1 \le j \le 9, 1 \le k \le 10-j\},\end{aligned}$$

ここで, $\mathfrak{u}(10)$ は 10 次歪 Hermite 行列全体のなす Lie 代数で, $E_{j,k}$ は (j,k)-成分のみ 1 で他の成分が 0 である行列単位を表す. すると, $\widetilde{E}_{j,k}$ たちは $\mathfrak{o}(10)$ の基底をなす. $\mathfrak{o}(10)$ の $\wedge_e(\mathbb{C}^5)$ への作用を以下のように定める.

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_{j,k}\cdot e_I &= e_j \wedge \partial_k e_I - \frac{1}{2}\delta_{j,k}e_I, \quad 1 \le j,k \le 5,\\ \widetilde{E}_{j,11-k}\cdot e_I &= e_k \wedge e_j \wedge e_I, \quad 1 \le j < k \le 5,\\ \widetilde{E}_{11-k,j}\cdot e_I &= \partial_j\partial_k e_I, \quad 1 \le j < k \le 5,\end{aligned}$$

ここで, I は 0, $\{jk\}$ $(1 \le j < k \le 5)$, $\{abcd\}$ $(1 \le a < b < c < d \le 5)$ を表し, ∂_j は e_j に関する偏微分で, 外積代数の元には次のように作用する.

$$\partial_j(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}) = \sum_{t=1}^{s}(-1)^{t-1}\delta_{j,k_t}e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{t-1}} \wedge e_{k_{t+1}} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}.$$

$\partial_j\partial_k = -\partial_k\partial_j$ であることに注意する. Spin(10) の単連結性により, この $\mathfrak{o}(10)$ の作用から Spin(10) の作用が決まる. このようにして, Spin(10) の半 spin 表現が得られる. $V = \wedge_e(\mathbb{C}^5)$ の基底 e_0, e_{jk}, e_{abcd} に関する座標をそれぞれ z_0, z_{jk}, z_{abcd} とする. すると, $\mathcal{P}(V)$ は z_0, z_{jk} $(1 \le j < k \le 5)$, z_{abcd} $(1 \le a < b < c < d \le 5)$ を変数とする多項式環になる. また, $z_{kj} = -z_{jk}$ $(1 \le j < k \le 5)$, $\{\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), \sigma(d)\} = \{a,b,c,d\}$ $(1 \le a < b < c < d \le 5)$ なる 5 次の置換 (本質的には 4 次の置換)σ に対して $z_{\sigma(a)\sigma(b)\sigma(c)\sigma(d)} = (\operatorname{sgn}\sigma)z_{abcd}$ と約束する. ここで, V 上の以下の 2 次式を考える.

$$\begin{aligned}w_1 &= z_0z_{2345} - z_{23}z_{45} + z_{24}z_{35} - z_{25}z_{34},\\ w_{-1} &= z_{15}z_{1234} - z_{14}z_{1235} + z_{13}z_{1245} - z_{12}z_{1345}.\end{aligned}$$

さらに, $\sigma_0 = (1,2,3,4,5)$ を 5 次の巡回置換とし, $1 \le j \le 5$ なる j について, w_j, w_{-j} をそれぞれ w_1, w_{-1} に現れる変数の添字に σ_0^{j-1} を作用させたものとする. $P_{(1,1)} = \sum_{j=1}^5 \mathbb{C}w_j + \sum_{j=1}^5 \mathbb{C}w_{-j}$ とすると, $P_{(1,1)}$ は $\mathcal{P}(V)$ の Spin(10)-既約成分で, SO(10) の自然な表現と同値である. 作用 $(\mathbb{T} \times \mathrm{Spin}(10), \wedge_e(\mathbb{C}^5))$ は Hermite 型で, 基本 highest weight vector は $f_1 = z_0$, $f_2 = w_1$ であり, $\mathcal{P}(V)$ は次のように既約分解される.

$$\mathcal{P}(V) = \sum_{l_1 \ge l_2 \ge 0} P_{(l_1,l_2)},$$

ただし, $P_{(l_1,l_2)}$ は $z_0^{l_1-l_2}w_1^{l_2}$ を highest weight vector にもつ既約成分である. ここで, 不変式と不変微分作用素を 2 つずつ与える.

$$\begin{aligned}q_1 &= |z_0|^2 + \sum_{1\le j<k\le 5}|z_{jk}|^2 + \sum_{1\le a<b<c<d\le 5}|z_{abcd}|^2,\\ q_2 &= \sum_{j=1}^{5}|w_j|^2 + \sum_{j=1}^{5}|w_{-j}|^2,\end{aligned}$$

$$D_1 = z_0\partial_{z_0} + \sum_{1\le j<k\le 5} z_{jk}\partial_{z_{jk}} + \sum_{1\le a<b<c<d\le 5} z_{abcd}\partial_{z_{abcd}},$$

$$D_2 = \sum_{j=1}^{5} w_j\partial_{w_j} + \sum_{j=1}^{5} w_{-j}\partial_{w_{-j}},$$

ただし, ∂_{w_j}, $\partial_{w_{-j}}$ はそれぞれ w_j, w_{-j} の各変数に, その変数に関する偏微分作用素を代入したものとする. これらを用いることにより, $\lambda = (l_1, l_2)$, $\mu = (m_1, m_2)$ に対して, 不変式, 2 項係数, 不変微分作用素が次のように表される.

$$p_\lambda(z,\overline{z}) = \frac{1}{\|f_\lambda\|^2_{\mathcal{F}}} \sum_{j=l_2}^{\lfloor\frac{l_1+l_2}{2}\rfloor} (-1)^{j-l_2}\binom{l_1-j}{j-l_2}\frac{(l_1-l_2)^{\underline{j-l_2}}}{(l_1-l_2+2)^{\underline{j-l_2}}} q_1^{l_1+l_2-2j} q_2^{j},$$

$$\binom{\mu}{\lambda} = \frac{1}{\|f_\lambda\|^2_{\mathcal{F}}} \sum_{j=l_2}^{\lfloor\frac{l_1+l_2}{2}\rfloor} (-1)^{j-l_2}\binom{l_1-j}{j-l_2}\frac{(l_1-l_2)^{\underline{j-l_2}}}{(l_1-l_2+2)^{\underline{j-l_2}}}$$
$$\cdot (m_1+m_2-2j)^{\underline{l_1-l_2-2j}}(m_1+3)^{\underline{j}} m_2^{\underline{j}},$$

$$p_\lambda(z,\partial) = \frac{1}{\|f_\lambda\|^2_{\mathcal{F}}} \sum_{j=l_2}^{\lfloor\frac{l_1+l_2}{2}\rfloor} (-1)^{j-l_2}\binom{l_1-j}{j-l_2}\frac{(l_1-l_2)^{\underline{j-l_2}}}{(l_1-l_2+2)^{\underline{j-l_2}}}$$
$$\cdot \prod_{a=2j}^{l_1+l_2-1}(D_1-a)\prod_{b=0}^{j-1}(D_2-bD_1+b^2-3b).$$

$\|f_\lambda\|^2_{\mathcal{F}}$ は具体的に求まり $\|f_{(l_1,l_2)}\|^2_{\mathcal{F}} = (l_1-l_2)!(l_1+3)^{\underline{l_2}} l_2!$ である.

Spin(9) の作用は Spin(10) の作用の制限として得られる. このことを具体的に表示するために, $\mathfrak{o}(9) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Spin}(9))$ を $\mathfrak{o}(10)$ の中に以下のように実現する.

$$\mathfrak{o}(9) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c|c} X_{11} & \begin{matrix} x_{15}\\ x_{25}\\ x_{35}\\ x_{45}\end{matrix} & \begin{matrix} x_{15}\\ x_{25}\\ x_{35}\\ x_{45}\end{matrix} & X_{12} \\ \hline -\begin{pmatrix}\overline{x}_{15} & \overline{x}_{25} & \overline{x}_{35} & \overline{x}_{45}\end{pmatrix} & 0 & 0 & -\begin{pmatrix} x_{45} & x_{35} & x_{25} & x_{15}\end{pmatrix} \\ \hline -\begin{pmatrix}\overline{x}_{15} & \overline{x}_{25} & \overline{x}_{35} & \overline{x}_{45}\end{pmatrix} & 0 & 0 & -\begin{pmatrix} x_{45} & x_{35} & x_{25} & x_{15}\end{pmatrix} \\ \hline X_{21} & \begin{matrix} \overline{x}_{45}\\ \overline{x}_{35}\\ \overline{x}_{25}\\ \overline{x}_{15}\end{matrix} & \begin{matrix} \overline{x}_{45}\\ \overline{x}_{35}\\ \overline{x}_{25}\\ \overline{x}_{15}\end{matrix} & X_{22} \end{array} \right) \in \mathfrak{o}(10) \right\}$$
$$= \{X \in \mathfrak{o}(10)\,;\, X \cdot {}^t(0,0,0,0,1,-1,0,0,0,0) = 0\}.$$

この $\mathfrak{o}(9)$ に対応する Spin(10) の解析部分群を Spin(9) とする. すると, $w_5 + w_{-5}$ は Spin(9)-不変になる. $f_3 = w_5 + w_{-5}$ とすると, 作用 $(\mathbb{T}\times\mathrm{Spin}(9), \wedge_e(\mathbb{C}^5))$ の基本 highest weight vector は f_1, f_2, f_3 である. そして, $f_{(l_1,l_2,l_3)} = f_1^{l_1-l_2} f_2^{l_2-l_3} f_3^{l_3}$ を highest weight vector にもつ $\mathcal{P}(V)$ の既約成分を $P_{(l_1,l_2,l_3)}$ と表すと, $\mathcal{P}(V)$ は次の

既約分解をもつ(例えば[GW]を参照せよ).

$$P_{(l_1,l_2)} = \sum_{l_3=0}^{l_2} P_{(l_1,l_2,l_3)}.$$

ここで, さらに次の不変式, 不変微分作用素を与える.

$$q_3 = |f_3|^2 = |w_5 + w_{-5}|^2, \quad D_3 = f_3\partial_{f_3} = (w_5 + w_{-5})(\partial_{w_5} + \partial_{w_{-5}}).$$

定理 13 $\lambda = (l_1, l_2, l_3)$, $\mu = (m_1, m_2, m_3)$ に対して, K-不変式, 2 項係数, K-不変微分作用素は次のように表される.

$$\begin{aligned}
p_\lambda(z,\bar{z}) &= \frac{\|f_{(l_1-l_2,0,0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1,l_2,l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} p_{(l_1-l_2,0)}(z,\bar{z}) \\
&\quad \cdot \left(\sum_{j=l_3}^{l_2} (-1)^{j-l_3} \binom{l_2-l_3}{j-l_3} \frac{(l_1-l_3+3)^{\underline{j-l_3}}}{(l_1+l_2-2l_3+6)^{\underline{j-l_3}}} q_2^{l_2-j} q_3^j \right), \\
\binom{\mu}{\lambda} &= \frac{\|f_{(l_1-l_2,0,0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1,l_2,l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} \binom{(m_1-l_2, m_2-l_2)}{(l_1-l_2,0)} \\
&\quad \cdot \left(\sum_{j=l_3}^{l_2} (-1)^{j-l_3} \binom{l_2-l_3}{j-l_3} \frac{(l_1-l_3+3)^{\underline{j-l_3}}}{(l_1+l_2-2l_3+6)^{\underline{j-l_3}}} \right. \\
&\quad \left. \cdot (m_1-j+3)^{\underline{l_2-j}} (m_2-j)^{\underline{l_2-j}} (m_1+m_2-m_3+7)^{\underline{j}} m_3^{\underline{j}} \right), \\
p_\lambda(z,\partial) &= \frac{\|f_{(l_1-l_2,0,0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1,l_2,l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} p^{*l_2}_{(l_1-l_2,0)}(z,\partial) \\
&\quad \cdot \left(\sum_{j=l_3}^{l_2} (-1)^{j-l_3} \binom{l_2-l_3}{j-l_3} \frac{(l_1-l_3+3)^{\underline{j-l_3}}}{(l_1+l_2-2l_3+6)^{\underline{j-l_3}}} \right. \\
&\quad \left. \cdot \prod_{c=j}^{l_2-1} (D_2 - cD_1 + c^2 - 3c) \prod_{d=0}^{j-1} (D_3 - dD_1 + d^2 - 7d) \right),
\end{aligned}$$

ただし, $p_{(l_1,l_2)}(z,\bar{z})$, $\binom{(m_1,m_2)}{(l_1,l_2)}$, $p_{(l_1,l_2)}(z,\partial)$ はそれぞれ作用 $(\mathbb{T} \times \mathrm{Spin}(10), \mathbb{C}^{16})$ に関する不変式, 2 項係数, 不変微分作用素であり, $p^{*l_2}_{(l_1-l_2,0)}(z,\partial)$ は $p_{(l_1-l_2,0)}(z,\partial)$ において D_1, D_2 をそれぞれ $D_1 - 2l_2$, $D_2 - l_2 D_1 + l_2^2 - 3l_2$ に変えたものである. なお,

$$\frac{\|f_{(l_1-l_2,0,0)}\|_{\mathcal{F}}^2}{\|f_{(l_1,l_2,l_3)}\|_{\mathcal{F}}^2} = \frac{1}{(l_1-l_3+3)^{\underline{l_2-l_3}}(l_2-l_3)!(l_1+l_2-l_3+7)^{\underline{l_3}} l_3!}.$$

この作用 (K, V) についても Hermite 型の $\mathfrak{a}$ に対応する部分集合を求めてみる. 簡単のために次の記号を導入する.

$$\begin{bmatrix} z_0 & z_{2345} \\ z_{15} & z_{1234} \end{bmatrix} := z_0 e_0 + z_{15} e_{15} + z_{1234} e_{1234} + z_{2345} e_{2345}.$$

これを用いて, 以下の集合を考える.

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \left\{ \begin{bmatrix} z_0 & z_{2345} \\ z_{15} & z_{1234} \end{bmatrix} \in \wedge_e(\mathbb{C}^5)\,;\ z_0, z_{15}, z_{1234}, z_{2345} \in \mathbb{R} \right\}, \\
\Omega &:= \{ v \in \wedge_e(\mathbb{C}^5)\,;\ f_3(v) \neq 0 \}, \\
M_0 &:= \left\{ \begin{bmatrix} z_0 & z_{2345} \\ z_{15} & z_{1234} \end{bmatrix} \in \Omega \cap M_1\,;\ z_0^2 z_{1234}^2 - z_{15}^2 z_{2345}^2 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} r\cos\theta_1\cos\theta_2 & -r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ r\cos\theta_1\sin\theta_2 & r\sin\theta_1\sin\theta_2 \end{bmatrix}\,;\ r > 0,\ \theta_1, \theta_2 \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \right\}.
\end{aligned}$$

すると, 作用 (K,V) は M_1 および M_0 を slice にもつ強可視的な作用であり, $K \cdot M_1 = V$, $K \cdot M_0 = \Omega$ を満たす. 前節と同様に $N_K(M_1)$, $Z_K(M_1)$, $W_K(M_1)$, $N_K(M_0)$, $\widetilde{W}_K(M_0)$ を求めると, $W_K(M_1) \simeq (\mathrm{O}(2) \times \{\pm 1\}) \rtimes \{I_2, I_2'\}$, $\widetilde{W}_K(M_0) \simeq \{I_2, I_2'\} \times \{I_2, I_2'\}$ となることが分かる.

命題 14 (1) $(\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)})^K \simeq \mathbb{C}[M_1]^{W_K(M_1)}$,
(2) $\widetilde{W}_K(M_0)$ は命題 4 の W と一致する.
(3) M_0 は M_1 を実 vector 空間として生成する.

注意 15 この節の結果は, 基本 highest weight vector の次元, 相対不変式の存在, 不変式, 2 項係数, 不変微分作用素の表示, 強可視性を表す slice の形など前節の結果と非常に類似している. このことは, [Kn2] において 2 つの作用が同じ Case VIa に分類されていることに対応する.

5 $(K,V) = (\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n), \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n)$ $(n \geq 2)$

この節と次の節で扱う作用は可約であるが indecomposable なものである. まず, $\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n)$ の $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ への作用を次のように実現する.

$$(u_1, u_2, g) \cdot (v_1, v_2) := (u_1 {}^t g^{-1} v_1, u_2 {}^t g^{-1} v_2),$$

ただし, $u_1, u_2 \in \mathbb{T}$, $g \in \mathrm{SU}(n)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$. このとき, 基本 highest weight vector は以下の 3 つである.

$$f_{11} = z_{11}, \quad f_{12} = z_{12}, \quad f_2 = z_{1,1}z_{2,2} - z_{2,1}z_{1,2}. \tag{5,1}$$

$f_{(l_{11}, l_{12}, l_2)} = f_{11}^{l_{11}-l_2} f_{12}^{l_{12}-l_2} f_2^{l_2}$ を highest weight vector にもつ $\mathcal{P}(V)$ の既約成分を $P_{(l_{11}, l_{12}, l_2)}$ と表すことにする. K の $\mathcal{P}(V)$ への作用には 2 つの見方がある. $\mathbb{T}^2$ の作用を局所的に $\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(2)$ の作用の制限とみなすことにより, この作用は $(\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2), \mathrm{Mat}(n, 2, \mathbb{C}))$ の制限と考えることができる. このことから, 次の既約分解を得る.

$$P_{(l_1, l_2)} = \sum_{l_{11}+l_{12}=l_1+l_2} P_{(l_{11}, l_{12}, l_2)},$$

ただし, $P_{(l_1, l_2)}$ は (3,2) で現れた $\mathcal{P}(\mathrm{Mat}(n, 2, \mathbb{C}))$ の $\mathbb{T} \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2)$-加群としての既約成分のこととする. また, $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ の $\mathrm{SU}(n)$-加群としての既約分解を

$\mathcal{P}(\mathbb{C}^n) = \sum_l P_l$ とすると, SU(n) が $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ に対角に作用していると考えることにより, 次の既約分解が得られる (Pieri formula).

$$P_{l_{11}} \otimes P_{l_{12}} = \sum_{l_2=0}^{\min\{l_{11},l_{12}\}} P_{(l_{11},l_{12},l_2)}.$$

これらを利用することにより, 不変式, 2 項係数, 不変微分作用素が計算できる. いま, 次のような不変式と不変微分作用素を与える.

$$q_{11} = \sum_{j=1}^{n} |z_{j,1}|^2, \quad q_{12} = \sum_{j=1}^{n} |z_{j,2}|^2,$$
$$q_2 = \det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n |z_{j,1}|^2 & \sum_{j=1}^n z_{j,1}\overline{z}_{j,2} \\ \sum_{j=1}^n z_{j,2}\overline{z}_{j,1} & \sum_{j=1}^n |z_{j,2}|^2 \end{pmatrix},$$
$$D_{11} = \sum_{j=1}^{n} z_{j,1}\partial_{z_{j,1}}, \quad D_{12} = \sum_{j=1}^{n} z_{j,2}\partial_{z_{j,2}},$$
$$D_2 = \det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n z_{j,1}\partial_{z_{j,1}} + 1 & \sum_{j=1}^n z_{j,1}\partial_{z_{j,2}} \\ \sum_{j=1}^n z_{j,2}\partial_{z_{j,1}} & \sum_{j=1}^n z_{j,2}\partial_{z_{j,2}} \end{pmatrix}.$$

定理 16 $\lambda = (l_{11}, l_{12}, l_2)$, $\mu = (m_{11}, m_{12}, m_2)$ に対して, K-不変式, 2 項係数, K-不変微分作用素が以下のように表される.

$$p_\lambda(z,\overline{z}) = \frac{1}{\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2,l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\min\{l_{11},l_{12}\}} (-1)^{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-l_2-j}{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-2j}{l_{12}-j} \cdot q_{11}^{l_{11}-j} q_{12}^{l_{12}-j} q_2^{j},$$

$$\binom{\mu}{\lambda} = \frac{1}{\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2,l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\min\{l_{11},l_{12}\}} (-1)^{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-l_2-j}{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-2j}{l_{12}-j} \cdot (m_{11}-j)^{\underline{l_{11}-j}} (m_{12}-j)^{\underline{l_{12}-j}} (m_{11}+m_{12}-m_2+1)^{\underline{j}} m_2^{\underline{j}},$$

$$p_\lambda(z,\partial) = \frac{1}{\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2,l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\min\{l_{11},l_{12}\}} (-1)^{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-l_2-j}{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-2j}{l_{12}-j} \cdot \prod_{a=j}^{l_{11}-1} (D_{11}-a) \prod_{b=j}^{l_{12}-1} (D_{12}-b) \prod_{c=0}^{j-1} (D_2 - c(D_{11}+D_{12}) + c^2 - c),$$

ただし, $f_{(l_{11}+l_{12}-l_2,l_2)} = f_{11}^{l_{11}+l_{12}-2l_2} f_2^{l_2}$ である.

ここで, 各式の分母に現れる因子 $\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2,l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2$ が $\|f_{(l_{11},l_{12},l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2$ でないことに注意する. $\lambda_{11} = (1,0,0)$, $\lambda_{12} = (0,1,0)$, $\lambda_2 = (1,1,1)$ とおくとき, λ_{11}, λ_{12}, λ_2 に関する不変式, 不変微分作用素を表す式を q_{11}, q_{12}, q_2, D_{11}, D_{12}, D_2 について解くことにより, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対する不変式, 不変微分作用素がそれぞれ基本 highest weight に対応する不変式, 不変微分作用素の多項式で具体的に表されることが分かる.

この作用 (K,V) についても, Hermite 型作用のときの極大可換部分空間に対応するものを考える. そのために, 次の記号を導入する.

$$\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \end{bmatrix} := \left(\begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{2,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{1,2} \\ z_{2,2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right). \tag{5,2}$$

これを用いて, 以下の集合を考える.

$$M_1 := \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n\,;\, z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2} \in \mathbb{R} \right\}, \tag{5,3}$$

$$\Omega := \{v = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n\,;\, f_2(v) \neq 0\}, \tag{5,4}$$

$$\begin{aligned} M_0 &:= \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \end{bmatrix} \in \Omega \cap M_1\,;\, z_{1,1}^2 z_{2,2}^2 - z_{2,1}^2 z_{1,2}^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} r_1 \cos\theta & \mp r_2 \cos\theta \\ r_1 \sin\theta & \pm r_2 \sin\theta \end{bmatrix} ;\, r_1, r_2 > 0,\, \theta \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \right\}. \end{aligned} \tag{5,5}$$

すると, 作用 (K,V) は M_1, M_0 をともに slice にもつ強可視的な作用であり, $K \cdot M_1 = V$, $K \cdot M_0 = \Omega$ をみたす. 3 節と同様に $N_K(M_1)$, $Z_K(M_1)$, $W_K(M_1)$ を求めると, $W_K(M_1)$ は次のようにして $\mathrm{O}(2) \times \{\pm 1\}$ と同一視される.

$$(g, (-1)^\epsilon) \cdot \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{2,1} & z_{2,2} \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} (-1)^\epsilon z_{1,1} & z_{1,2} \\ (-1)^\epsilon z_{2,1} & z_{2,2} \end{bmatrix}.$$

また, $N_K(M_0)$, $\widetilde{W}_K(M_0)$ も同様に求めると, $\widetilde{W}_K(M_0)$ は次のようにして $\{\pm 1\}$ と同一視できる.

$$(-1) \cdot (l_{11}, l_{12}, l_{11} + l_{12} - 2l_2) = (l_{11}, l_{12}, -(l_{11} + l_{12} - 2l_2)).$$

命題 17 (1) $(\mathcal{P}(V) \otimes \overline{\mathcal{P}(V)})^K \simeq \mathbb{C}[M_1]^{W_K(M_1)}$,
(2) $\widetilde{W}_K(M_0)$ は命題 4 の W と一致する.
(3) M_0 は M_1 を実 vector 空間として生成する.

6 $(K,V) = (\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n), \mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*)$ $(n \geq 3)$

この節では, 前節と作用する群も vector 空間も同じだが作用の仕方が異なるものについて考察する. まず, 定義を確認する. $(\mathbb{C}^n)^*$ は複素 vector 空間としては $\mathbb{C}^n$ と同じものだが, $\mathrm{SU}(n)$ の作用が $\mathbb{C}^n$ のものとは複素共役なものとする. 作用 (K,V) を具体的に表すと次のようになる.

$$(u_1, u_2, g) \cdot (v_1, v_2) := (u_1 {}^t g^{-1} v_1, u_2 g v_2),$$

ただし, $u_1, u_2 \in \mathbb{T}$, $g \in \mathrm{SU}(n)$, $v_1 \in \mathbb{C}^n$, $v_2 \in (\mathbb{C}^n)^*$. この作用の基本 highest weight vector は以下のものである.

$$f_{11} = z_{1,1}, \quad f_{12} = z_{n,2}, \quad f_2 = \sum_{j=1}^{n} z_{j,1} z_{j,2}. \tag{6,1}$$

f_2 は $\mathrm{SU}(n)$-不変であることに注意する. この作用では前節の $(\mathbb{T}^2 \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{SU}(2), \mathrm{Mat}(n, 2, \mathbb{C}))$ に相当するものはないが, $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n \oplus (\mathbb{C}^n)^*) \simeq \mathcal{P}(\mathbb{C}^n) \otimes \mathcal{P}((\mathbb{C}^n)^*)$ と考えて既約分解を得ることができる. 具体的には, $\mathcal{P}((\mathbb{C}^n)^*)$ の $\mathrm{SU}(n)$-加群としての既約分解を $\mathcal{P}((\mathbb{C}^n)^*) = \sum_{l=0}^{n} P_l^*$ とすると, 次のような既約分解が得られる.

$$P_{l_1} \otimes P_{l_2}^* = \sum_{l_2=0}^{\min\{l_1, l_2\}} P_{(l_{11}, l_{12}, l_2)},$$

ここで, $P_{(l_{11}, l_{12}, l_2)}$ は $f_{(l_{11}, l_{12}, l_2)} = f_{11}^{l_{11}-l_2} f_{12}^{l_{12}-l_2} f_2^{l_2}$ を highest weight にもつ K-既約成分である. ここで, 以下のような不変式, 不変微分作用素を与える.

$$\begin{aligned}
q_{11} &= \sum_{j=1}^{n} |z_{j,1}|^2, \quad q_{12} = \sum_{j=1}^{n} |z_{j,2}|^2, \\
q_2 &= |f_2|^2 = \left| \sum_{j=1}^{n} z_{j,1} z_{j,2} \right|^2, \\
D_{11} &= \sum_{j=1}^{n} z_{j,1} \partial_{z_{j,1}}, \quad D_{12} = \sum_{j=1}^{n} z_{j,2} \partial_{z_{j,2}}, \\
D_2 &= f_2(z) \overline{f}_2(\partial) = \left(\sum_{j=1}^{n} z_{j,1} z_{j,2} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_{z_{j,1}} \partial_{z_{j,2}} \right).
\end{aligned}$$

定理 18 $\lambda = (l_{11}, l_{12}, l_2)$, $\mu = (m_{11}, m_{12}, m_2)$ に対して, K-不変式, 2 項係数, K-不変微分作用素は次のように与えられる.

$$\begin{aligned}
p_\lambda(z, \overline{z}) &= \frac{1}{\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2, l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\min\{l_{11}, l_{12}\}} (-1)^{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-l_2-j}{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-2j}{l_{12}-j} \\
&\quad \cdot \frac{(l_{11}+l_{12}-2l_2)^{\underline{j-l_2}}}{(l_{11}+l_{12}-2l_2+n-2)^{\underline{j-l_2}}} q_{11}^{l_{11}-j} q_{12}^{l_{12}-j} q_2^{j}, \\
\binom{\mu}{\lambda} &= \frac{1}{\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2, l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2} \sum_{j=l_2}^{\min\{l_{11}, l_{12}\}} (-1)^{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-l_2-j}{j-l_2} \binom{l_{11}+l_{12}-2j}{l_{12}-j} \\
&\quad \cdot \frac{(l_{11}+l_{12}-2l_2)^{\underline{j-l_2}}}{(l_{11}+l_{12}-2l_2+n-2)^{\underline{j-l_2}}} (m_{11}-j)^{\underline{l_{11}-j}} (m_{12}-j)^{\underline{l_{12}-j}} \\
&\quad \cdot (m_{11}+m_{12}-m_2+n-1)^{\underline{j}} m_2^{\underline{j}},
\end{aligned}$$

$$p_\lambda(z,\partial)=\frac{1}{\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2,l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2}\sum_{j=l_2}^{\min\{l_{11},l_{12}\}}(-1)^{j-l_2}\binom{l_{11}+l_{12}-l_2-j}{j-l_2}\binom{l_{11}+l_{12}-2j}{l_{12}-j}$$
$$\cdot\frac{(l_{11}+l_{12}-2l_2)^{\underline{j-l_2}}}{(l_{11}+l_{12}-2l_2+n-2)^{\underline{j-l_2}}}\prod_{a=j}^{l_{11}-1}(D_{11}-a)\prod_{b=j}^{l_{12}-1}(D_{12}-b)$$
$$\cdot\prod_{c=0}^{j-1}(D_2-c(D_{11}+D_{12})+c^2-(n-1)c),$$

ただし, $f_{(l_{11}+l_{12}-l_2,l_2)}=f_{11}^{l_{11}+l_{12}-2l_2}f_2^{l_2}$ である.

この場合でも, 各式の分母の因子 $\|f_{(l_{11}+l_{12}-l_2,l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2$ が $\|f_{(l_{11},l_{12},l_2)}\|_{\mathcal{F}}^2$ でないことに注意する.

注意 19 前節とこの節の作用に関する 2 項係数は [Kn3] において, 命題 4 に基づき最高次項を決定し零点を示すことで与えられている. また, このことにより, 不変式も与えられていることになるが, 本稿のような 2 項係数の明示的な与えられ方はなされていない.

この作用についても, Hermite 型の作用の極大可換部分空間に当たるものを考える. そのために, 次の記号を導入する.

$$\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{n,1} & z_{n,2}\end{bmatrix}:=\left(\begin{pmatrix} z_{1,1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ z_{n,1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} z_{1,2}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ z_{n,1}\end{pmatrix}\right). \tag{6,2}$$

これを用いて, 以下のような集合を考える.

$$M_1:=\left\{\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{n,1} & z_{n,2}\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^n\oplus(\mathbb{C}^n)^*\,;\,z_{1,1},z_{1,2},z_{n,1},z_{n,2}\in\mathbb{R}\right\}, \tag{6,3}$$
$$\Omega:=\{v=(v_1,v_2)\in\mathbb{C}^n\oplus(\mathbb{C}^n)^*\,;\,f_2(v)\neq 0\}, \tag{6,4}$$
$$\begin{aligned}M_0&:=\left\{\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{n,1} & z_{n,2}\end{bmatrix}\in M_1\cap\Omega\,;\,z_{1,1}^2z_{1,2}^2-z_{n,1}^2z_{n,2}^2=0\right\}\\ &=\left\{\begin{bmatrix} r_1\cos\theta & \pm r_2\sin\theta \\ r_1\sin\theta & \pm r_2\cos\theta\end{bmatrix}\,;\,r_1,r_2>0,\,\theta\notin\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right\}.\end{aligned} \tag{6,5}$$

この場合も, 作用 (K,V) は M_1,M_0 をともに slice にもつ強可視的な作用であり, $K\cdot M_1=V$, $K\cdot M_0=\Omega$ が成り立つ. この M_1 に対して, $N_K(M_1)$, $Z_K(M_1)$, $N_K(M_1)$ を第 3 節と同様に定義すると, $N_K(M_1)$ は次の意味で $\mathrm{O}(2)\times\{\pm1\}$ と同一視される.

$$(g,(-1)^\epsilon)\cdot\begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} \\ z_{n,1} & z_{n,2}\end{bmatrix}=g\begin{bmatrix} (-1)^\epsilon z_{1,1} & z_{1,2} \\ (-1)^\epsilon z_{n,1} & z_{n,2}\end{bmatrix}.$$

また, $N_K(M_0)$, $\widetilde{W}_K(M_0)$ を第3節と同様に定義すると, $\widetilde{W}_K(M_0)$ は次のようにして $\{\pm 1\}$ と同一視される.

$$(-1)\cdot(l_{11}, l_{12}, l_{11}+l_{12}-2l_2) = (l_{11}, l_{12}, -(l_{11}+l_{12}-2l_2)).$$

命題 20 (1) $(\mathcal{P}(V)\otimes\overline{\mathcal{P}(V)})^K \simeq \mathbb{C}[M_1]^{W_K(M_1)}$,
(2) $\widetilde{W}_K(M_0)$ は命題4と一致する.
(3) M_0 は M_1 を実 vector 空間として生成する.

注意 21 $n=2$ のとき, この節の結果は前節の結果と (5,1)~(5,5), (6,1)~(6,5) を除いて一致している. これは, 作用 $(\mathbb{T}^2\times SU(2), \mathbb{C}^2\oplus\mathbb{C}^2)$ と $(\mathbb{T}^2\times SU(2), \mathbb{C}^2\oplus(\mathbb{C}^2)^*)$ が同値となるからである.

References

[BR1] C. Benson and G. Ratcliff, A classification of multiplicity-free actions, J. Algebra 181, (1996), 152–186.

[BR2] C. Benson and G. Ratcliff, On multiplicity free actions, *Representations of Real and p-adic Groups*,, Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci., Natl. Univ. Singapole, 2, Singapole Univ. Press, Singapole, 2004.

[FK1] J. Faraut and A. Koranyi, Function spaces and reproducing kernels on bounded symmetric domains, J. Funct. Anal. 88, (1990), 64–89.

[FK2] J. Faraut and A. Koranyi, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford Sci. Publ., Oxford, 1994.

[GW] R. Goodman and N. R. Wallach, *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[H] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press. San Diego, 1978.

[HU] R. Howe and T. Umeda, The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions, Math. Ann., 290, (1991), 565–619.

[J] K. Johnson, On a ring of invariant polynomials on a Hermitian symmetric space, J. Algbera 67, (1980), 72–81.

[Ka] V. G. Kac, Some remarks on nilpotent orbits, J. Algebra 64, (1980), 190–213.

[Kn1] F. Knop, Some remarks on multiplicity free spaces, *Representation Theories and Algebraic Geometry*, 301–317, Nato Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 514, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1998.

[Kn2] F. Knop, Construction of commuting difference operators for muliplicity free spaces, Sel. Math., N.S. 6, (2000), 443–470.

[Kn3] F. Knop, Semisymmetric polynomials and the invariant theory of matrix vector pairs, Representation Theory 5 (2001), 224–266.

[Ko1] T. Kobayashi, Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity, Acta Appl. Math. 81 (2004), 129-146.

[Ko2] T. Kobayashi, Multiplicity-free representations and visible actions on complex manifolds, Publ. RIMS 41, (2005), 497–549.

[Ko3] T. Kobayashi, Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs, to appear in Progr. Math., Birkhäuser, Preprint RIMS 1549, June 2006.

[KT] K. Koike and I. Terada, Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type B_n, C_n, D_n, J. Algebra 107, (1987), 466-511.

[L] A. Leahy, A Classification of multiplicity free representations, J. Lie Theory 8 (1998), 367–391.

[OO] A. Okounkov and G. Olshanski, Shifted Jack polynomials, binomial formula, and applications, Math. Res. Letters 4, (1997), 69–78.

[Sas] 笹木 集夢, 「既約な multiplicity-free 空間における可視的作用」, 本講究録に掲載予定.

[Sat] I. Satake, *Algebraic Structures of Symmetric Domains*, Iwanami Shoten Publ. and Princeton Univ. Press, Tokyo, 1980.

[Sch] W. Schmid, Die Randwerte holomorpher Funktionen auf hermitesch symmetrischen Räumen, Invent. Math. 9, (1969), 61–80.

[Se] J. Sekiguchi, Zonal spherical functions on some symmetric spaces, Publ. RIMS 12 suppl., (1977), 455-464.

[U] H. Upmeier, Jordan algebras and harmonic analysis on symmetric spaces, Amer. J. Math. 108 (1986), 1–25.