RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B7**
(2008), 137–143

ふたつの隠れた対称性を持つ、連続パラメータを持つユニタリ表現の一例*†

A continuous family of unitary representations with two hidden symmetries – an example

京都大学数理解析研究所　真野元 (Gen MANO)
RIMS, Kyoto University,
gmano@kurims.kyoto-u.ac.jp

概要

We consider a continuous family of unitary representations $\{\pi_{m,\lambda} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ of $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ on $L^2(\mathbb{R}^m)$. Special values of this family contain the Weil representation of the metaplectic group ($\lambda = \frac{1}{2}$), the minimal representation of the conformal group ($\lambda = 1$) as their hidden symmetries respectively, and Kostant's realization of unitary highest weight modules of $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ ($m = 1$).

Mathematics Subject Classifications (2000): Primary 22E46; Secondary 22E30, 35P99.

1 はじめに

パラメータ $\lambda \in \mathbb{R}$ を持つ $\mathbb{R}^m$ 上の偏微分作用素

$$\mathcal{D}_{m,\lambda} := |x|^2 - \Delta_{\mathbb{R}^m} - \frac{4\lambda^2 - 1}{|x|^2}\left(\Delta_{S^{m-1}} - \left(\frac{m-2}{2}\right)^2\right) \tag{1.0.1}$$

$$= r^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{m-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\left(4\lambda^2\Delta_{S^{m-1}} + (1-4\lambda^2)\left(\frac{m-2}{2}\right)^2\right) \tag{1.0.2}$$

を考えよう。ここで、$\Delta_{\mathbb{R}^m}, \Delta_{S^{m-1}}$ は $\mathbb{R}^m, S^{m-1}$ 上の Laplace-Beltrami 作用素、$\mathbb{R}_+ \times S^{m-1} \to \mathbb{R}^m, (r, \omega) \mapsto r\omega$ は $\mathbb{R}^m$ の極座標である。

ただちにわかることは、

- $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ のときには、$\mathcal{D}_{m,\lambda}$ は Hermite 作用素になる。

---

* 京都大学数理解析研究所における研究集会「表現論と等質空間上の解析学」(Representation Theory and Analysis on Homogeneous Spaces) 2006 年 8 月 21 日～8 月 24 日（研究代表者：関口英子氏）における講演記録.

† This paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.
Received October 31, 2006.

- $\mathcal{D}_{m,\lambda}$ は $L^2(\mathbb{R}^m)$ の中で、形式的に自己共役である。
- $\lambda \neq 0$ なら $\mathcal{D}_{m,\lambda}$ は楕円型作用素であるが、$\lambda = 0$ のときは、$\mathcal{D}_{m,\lambda}$ の表象が退化してしまう。

ところが、実はさらに次の事を証明することができる。

定理 1.1. 1) **$\mathcal{D}_{m,\lambda}$ は $L^2(\mathbb{R}^m)$ 上の自己共役な作用素である。**

2) **$\mathcal{D}_{m,\lambda}$ のスペクトラムは離散的であり、その重複度は $\lambda \neq 0$ のときは有限で、すべて具体的に決定できる。さらに、$\lambda = 0$ のときは無限である。**

この定理については、用語を定義してから、あとでもう一度触れることにする。

この結果を $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の表現論から説明することが本稿の目的のひとつである。そのために、まず以下の作用素の三つ組を定義しよう。

$$
\begin{aligned}
\tilde{h}_{m,\lambda} &:= E_x + \frac{m}{2} = r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{m}{2} \\
\tilde{e}_{m,\lambda} &:= \frac{\sqrt{-1}}{2}|x|^2 = \frac{\sqrt{-1}}{2}r^2 \\
\tilde{f}_{m,\lambda} &:= \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}(4\lambda^2\Delta_{S^{m-1}} + (1-4\lambda^2)(\frac{m-2}{2})^2)\right).
\end{aligned}
\tag{1.0.3}
$$

すると、次のことがわかる。

- $\{\tilde{h}_{m,\lambda}, \tilde{e}_{m,\lambda}, \tilde{f}_{m,\lambda}\}$ は sl_2-triple をなす。
- $\mathcal{D}_{m,\lambda} = \frac{2}{\sqrt{-1}}(\tilde{e}_{m,\lambda} - \tilde{f}_{m,\lambda})$ が成り立つ。

この sl_2-triple に関する問題で、われわれの定理 1.1 にも関連しているものは次の問題である。

問題. *sl_2-triple* $\{\tilde{h}_{m,\lambda}, \tilde{e}_{m,\lambda}, \tilde{f}_{m,\lambda}\}$ **はいつ $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ の（ユニタリ）表現に持ち上がるか？**

2 動機

前節の問題を考える動機を二つの観点から簡単に述べよう。

1. 異なる群の異なる表現が同じ関数空間に実現されているとき、それらを補間できないか？

sl_2-triple (1.0.3) は、$\lambda = \frac{1}{2}, 1$ のときには、$SL(2,\mathbb{R})$ を含むより大きな群が隠れた対称性 (*hidden symmetry*) として $L^2(\mathbb{R}^m)$ に作用している。すなわち、メタプレクティック群 $Mp(m,\mathbb{R})$ の Weil 表現と共形変換群 $SO_0(m+1,2)$（m が偶数のときには、二重被覆を取る）の極小表現を、ともに同じ関数空間 $L^2(\mathbb{R}^m)$ に実現することができるが (Schrödinger モデルと呼ばれる)、それぞれ $SL(2,\mathbb{R})$ と同型な部分群に表現を制限してそのリー環の作用を計算すると、(1.0.3) でそれぞれ $\lambda = \frac{1}{2}, 1$ としたときの作用が現れる。

そこで、$Mp(m,\mathbb{R})$ の Weil 表現と $SO_0(m+1,2)$ の極小表現を補間できないか考えてみる。この二つの表現の Gelfand-Kirillov 次元は同じ m であるが、群自身の次元はそれぞれ、

$m(2m+1)$, $\frac{(m+2)(m+3)}{2}$ であるので異なっている。各群の sl_2-triple に制限することによって、次元の異なる群どうしの表現が補間できることは明らかなことではない。

2. パラメータ付きの表現を同じ関数空間に実現できないか？

B. Kostant [7] は 2000 年に、$\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ の連続パラメータを持つ既約最高ウェイト表現を、パラメータとは独立な**同じ関数空間** $L^2(\mathbb{R}_+)$ に実現した。微分作用素 (1.0.3) は、$m=1$ のとき、（変数変換をすることにより）彼の扱った微分作用素と一致するので、われわれの問題は彼の構成の一般化に関する問題と考えることができる。

3 主定理

3.1 admissibility と discrete decomposability

問題に対する解答を述べるために、まず、「離散的」分岐則に関する用語や記号の準備をしておくことにしよう。

定義 3.1 ([3, §1], [4, Definition 1.1] 参照). (π, X) を（一般の）$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群とする。

1) （解析的定義）すべての $\tau \in \hat{K}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_K(\tau,\pi) < \infty$ が成り立つとき、*K-admissible* であるという。

2) （代数的定義） $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群 X が部分加群によるフィルターづけ $X = \sum_{j=0}^{\infty} X_j$, $\{0\} = X_0 \subset X_1 \subset \cdots$ を持ち各商空間 $X_j/X_{j-1}, j=1,2,\cdots$ が $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 加群として有限の長さを持つとき、$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群 X は *discretely decomposable* であるという。

上の定義 (2) では、無限の重複度も許し、表現のユニタリ性を仮定していないことに注意する。

以後は、

$$\begin{aligned} G &:= \widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) \quad (SL(2,\mathbb{R}) \text{ の普遍被覆群}), \\ \mathfrak{g} &:= \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \quad (G \text{ のリー環}), \\ K &:= \widetilde{SO}(2) \quad (SO(2) \text{ の普遍被覆群}) \end{aligned}$$

として、この用語を用いることにする。

3.2 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-加群 $\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$

$C^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ の部分空間 $\mathcal{H}_K^{m,\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}$ を、

$$\mathcal{H}_K^{m,\lambda} := \mathbb{C}\text{-span}\{e^{-\frac{r^2}{2}} r^j L_j^{(m-2+2l)\lambda}(r^2)\phi(\omega) : j, l \in \mathbb{N}, \phi \in \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^m)\} \tag{3.2.1}$$

によって定める。ここで、

$$L_j^\alpha(x) := \frac{x^{-\alpha}e^x}{j!}\frac{d^j}{dx^j}(e^{-x}x^{j+\alpha})$$

は Laguerre 多項式である。Laguerre 多項式系 $\{L_j^\alpha(x) : j \in \mathbb{N}\}$ は、$\alpha > -1$ ならば、$L^2(\mathbb{R}_+, x^\alpha e^{-x}dx)$ の中で完全直交基底をなす（例えば、[1, **II**, Chapter X] 参照)。この事実を使うことにより、次の補題を示すことができる。

補題 3.2. $m = 1, -1 < \lambda < 1$ もしくは $m \geq 2, \lambda \geq 0$ ならば、$\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ は $L^2(\mathbb{R}^m)$ の中で稠密である。

いま、

$$h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

によって $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の基底を定め、写像 $P_{m,\lambda} : U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \to \mathrm{Diff}(C^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}))$ を

$$P_{m,\lambda}(h) := \tilde{h}_{m,\lambda}, \quad P_{m,\lambda}(e) := \tilde{e}_{m,\lambda}, \quad P_{m,\lambda}(f) := \tilde{f}_{m,\lambda}$$

によって定義すると、部分空間 $\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ は $P_{m,\lambda}(\mathfrak{g})$ 不変であることがわかる（Laguerre 多項式に関する微分方程式や漸化式を使う)。より正確には、次のことが言える：

補題 3.3. 1) $\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ は $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)$-加群である。

2) $\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ は $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)$-加群として *discretely decomposable* である。

3) さらに、$m = 1$ もしくは $m \geq 2, \lambda \neq 0$ ならば、$\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ は *K-admissible* である。

3.3 $\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ のユニタリ化可能性に関する定理

表現論の用語を準備した上で、第 1 節の問題を定式化し直してみよう。

問題 (精密化、再定式). $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)$-加群 $\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ は、いつ G のユニタリ表現に延びるか？

答えは次の定理によって与えられる。

主定理. (m, λ) に関する以下の *5* つの条件は同値である：

1) （解析的） $P_{m,\lambda}$ は G のユニタリ表現に延びる。

2) （解析的） $P_{m,\lambda}$ は *underlying* $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)$-加群が $\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ になるような $L^2(\mathbb{R}^m)$ 上のユニタリ表現 $\pi_{m,\lambda}$ に延びる。

3) （代数的） $P_{m,\lambda}$ の各既約成分は G の表現としてユニタリ化可能である。

4) （複素解析的） $P_{m,\lambda}$ は、G の複素化 $G_\mathbb{C}$ の複素部分多様体 G_+ 上の複素解析的半群に延びる。ここで、

$$G_+ := G\exp(\mathfrak{k}_+)G \subset G_\mathbb{C}, \quad \mathfrak{k}_+ := \{a\frac{e-f}{\sqrt{-1}} : a > 0\} \subset \sqrt{-1}\mathfrak{g}.$$

5) $m = 1, -1 < \lambda < 1$ もしくは、$m \geq 2, \lambda \geq 0$.

さらに、この条件が成り立つとき、$(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)$-加群 $\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ は無限個の既約成分の直和に分解する。

注意 3.4. 定理 *1.1(1)* は、主定理より、*(2)* は補題 *3.3(2), (3)* より従うことがわかる。

4 証明の方針

補題 3.3(1) により、$C^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ の部分空間 $\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ は $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)$-加群であることがわかるが、直交群 $O(m)$ の $\mathbb{R}^m$ への自然な作用の引き戻しにより、$\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ は $O(m)$-加群でもあるので（定義式 (3.2.1) よりほぼ明らか)、特に $\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ は $\mathfrak{o}(m)$ （$O(m)$ のリー環）加群になっている。

$\mathfrak{g}$ の作用 (1.0.3) は、すべて $\mathfrak{o}(m)$ 不変であるので、$\mathfrak{g}$ の $\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ への作用と、$\mathfrak{o}(m)$ の $\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ への作用は互いに可換である。

さて、証明の鍵となるのは、次の補題である。

補題 4.1. **$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{o}(m)$-加群として、$\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ は以下のように、重複度自由に分解する：**

$$\bigoplus_{l=0}^{\infty} \pi_{(m-2+2l)\lambda} \otimes \mathcal{H}^l(\mathbb{R}^m). \tag{4.0.1}$$

ここで、π_ν は G の最高ウェイト表現で、その K-type が $\{\nu+1, \nu+3, \nu+5, \cdots\}$ になっているようにパラメータ $\nu \in \mathbb{R}$ を正規化している。また、(4.0.1) 中の $\mathcal{H}^l(\mathbb{R}^m)$ は S^{m-1} 上の次数 l の球面調和関数の空間で、次式で定義される：

$$\mathcal{H}^l(\mathbb{R}^m) := \{\phi \in C^\infty(S^{m-1}) : \Delta_{S^{m-1}}\phi = -l(m-2+l)\phi\}.$$

注意 4.2. **π_ν のパラメータ ν の特殊値をいくつか以下に挙げておこう（例えば *Pukánszky[8]* 参照。ただし、*[8]* のパラメータ l とわれわれのパラメータ ν の関係は $\nu = 2l-1$ である)：**

- $\nu > -1$: **G の表現としてユニタリ化可能。**
- $\nu = -1$: *first reduction point.*
- $\nu > 0$: **離散系列表現。**
- $\nu = 0$: **離散系列表現の極限。**
- $\nu = \pm\frac{1}{2}$: **$Mp(1,\mathbb{R})$（つまり $SL(2,\mathbb{R})$ の二重被覆群）の *Weil* 表現の既約成分。**

注意 4.3. **$\mathcal{H}_K^{m,\lambda}$ には $\mathfrak{g}$ の *Casimir* 作用素 $\Omega_\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{o}(m)$ の *Casimir* 作用素 $\Omega_{\mathfrak{o}(m)}$ がそれぞれ作用しているが、それらの間には一次式の関係がある。具体的には、それぞれのリー環に対して適当に *Killing* 形式を定義することにより、**

$$\Omega_\mathfrak{g} = \lambda^2\left(4\Omega_{\mathfrak{o}(m)} + (m-2)^2\right) - 1$$

と表わすことができる。補題 *4.1* 中の重複度自由の分解公式 (4.0.1) は、この関係式に対応しているといえる。

5 3つの特殊値

5.1 $\lambda = \frac{1}{2}$ のとき（Weil 表現、Hermite 半群）

$\lambda = \frac{1}{2}$ のとき、主定理 (4) の複素解析的結果は、Hermite 半群と呼ばれ、その生成元は Hermite 作用素 $\mathcal{D}_{m,\frac{1}{2}}$ （第 1 節参照）によって与えられる。

第 2 節でも述べたように、$\lambda = \frac{1}{2}$ のときの sl_2-triple の作用は、メタプレクティック群 $Mp(m,\mathbb{R})$ の Weil 表現の Schrödinger モデルを隠れた対称性として持つが、Hermite 半群と Weil 表現との密接な関係は、R. Howe [2] が最初に指摘した。

5.2 $\lambda = 1, m \geq 2$ のとき（共形変換群の極小表現）

$\lambda = \frac{1}{2}$ の場合と同じく、$\lambda = 1$ のときの主定理 (4) の複素解析的半群は $\mathcal{D}_{m,1}$ によって生成される。この半群は、[6] によって扱われ、共形変換群 $SO_0(m+1,2)$ の極小表現の Schrödinger モデル上で解析を行う際、中心的な役割を果たした（より詳しくは [5, 6] を参照)。

5.3 $m = 1$ のとき（Kostant の例）

$m = 1$ のときには、$O(1)$ 分解

$$L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})^{\mathrm{even}} \bigoplus L^2(\mathbb{R})^{\mathrm{odd}}$$

に応じて、主定理 (2) の $\pi_{m,\lambda}$ は、

$$\pi_{1,\lambda} = \pi_{-\lambda} \bigoplus \pi_\lambda$$

のように分解する。ここで、

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R})^{\mathrm{even}} &:= \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f(-x) = f(x)\} \quad \text{（偶関数の空間）} \\ L^2(\mathbb{R})^{\mathrm{odd}} &:= \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f(-x) = -f(x)\} \quad \text{（奇関数の空間）} \end{aligned}$$

である。定義域の制限写像 $f \mapsto f|_{\mathbb{R}_+}$ は $L^2(\mathbb{R})^{\mathrm{even}}, L^2(\mathbb{R})^{\mathrm{odd}}$ 上それぞれ全単射であるので、$\pi_{-\lambda}, \pi_\lambda$ はそれぞれ $L^2(\mathbb{R}_+)$ 上に実現することができる。これは（変数変換 $x \mapsto x^2$ を除いて)、Kostant[7] が構成した $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ の最高ウェイト表現の実現と一致する。リー環 $\mathfrak{g}$ の $C^\infty(\mathbb{R}^m \backslash \{0\})$ への作用は (1.0.3) より $d\pi_{-\lambda}, d\pi_\lambda$ どちらも同じ、したがって infinitesimal character も同じであるが、$(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, K)$-加群の構造が異なるため、$G$ の表現 $\pi_{-\lambda}, \pi_\lambda$ は同値ではないことに注意しよう。

参考文献

[1] A. Erdélyi et al., *Higher Transcendental Functions* **I**, **II**, McGraw-Hill, New York, 1953.

[2] R. Howe, The oscillator semigroup, Amer. Math. Soc., Proc. Symp. Pure Math., **48** (1988), 61–132.

[3] T. Kobayashi, Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications, *Invent. Math.*, **117** (1994), 181–205.

[4] T. Kobayashi, Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications III. Restriction of Harish-Chandra modules and associated varieties, *Invent. Math.*, **131** (1997), 229–256.

[5] T. Kobayashi and G. Mano, Integral formulas for the minimal representation of $O(p,2)$. *Acta Appl. Math.*, **86** (2005), 103–113.

[6] T. Kobayashi and G. Mano, The inversion formula and holomorphic extension of the minimal representation of the conformal group, in Harmonic Analysis, Group Representations, Automorphic Forms and Invariant Theory: In honor of Roger E. Howe (eds. J.-S. Li, E.-C. Tan, N. Wallach, and C.-B. Zhu), Singapore University Press and World Scientific Publishing, 2007, 159–223.

[7] B. Kostant, On Laguerre polynomials, Bessel functions, Hankel transform and a series in the unitary dual of the simply-connected covering group of $Sl(2,\mathbb{R})$, *Representation Theory*, 4 (2000), 181–224.

[8] L. Pukánszky, The Plancherel formula for the universal covering group of $SL(2,\mathbb{R})$, *Math. Ann.*, **156** (1956), 96–143.

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo
current address: gmano@ms.u-tokyo.ac.jp