RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B7**
(2008), 145–156

Jacquet modules of principal series generated by the trivial K-type

東京大学・数理科学研究科　阿部 紀行 (Noriyuki Abe)
Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo

Abstract. Casselman introduced the Jacquet module $J(U)$ of U for an admissible representation U of a semisimple Lie group G. In this paper, we investigate the structure of $J(U)$ when U is a principal series representation.

1. Jacquet 加群

G を半単純 Lie 群とし，$P = MAN$ を極小放物型部分群とその Langlands 分解とする．G の admissible 表現 U に対し，U から主系列表現 $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma\otimes\lambda)$ への準同型写像がどのくらいあるかという問題を考えよう．Casselman により，次の定理が知られている．

事実 1.1 (Casselman, 大島). U が既約であるとする．この時，ある M の既約表現 σ と A の既約表現 λ が存在し，$\mathrm{Hom}_G(U,\mathrm{Ind}_P^G(\sigma\otimes\lambda)) \neq 0$.

つまり，少なくとも一つは非自明な準同型写像が存在する．一般に，X を P の表現で N が自明に作用するものとする．この時，Frobenius 相互律により $\mathrm{Hom}_G(U,\mathrm{Ind}_P^G(X)) \simeq \mathrm{Hom}_P(U,X)$ である．更に，N は X に自明に作用するのであるから，$\mathrm{Hom}_P(U,X) \simeq \mathrm{Hom}_{MA}(U/\mathfrak{n}U,X)$ が成り立つ[*1]．ただし，ここで $\mathfrak{n}$ は N の Lie 環の複素化である．よって，主系列表現への準同型写像を求める問題は，$U/\mathfrak{n}U$ の構造を求めることと同等である．

ただし，よく知られている通り関手 $U \mapsto U/\mathfrak{n}U$ は（右完全ではあるが，）完全ではない．そこで，より homology 代数的に扱いやすい Jacquet 加群が次のように定義さ

abenori@ms.u-tokyo.ac.jp 日本学術振興会特別研究員 (DC1)
2000 Mathematics Subject Classification: 22E47.
This paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.
Received October 30, 2006.
[*1] 少し乱暴な議論である．U を Harish-Chandra 加群（有限の長さを持つ $(\mathfrak{g},K)$-加群）とし，すべて $(\mathfrak{g},K)$ 加群の圏で考えれば正確になる．

れる．G の Lie 環の複素化を $\mathfrak{g}$ とおき，$\mathfrak{g}$ の普遍包絡環を $U(\mathfrak{g})$ と書くことにする．同じ記法をその他の Lie 群に対しても用いる．また，一般に Lie 環 $\mathfrak{h}$ の表現 V に対し，$V_{\mathfrak{h}\text{ 有限}} = \{v \in V \mid \dim U(\mathfrak{h})v < \infty\}$ とおく．

定義 1.2 (**Casselman**)**.** U を $U(\mathfrak{g})$ 加群とする．この時，$U(\mathfrak{g})$ 加群 $\widehat{J}(U)$ と $J(U)$ を次のように定義する．

$$\widehat{J}(U) = \varprojlim_k U/\mathfrak{n}^k U,$$
$$J(U) = \widehat{J}(U)_{\mathfrak{a}\text{ 有限}}.$$

$J(U)$ を U の Jacquet 加群という．また，J を Jacquet 関手と呼ぶ．

J は次の性質を満たすことが知られている．

事実 1.3. (1) $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ を Harish-Chandra 加群からなる短完全系列とする．この時，$0 \to J(V_1) \to J(V_2) \to J(V_3) \to 0$ も完全である．
(2) Harish-Chandra 加群 U に対し，$H_p(\mathfrak{n}, U)$ と $H_p(\mathfrak{n}, J(U))$ は自然に同型となる．

特に $H_0(\mathfrak{n}, U) \simeq U/\mathfrak{n}U$ であるから，$U/\mathfrak{n}U$ は $J(U)/\mathfrak{n}J(U)$ と自然に同型となる．従って，次の問題を考える．

問題. Harsh-Chandra 加群 U に対し，$J(U)$ を求めよ．

K を G の極大コンパクト部分群とする．本論では，U が自明な K-type で生成される主系列表現の場合に $J(U)$ を考察する．

2. 自明な K-type で生成される主系列表現の Jacquet 加群

最初に以下で使う記号について述べておく．一般に $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V に対し，V^* でその $\mathbb{C}$ 上の代数的な双対空間を表すことにする．$\mathfrak{a}$ 上の非退化双一次形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を Killing 形式により定める．Σ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に関する制限 root 系とし，Σ^+ を N により定まる正 root の集合とする．$\mathcal{P}^+$ を Σ^+ の非負整数結合全体のなす集合とし，$\mathcal{P}^{++} = \mathcal{P}^+ \setminus \{0\}$ とおく．W を Σ の Weyl 群とし，その位数を r とする．また，$\rho = \sum_{\alpha\in\Sigma^+}(\dim \mathfrak{g}_\alpha/2)\alpha$ とおく．ただし，$\mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathfrak{a}$ の root 空間である．

Jacquet modules of principal series generated by the trivial K-type

$\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対し，

$$U(\lambda) = \mathrm{Ind}_P^G(1 \otimes \lambda)_{K\text{ 有限}} =$$
$$\{f \in C^\infty(G)_{K\text{ 有限}} \mid f(gman) = e^{-(\lambda+\rho)(\log a)} f(g) \ \ (g \in G, m \in M, a \in A, n \in N)\}$$

とおく．$U(\lambda)$ は自明な K-type を重複度 1 で含むが，更に $\mathrm{Re}\,\lambda$ が支配的（全ての $\alpha \in \Sigma^+$ に対し $\langle \alpha, \mathrm{Re}\,\lambda \rangle \geq 0$）である時，$U(\lambda)$ はその自明な K-type により $U(\mathfrak{g})$ 加群として生成される．

以下，本論では $\mathrm{Re}\,\lambda$ が支配的である時を扱うことにする．この時は，他の場合に比べ扱いが簡単になることを $G = SL(2,\mathbb{R})$ の場合に見てみよう．まず，無限小指標の比較から，$U(\lambda)$ からの準同型写像は $U(\lambda)$ 自身か $U(-\lambda)$ にしかないことに注意する．

λ が整でないか，$\lambda/2$ が整な時は，$U(\lambda)$ と $U(-\lambda)$ は既約になり，主系列表現への準同型写像は $U(\lambda)$ から $U(\lambda)$ への定数倍か，$U(\lambda)$ から $U(-\lambda)$ への同型写像しかないことがわかる．よって，$\dim U(\lambda)/\mathfrak{n}U(\lambda) = 2$ である．

λ は整で，$\lambda/2$ が整ではないとする．この時，$U(\lambda)$ の構造は次の通り．

- λ が支配的ならば正則離散系列及び反正則離散系列を部分表現として含み，それらの直和による商は有限次元既約表現となる．
- λ が反支配的ならば，有限次元既約表現を部分表現として含み，それによる商は正則離散系列と反正則離散系列の直和となる．

λ が支配的であるとしよう．上で述べた構造から，$U(\lambda)$ から $U(\lambda)$ への準同型写像は定数倍しかなく，$U(\lambda)$ から $U(-\lambda)$ への準同型写像は，$U(\lambda)$ から有限次元表現への射影と，有限次元表現から $U(-\lambda)$ への埋め込み写像の合成しかない．よって，$\dim U(\lambda)/\mathfrak{n}U(\lambda) = 2$ となる．一方，λ が反支配的であるとすると，$U(\lambda)$ から $U(\lambda)$ への準同型写像はやはり定数倍しかないが，$U(\lambda)$ から $U(-\lambda)$ への準同型写像は 2 次元あることがわかる．従って，この場合は $\dim U(\lambda)/\mathfrak{n}U(\lambda) = 3$ となる．つまり，λ が支配的である限り $U(\lambda)/\mathfrak{n}U(\lambda)$ の次元は変わらないが，そうでない時は次元が突然あがったりするのである．

λ が支配的である時，以上の考察は一般にも成り立つ．つまり，$\dim U(\lambda)/\mathfrak{n}U(\lambda) = r$ となることが知られている[*2]．この時，Jacquet 加群 $J(U(\lambda))$ は一般 Verma 加群により表される．そのことを述べる前に，一般 Verma 加群を定義する．P の Langlands 分解と整合性

[*2] ただし，$J(U(\lambda))$ の計算自体は他にも応用があるため，無駄なことではない．節 3 参照．

がとれるような Cartan 対合 θ を固定し[*3]，$\overline{\mathfrak{n}}=\theta(\mathfrak{n})$，$\overline{\mathfrak{p}}=\theta(\mathfrak{p})$ とおく．

定義 2.1. $\mu\in\mathfrak{a}^*$ に対し，一次元 $\overline{\mathfrak{p}}$ 表現 $\mathbb{C}_\mu$ を $(H+X)v=\mu(H)v$ ($H\in\mathfrak{a}$, $X\in\mathfrak{m}\oplus\overline{\mathfrak{n}}$, $v\in\mathbb{C}_\mu$) により定義する．更に，$U(\mathfrak{g})$ 加群 $M(\mu)$ を $M(\mu)=U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\overline{\mathfrak{p}})}\mathbb{C}_{\mu+\rho}$ と定義する．$M(\mu)$ を一般 Verma 加群という．

この時，次の定理が成り立つ．

定理 2.2 ([Abe06] **Theorem 4.5**)**.** ある部分加群の列 $J(U(\lambda))=V_1\supset V_2\supset\cdots\supset V_{r+1}=0$ で，$V_i/V_{i+1}\simeq M(w_i\lambda)$ なるものが存在する．ただし，$\{w_1,\dots,w_r\}=W$.

完全系列

$$0\longrightarrow V_{i+1}\longrightarrow V_i\longrightarrow M(w_i\lambda)\longrightarrow 0$$

がいつ分裂するかは興味ある問題である．次の定理は部分的な解答を与える．$1\le i\le r$ に対し，$\mathcal{W}(i)=\{j\mid w_i\lambda-w_j\lambda\in 2\mathcal{P}^+\}$ とおく．

定理 2.3 ([Abe06] **Thorem 3.9, Theorem 4.1**)**.** 全ての単位元でない $w\in W$ に対し $w\lambda\neq\lambda$ であるとする．この時，$J(U(\lambda))$ の生成元 $\{v_1,v_2,\dots,v_r\}$ で，すべての $H\in\mathfrak{a}$ と $X\in\mathfrak{m}\oplus\overline{\mathfrak{n}}$ に対し

$$(H+X)v_i\in(w_i\lambda+\rho)(H)v_i+\sum_{j\in\mathcal{W}(i)}U(\mathfrak{g})v_j$$

なるものが存在する．特に，全ての $w\in W$ に対し $\lambda-w\lambda\notin 2\mathcal{P}^+$ ならば，$J(U(\lambda))\simeq\bigoplus_{w\in W}M(w\lambda)$.

3. 反支配的な場合の主系列表現

応用として，λ が反支配的な場合の $U(\lambda)/\mathfrak{n}U(\lambda)$ について述べることとする．まずは，よく知られている次の事実を思いだそう．

事実 3.1. (1) Harish-Chandra 加群 U に対し，$J_{\overline{\mathfrak{n}}}((U^*)_{K\text{ 有限}})\simeq(J(U)^*)_{\mathfrak{a}\text{ 有限}}$ が成り立つ．ただし，$J_{\overline{\mathfrak{n}}}$ は $\overline{\mathfrak{n}}$ に関する Jacquet 関手である．

(2) $(U(\lambda)^*)_{K\text{ 有限}}\simeq U(-\lambda)$ が成り立つ．

[*3] つまり，$\mathfrak{a}$ が θ の固有値-1 の固有空間の極大可換部分代数となるように．

$\mathrm{Re}\,\lambda$ を反支配的とする．w_0 を $w_0(\Sigma^+) = -\Sigma^+$ なる Weyl 群の元とする．この時，

$$(J(U(\lambda))^*)_{\mathfrak{a}\text{ 有限}} = J_{\overline{\mathfrak{n}}}(U(-\lambda))$$

であるが，$U(-\lambda) \simeq \mathrm{Ind}^G_{\theta(P)}(1 \otimes (-w_0\lambda))$ であり，$\mathrm{Re}(-w_0\lambda)$ は $\overline{\mathfrak{n}}$ に関し支配的であるから定理を用いることができる．$\mathfrak{p}$ に関する一般 Verma 加群 $M_{\mathfrak{p}}(\mu)$ を次のように定義しよう．まず 1 次元 $\mathfrak{p}$ 表現 $\mathbb{C}_\mu$ を $(H+X)v = \mu(H)$（$H \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, $v \in \mathbb{C}_\mu$）と定義し，$M_{\mathfrak{p}}(\mu) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_{\mu-\rho}$ と定義する．この時，定理 2.2 から次が成り立つ．

系 3.2. $\mathrm{Re}\,\lambda$ が反支配的であるとする．この時，ある部分加群の列 $(J(U(\lambda))^*)_{\mathfrak{a}\text{ 有限}} = V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_{r+1} = 0$ で，$V_i/V_{i+1} \simeq M(-w_i\lambda)$ なるものが存在する．ただし，$\{w_1, \ldots, w_r\} = W$.

さて，主系列表現への準同型写像には $J(U(\lambda))/\mathfrak{n}J(U(\lambda))$ が対応するのであった．この空間の双対をとると，$(J(U(\lambda))/\mathfrak{n}J(U(\lambda)))^* \simeq \{x \in J(U(\lambda))^* \mid \mathfrak{n}x = 0\}$ となる．ここで，$\mathfrak{n}x = 0$ ならば x は $\mathfrak{a}$ 有限であることが知られているので，$(J(U(\lambda))^*)_{\mathfrak{a}\text{ 有限}}$ の中で，$\mathfrak{n}x = 0$ なる x を考えればよい．最も簡単な場合は次のようになる．

系 3.3. $\mathrm{Re}\,\lambda$ が反支配的であるとし，更に全ての $w \in W$ に対し $w\lambda - \lambda \notin 2\mathcal{P}^+$ であるとする．この時，

$$U(\lambda)/\mathfrak{n}U(\lambda) \simeq \bigoplus_{w \in W} \{x \in M_{\mathfrak{p}}(-w\lambda) \mid \mathfrak{n}x = 0\}^*$$

が成り立つ．

よって，主系列表現の間の準同型写像に関する問題は，この場合一般 Verma 加群の間の準同型写像に関する問題に帰着する．

4. $SL(2,\mathbb{R})$ の場合

4.1. 定理 2.2，2.3 の証明

定理 2.2 及び定理 2.3 を $G = SL(2,\mathbb{R})$ の場合に証明しよう．$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の基底 H, E_+, E_- を $[H, E_\pm] = \pm E_\pm$，$[E_+, E_-] = H$，$\mathfrak{a} = \mathbb{C}H$，$\mathfrak{n} = \mathbb{C}E_+$，$\theta(E_+) = -E_-$ となるようにとる．$\mathrm{Re}\,\lambda$ が支配的であり，かつ 0 でないとする[*4]．$U(\lambda)$ は自明な K 表現により生成され

[*4] Translation principle を用いれば，$\lambda = 0$ の場合の定理 2.2 は $\lambda \neq 0$ の場合に帰着できる．

る．u を自明な K 表現の 0 でない元とすると，関係式は今の場合次のようになる（一般の場合は Kostant ［Kos75, Theorem 2.10.3]）．

$$\begin{gathered}(H^2 - H + 2E_+E_-)u = (\lambda^2 - 1/4)u,\\ (E_+ - E_-)u = 0.\end{gathered}$$

ただし，$z \mapsto (cH \mapsto cz)$ により $\mathbb{C} \simeq \mathfrak{a}^*$ と見なした．従って，$(H^2 - H + 2E_+^2)u = (\lambda^2 - 1/4)u$ である．ここから，$\overline{u} = u \pmod{\mathfrak{n}U(\lambda)}$ とおけば $(H - (\lambda + 1/2))(H - (-\lambda + 1/2))\overline{u} = 0$ であるから，$U(\lambda)/\mathfrak{n}U(\lambda)$ が 2 次元であり，H の固有値が $\pm\lambda + 1/2$ となることがわかる．

さて，$u_1 = (H - (-\lambda + 1/2))u$, $u_2 = (H - (\lambda + 1/2))u$ とおく．これらは $\mathrm{mod}\ \mathfrak{n}U(\lambda)$ で H の固有値となる．更に，$u_0 = {}^t(u_1, u_2)$，$Q = \mathrm{diag}(\lambda + 1/2, -\lambda + 1/2)$ とおく．この時，

$$(H - Q)u_0 = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} E_+^2 u_0$$

である．

$$R = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく．

$U(\mathfrak{n})$ の拡大環 $\widehat{\mathcal{E}}(\mathfrak{n})$ を

$$\widehat{\mathcal{E}}(\mathfrak{n}) = \varprojlim_k U(\mathfrak{n})/\mathfrak{n}^k U(\mathfrak{n})$$

と定義する．今の場合 $\widehat{\mathcal{E}}(\mathfrak{n}) = \mathbb{C}[[E_+]]$ である．$\widehat{\mathcal{E}}(\mathfrak{n})$ は $\widehat{J}(U(\lambda))$ に作用することに注意する．

さて，$(H - Q - RE_+^2)u_0 = 0$ であるが，ここで $L \in GL(2, \widehat{\mathcal{E}}(\mathfrak{n}))$ を $(H - Q - RE_+^2)L = L(H - Q - T)$ なる T が極力簡単になるように選ぶことを考える．$L = \sum_k L_k E_+^{2k}$，$T = \sum_k T_k E_+^{2k}$ とおき，$(H - Q - RE_+^2)L = L(H - Q - T)$ を満たすとすると，両辺の E_+^{2k} の係数を比較して

$$2kL_k - [Q, L_k] = \sum_{l=0}^{k} L_l T_{k-l} - RL_{k-1}$$

となる．初期値を $L_0 = 1$，$T_0 = 0$ としておくと（これは $k = 0$ の式を満たす），次のようになる．

$$2kL_k - [Q, L_k] = T_k + \sum_{l=1}^{k} L_l T_{k-l} - RL_{k-1}$$

L_k の各成分を

$$L_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{pmatrix} 2ka_k & 2(k-\lambda)b_k \\ 2(k+\lambda)c_k & 2kd_k \end{pmatrix} = T_k + \sum_{l=1}^{k} L_l T_{k-l} - RL_{k-1} \tag{4.1}$$

となる．この式より，適当に L_k を選べば,

- λ が正整数でなければ $T = 0$.
- λ が正整数ならば，$T = T_\lambda E_+^{2\lambda}$，ただし T_λ の $(1,2)$ 成分以外は 0 である．

となることがわかる．

具体的な計算を後で行うが，その前に定理の証明を終えてしまおう．L を先に述べたようにとる．すると，$v = {}^t(v_1, v_2) = L^{-1}u \in \widehat{J}(U(\lambda))^2$ とおけば $(H - Q - T)v = 0$ が成り立つ．

$L \in 1_2 + M(2, \mathfrak{n}\widehat{\mathcal{E}}(\mathfrak{n}))$ より $v \equiv u \pmod{\mathfrak{n}\widehat{J}(U(\lambda))}$ であるから，v_1, v_2 の像は $\widehat{J}(U(\lambda))/\mathfrak{n}\widehat{J}(U(\lambda))$ を $\mathbb{C}$ 上生成する．$\widehat{\mathcal{E}}(\mathfrak{n}) \simeq \mathbb{C}[[E_+]]$ は $\mathfrak{n}\widehat{\mathcal{E}}(\mathfrak{n})$ を極大イデアルとする局所環であることに注意すれば，中山の補題から v_1, v_2 は $\widehat{\mathcal{E}}(\mathfrak{n})$ 加群として $\widehat{J}(U(\lambda))$ を生成する．

$E_- v_1, E_- v_2$ を求めるために，自明な K-type からとってきていた u を v_1, v_2 で表す．v_1, v_2 は $\widehat{\mathcal{E}}(\mathfrak{n})$ 加群として $\widehat{J}(U(\lambda))$ を生成するのだから，ある $A^{(1)}, A^{(2)} \in \widehat{J}(U(\lambda))$ が存在し，$u = A^{(1)}v_1 + A^{(2)}v_2$ が成り立つ．$A^{(i)}$ を展開し，$A^{(i)} = \sum A_k^{(i)} E_+^k$ と書いておく．

補題 4.1. $A_0^{(1)}, A_0^{(2)} \neq 0$.

証明. $\widehat{J}(U(\lambda))/\mathfrak{n}\widehat{J}(U(\lambda))$ で考えると，$v \equiv u \pmod{\mathfrak{n}\widehat{J}(U(\lambda))}$ であるから $u \equiv A_0^{(1)}v_1 + A_0^{(2)}v_2 \pmod{\mathfrak{n}\widehat{J}(U(\lambda))}$ である．u_1, u_2 の定義から，$A_0^{(1)} = 1/2\lambda$，$A_0^{(2)} = -1/2\lambda$ である．特に 0 ではない． □

さて，E_-v_1, E_-v_2 を求めよう．$(E_- - E_+)u = 0$ であるから，

$$\begin{aligned}0 = A_0^{(1)}E_-v_1 &+ \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(1)}E_-E_+^k v_1\\ &- \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(1)}E_+^{k+1}v_1\\ &+ A_0^{(2)}E_-v_2 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(2)}E_-E_+^k v_2\\ &- \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(2)}E_+^{k+1}v_2\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，v_1, v_2 はそれぞれ H の固有値 $\lambda + 1/2, -\lambda + 1/2$ の一般固有空間に属していることに注意すると，上の式で固有値が $-\lambda + 1/2 - 1$ の部分は三行目第一項しかないことがわかる（$\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ かつ $\lambda \neq 0$ に注意）．よって，$-\lambda + 1/2 - 1$ の一般固有空間に射影することにより*5，$A_0^{(2)}E_-v_2 = 0$ を得る．$A_0^{(2)} \neq 0$ であるから，$E_-v_2 = 0$ である．

E_-v_1 を求めるために，今度は固有値 $\lambda + 1/2 - 1$ の一般固有空間に射影しよう．まず，λ が半整数でなければ一行目第一項しか現れず，同様に $E_-v_1 = 0$ である*6．λ が半整数であるとすると，次のようになる．

$$0 = A_0^{(1)}E_-v_1 + A_{2\lambda}^{(2)}E_-E_+^{2\lambda}v_2 - A_{2\lambda-2}^{(2)}E_+^{2\lambda-1}v_2$$

よって，この場合 $E_-v_1 = 0$ は成り立たないが，しかし上の式より $E_-v_1 \in U(\mathfrak{g})v_2$ を得ることができる．

$V_2 = U(\mathfrak{g})v_2$, $V_1 = U(\mathfrak{g})v_1 + U(\mathfrak{g})v_2$ とおこう．このとき，上の結果から全射 $M(-\lambda) \twoheadrightarrow V_2$ と $M(\lambda) \twoheadrightarrow V_1/V_2$ が存在する．次を示せば定理 2.2 及び定理 2.3 の証明が完了する．

補題 4.2. (1) $V_1 = J(U(\lambda))$.
(2) 二つの全射 $M(-\lambda) \to V_2$ と $M(\lambda) \to V_1/V_2$ はどちらも同型.

証明. (1) v_1 と v_2 は $\mathfrak{a}$ 有限であるから，$V_1 \subset J(U(\lambda))$．逆の包含関係を示す．

$v \in J(U(\lambda))$ とする．v はある H の固有値 μ の一般固有空間に属しているとして一般性を失わない．すでに述べた通り，$\widehat{J}(U(\lambda))$ は v_1, v_2 により $\widehat{\mathcal{E}}(\mathfrak{n})$ 加群として生成されるから，ある $B^{(1)}, B^{(2)} \in \widehat{\mathcal{E}}(\mathfrak{n})$ が存在し，$v = B^{(1)}v_1 + B^{(2)}v_2$ が成り立つ．

*5 この操作が正当であることはもちろん証明しなければならない．[Abe06, Corollary 2.9] 参照.

*6 後から述べるが，L の作り方から $A_k^{(i)}$ は k が奇数なら 0 であることがわかる．よって，λ が整数でなければ $E_-v_1 = 0$ となる．

$B^{(i)} = \sum_k B_k^{(i)} E_+^k$ と展開する．すると，$v = \sum B_k^{(1)} E_+^k v_1 + \sum B_k^{(2)} E_+^k v_2$ となるが，ここで左辺は固有値 μ の一般固有空間に属しているのだから，その部分に射影すると $v = B_{\mu-\lambda-1/2}^{(1)} E_+^{\mu-\lambda-1/2} v_1 + B_{\mu+\lambda-1/2}^{(2)} E_+^{\mu+\lambda-1/2} v_2$ となる．よって，$v \in U(\mathfrak{g})v_1 + U(\mathfrak{g})v_2$ である．

(2) 既に全射はあるのだから，$J(U(\lambda))$ と $M(\lambda) \oplus M(-\lambda)$ の各 H 一般固有空間の次元が等しいことを見ればよい．これを指標を用いて示すために，Hecht と Schmid により証明された Osborne 予想［HS83］を用いる．$A = \{\mathrm{diag}(a, a^{-1}) \mid a > 0\}$，$M = \{\mathrm{diag}(\varepsilon, \varepsilon^{-1}) \mid \epsilon = \pm 1\}$ と実現しておく．

まず，$M(\mu)$ の指標を求めよう．$\mathfrak{a}$ 加群としては，$M(\mu) = \bigoplus_{k \geq 0} M_{\mu+1/2+k}$ である．ただし，M_η は 1 次元 $\mathfrak{a}$ 表現で，H が η 倍で作用するものである．従って，$M(\mu)$ の指標 $\Theta(M(\mu))$ は $\Theta(M(\mu))(\exp(tH)) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{t(\mu+1/2+k)} = (e^{t(\mu+1/2)})/(1-e^t)$ を満たす．

次に，$J(U(\lambda))$ の指標を Osborne 予想を用いて計算する．MA の開集合 $(MA)^-$ を $\{\mathrm{diag}(a, a^{-1}) \mid |a| < 1\}$ により定義する．このとき，Osborne 予想によれば，Harish-Chandra 加群 U に対し，$(MA)^-$ 上で $\Theta(U) \doteq \Theta(J(U))$ が成り立つ．ここで，$\Theta(U(\lambda))$ は Harish-Chandra により計算されており（たとえば Knapp［Kna01, Proposition 10.18］），次のようになる．

$$\Theta(U(\lambda))(\exp(tH)) = \frac{e^{t(\lambda+1/2)} + e^{t(-\lambda+1/2)}}{|1-e^t|}$$

これから，各 H 一般固有空間の次元が等しいことが従う． □

以上により定理 2.2 と定理 2.3 が証明された．

この節の残りで，上で計算をせずにすました L などを計算しよう．最も複雑な λ が正整数の場合を扱う．式 (4.1) を思い出す．$k < \lambda$ ならば $T_{k-l} = 0$ $(l = 0, 1, \ldots, k)$ であるから，

$$\begin{pmatrix} 2ka_k & 2(k-\lambda)b_k \\ 2(k+\lambda)c_k & 2kd_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} a_{k-1} - c_{k-1} & b_{k-1} - d_{k-1} \\ a_{k-1} - c_{k-1} & b_{k-1} - d_{k-1} \end{pmatrix}$$

となる．この漸化式を解けば，

$$a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{k!(\lambda;k)}, \qquad b_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{(k-1)!(-\lambda;k+1)},$$
$$c_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{(k-1)!(\lambda;k+1)}, \qquad d_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{k!(-\lambda;k)}$$

を得る．ここで，一般に $x \in \mathbb{C}$，$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $(x;m) = x(x+1)\cdots(x+m-1)$ とおい

た．よって，式 (4.1) の $k=\lambda$ の式から，

$$T_l = \begin{pmatrix} 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{\lambda-1}\frac{1}{\lambda!(\lambda-1)!} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

最後に E_-v_1 を求める．$u_0 = L^{-1}v$ であるから，$v = Lu_0$．よって，u_0 の定義から

$$u = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k - c_k)E_+^{2k}v_1 + \sum_{k=0}^{\infty}(b_k - d_k)E_+^{2k}v_2.$$

$(E_+ - E_-)u = 0$ であるから，

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k - c_k)E_+^{2k+1}v_1 - \sum_{k=0}^{\infty}(a_k - c_k)E_-E_+^{2k}v_1 + \sum_{k=0}^{\infty}(b_k - d_k)E_+^{2k+1}v_2 - \sum_{k=0}^{\infty}(b_k - d_k)E_-E_+^{2k}v_2.$$

この式の，H の一般固有値が $\lambda - 1/2$ の部分を取り出すと，第一項は 0 で，第二項は $k = \lambda - 1$ の部分，第三項は $k = 0$，第四項は $k = \lambda$ の部分が残る．従って，

$$(b_{\lambda-1} - d_{\lambda-1})E_+^{2\lambda-1}v_2 - E_-v_1 - (b_\lambda - d_\lambda)E_-E_+^{2\lambda}v_2 = 0$$

である．ここで $E_-E_+^{2\lambda}v_2 = (E_+^{2\lambda}E_- + E_+^{2\lambda-1}(H + \lambda - 1/2))v_2 = 0$ であるから，

$$E_-v_1 = (b_{\lambda-1} - d_{\lambda-1})E_+^{2\lambda-1}v_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\lambda-1}\frac{1}{\lambda!(\lambda-1)!}E_+^{2\lambda-1}v_2$$

を得る．

4.2. 反支配的な場合

反支配的な場合に，主系列表現の間の準同型写像に関する結果が再現できることをみておこう．$\mathrm{Re}\,\lambda$ が反支配的であるとする．前節の結果によれば（または定理 2.2 によれば），完全系列

$$0 \longrightarrow M(\lambda) \longrightarrow J(U(-\lambda)) \longrightarrow M(-\lambda) \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

が存在する．これから節 3 の議論により，完全系列

$$0 \longrightarrow M_{\mathfrak{p}}(-\lambda) \longrightarrow (J(U(\lambda))^*)_{\mathfrak{a}\text{ 有限}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}}(\lambda) \longrightarrow 0$$

を得る．従って，完全系列

$$0 \longrightarrow H^0(\mathfrak{n}, M_\mathfrak{p}(-\lambda)) \longrightarrow (J(U(\lambda))/\mathfrak{n}J(U(\lambda)))^* \longrightarrow H^0(\mathfrak{n}, M_\mathfrak{p}(\lambda)) \tag{4.3}$$

が得られる．但し，$\{u \in M \mid \mathfrak{n}u = 0\}$ を $H^0(\mathfrak{n}, M)$ と書いた．

まず，λ が整でないとしよう．この時，式 (4.2) は分裂し，従って式 (4.3) の最後の写像は全射である．また，この時 $\dim H^0(\mathfrak{n}, M_\mathfrak{p}(-\lambda)) = \dim H^0(\mathfrak{n}, M_\mathfrak{p}(\lambda)) = 1$ であり，従って $\dim J(U(\lambda))/\mathfrak{n}J(U(\lambda)) = 2$. つまり主系列表現への準同型写像はこの場合 2 次元あることがわかる．

次に，λ が整で $\lambda/2$ は整でないときを考える．この場合も，式 (4.2) は分裂し，やはり式 (4.3) の最後の写像は全射である．また，$\dim H^0(\mathfrak{n}, M_\mathfrak{p}(\lambda)) = 1$ であるが，一方で $\dim H^0(\mathfrak{n}, M_\mathfrak{p}(-\lambda)) = 2$ となり，従って $\dim J(U(\lambda))/\mathfrak{n}J(U(\lambda)) = 3$.

最後に，$\lambda/2$ が整なときを考える．この時，式 (4.2) は分裂しない．式 (4.3) の最後の写像が全射にはならない（従って，$\dim H^0(\mathfrak{n}, M_\mathfrak{p}(\lambda)) = 1$ より 0 射）ことを示そう．v を $M_\mathfrak{p}(\lambda)$ の最高ウェイトベクトルの $(J(U(\lambda))^*)_{\mathfrak{a}\text{ 有限}}$ への引き戻しとし，$\mathfrak{n}v \neq 0$ を示せばよい．完全列 (4.2) は分裂しないのだから，$E_+v \neq 0$ または $(H - (\lambda - 1/2))v \neq 0$ である．後者と仮定して $E_+v \neq 0$ を示そう．この時，H の固有値を考えれば $(H - (-\lambda - 1/2))(H - (\lambda - 1/2))v \neq 0$ である．$U(\lambda)$ には $(H^2 + H + 2E_-E_+)$ が $\lambda^2 - 1/4$ 倍で作用する．この元は $U(\mathfrak{g})$ の中心に属しているから，$J(U(\lambda))$ にも同じ作用をする．よって，$(J(U(\lambda))^*)_{\mathfrak{n}\text{ 有限}}$ にも同様である．従って，$(H^2 + H + 2E_-E_+ - (\lambda^2 - 1/4))v = ((H - (-\lambda - 1/2))(H - (\lambda - 1/2)) + 2E_-E_+)v = 0$. $(H - (-\lambda - 1/2))(H - (\lambda - 1/2)v \neq 0$ であるから，$E_-E_+v \neq 0$. よって $E_+v \neq 0$ である．以上から，この場合 $\dim J(U(\lambda))/\mathfrak{n}J(U(\lambda)) = \dim H^0(\mathfrak{n}, M_\mathfrak{p}(-\lambda)) = 2$ となる．

参考文献

[Abe06] Noriyuki Abe, *Jacquet modules of principal series generated by the trivial K-type*, 2006, preprint.

[HS83] Henryk Hecht and Wilfried Schmid, *Characters, asymptotics and* $\mathfrak{n}$*-homology of Harish-Chandra modules*, Acta Math. **151** (1983), no. 1-2, 49–151.

[Kna01] Anthony W. Knapp, *Representation theory of semisimple groups*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, An overview based on examples, Reprint of the 1986 original.

阿部 紀行

[Kos75] Bertram Kostant, *On the existence and irreducibility of certain series of representations*, Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971), Halsted, New York, 1975, pp. 231–329.