平成１８年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

専門科目

◎　問題は １１題 ある。
そのうち ２題 を解答せよ。

◎　解答時間は　２時間３０分　である。

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は、指定された荷物置場に置くこと。

[注意]

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。

2　解答用紙・下書き用紙・選択表のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。

3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。１問を２枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。

4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、選択表を上に置き、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

[記号について]

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{N}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、非負整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

$\boxed{1}$ 集合 A, B に対して，$\mathrm{Map}(A,B)$ で A から B への写像全体のなす集合を表す．正整数 n に対して，$k[X_1,\ldots,X_n]$ を体 k 上の n 変数多項式環とする．$f \in k[X_1,\ldots,X_n]$ に対して，$\varphi(f) \in \mathrm{Map}(k^n, k)$ を

$$\varphi(f)(a_1,\ldots,a_n) = f(a_1,\ldots,a_n) \quad (a_1,\ldots,a_n \in k)$$

で定めることにより，写像 $\varphi : k[X_1,\ldots,X_n] \to \mathrm{Map}(k^n,k)$ を定義する．このとき，各 n に対して次の (i), (ii) の同値関係が成り立つことを証明せよ．

(i) φ が単射 $\Longleftrightarrow$ k が無限体

(ii) φ が全射 $\Longleftrightarrow$ k が有限体

$\boxed{2}$ 2変数多項式環 $\mathbf{C}[x,y]$ の部分環 A が単項的とは，A が単項式で生成されていることとする．1 でない単項式 $v = x^a y^b$ に対して，

$$\mathrm{slope}(v) = b/a \in [0,\infty]$$

とおく．単項的な部分環 A ($\mathbf{C} \subsetneq A$) に対して，次の 2 条件が同値であることを示せ．

(a) A が $\mathbf{C}$ 上有限生成な環である．

(b) 順序集合 $[0,\infty]$ の部分集合 $\{\mathrm{slope}(v) \mid v$ は 1 でない A に属する単項式$\}$ が最大値と最小値を持つ．

$\boxed{3}$ τ を虚部が正の複素数とする ($\mathrm{Im}\,\tau > 0$)．$e(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$，$\mathbf{C}^\times = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ とおき，写像 $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times$ を $f(x) = (e(x), e(\tau x))$ で定義する．

(i) $\mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times$ をその部分群 $f(\mathbf{C})$ で割って得られる剰余群は，基本周期 $(\tau, 1)$ を持つ 1 次元複素トーラス $E_\tau = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau)$ に同型であることを示せ．

(ii) 次の 2 条件 (a), (b) を満たす複素多様体 X と正則写像 $\pi : X \to E_\tau$ を与えよ．

(a) $\mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times$ は X の開部分集合と同型，

(b) E_τ の任意の点 p に対して，$\pi^{-1}(p)$ は 1 次元複素射影空間 $\mathbf{P}^1$ と同型．

$\boxed{4}$ 自然数 n に対して，$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ (n 次元球面) とおく．写像 $f : S^n \times S^n \to S^n \times S^n$ を

$$f(x,y) = (-y, x), \quad (x, y \in S^n)$$

で定義する．$f(x,y) \sim (x,y)$ で生成される $S^n \times S^n$ の同値関係を $\sim$ として，X_n で商空間 $(S^n \times S^n)/\sim$ を表す．

(i) X_n は $2n$ 次元可微分多様体の構造を持ち，向き付け不可能であることを示せ．

(ii) X_1 のホモロジー群 $H_k(X_1;\mathbf{Z})$ $(k = 0,1,2)$ を求めよ．

(iii) $n \geq 2$ のとき，X_n のホモロジー群 $H_k(X_n;\mathbf{Z})$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$ を求めよ．

$\boxed{5}$ α, β を正の定数とし，$x > 0$ に対して，

$$u(x) = \int_0^1 e^{xt}\, t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt$$

とおく.

(i) $u(x)$ は微分方程式

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + (\alpha+\beta-x)\frac{du}{dx} - \alpha u = 0$$

を満たすことを示せ.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^{\beta}u(x)$ を求めよ.

(iii) (i) の微分方程式の $x > 0$ における解であって，$u(x)$ と 1 次独立なものを (積分の形で) 与えよ．また，それが $u(x)$ と 1 次独立である理由を述べよ.

$\boxed{6}$ $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を無限回連続微分可能な狭義単調増加関数で $h(1) = 1$ を満たすものとする.

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = n\bigl(1 - \max(h(x_1), \ldots, h(x_n))\bigr)$$

とおくとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f_n(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

を求めよ.

$\boxed{7}$ (x, y)-平面内で 2 つの壁 $y = 0$ と $y = h$ $(h > 0)$ の間を x 方向に一様に流れる粘性流 $(u(y,t), 0)$ は，動粘性係数を定数 $\nu > 0$ とするとき，次の方程式に従う.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

以下，時間 $t \geq 0$ で考える．上側の壁 $y = h$ が静止し，下側の壁 $y = 0$ が x 方向に一定の速度 U で動くとき，$u(y,t)$ の満たす境界条件は $u(h,t) = 0$, $u(0,t) = U$ で与えられる.

(i) 上の境界条件を満たす(1) の定常解 $u_1(y)$ を求めよ.

(ii) 初期条件 $u(y,0) = 0$ $(0 < y < h)$ を満たす解 $u_2(y,t)$ は

$$u_2(y,t) = u_1(y) - \frac{2U}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right)$$

となることを示せ.

(iii) 上の配置において定常粘性流 $(u(y), v_0)$ (v_0 は定数) を考える．このとき，$u(y)$ は次の方程式に従う.

$$v_0\frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

境界条件 $u(h) = 0$, $u(0) = U$ を満たす(2) の解を求めよ.

$\boxed{8}$ $\mathbf{R}^2$ を 1 自由度の古典力学系の相空間とみなし，その座標を (x,p) とする．古典的な観測量 $\mathcal{O}(x,p)$ に対して Weyl の対応では，

$$\widehat{\mathcal{O}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{O}(x,p)\, e^{i[u(x-X)+v(p-P)]}\, du\, dv\, dx\, dp$$

により量子論の作用素を対応させる．ただし，$i=\sqrt{-1}$ であり，X, P は x, p に対応する作用素で交換関係 $[X,P]=i$ を満たす．なお，本問では $\hbar=1$ となる単位系を採用するものとする．

(i) Schrödinger 表示で考え，波動関数 $\psi(x)$ に対する $\widehat{\mathcal{O}}$ の作用を

$$(\widehat{\mathcal{O}}\psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)\,\psi(y)\,dy$$

の形に表したとき，$K(x,y)$ を $\mathcal{O}(x,p)$ を用いて表せ．

(ii) 状態 ψ に対して，期待値が

$$\langle \psi, \widehat{\mathcal{O}}\psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_\psi(x,p)\,\mathcal{O}(x,p)\,dx\,dp$$

となる関数 $W_\psi(x,p)$ を Schrödinger 表示を使うことにより求めよ．

$\boxed{9}$ 方程式 $x^3+2x=1$ の実根を ξ とする．ξ の近似値を求めるために

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2+2} \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

という逐次近似を考える．

(i) $x_n > \xi$ ならば $x_{n+1} < \xi$ であり，$0 \le x_n < \xi$ ならば $x_{n+1} > \xi$ であることを証明せよ．

(ii) $x_0 \ge 0$ をどう選んでも $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ となることを証明せよ．

(iii) $x_0 = 0$ から出発して $|x_n - \xi| \le 0.01$ となるためには，n をどの程度大きくすればよいか？

(iv) ξ の近似値を 5 桁まで計算するプログラムを C または FORTRAN で書け．

$\boxed{10}$ 次の (i), (ii) の問に答えよ．

(i) 線形計画問題における双対定理を正確に述べよ．

(ii) (i) の双対定理を用いて次の命題を証明せよ．

A を $m \times n$ 実行列，x を $n \times 1$ 変数ベクトル，y を $1 \times m$ 変数ベクトル，$\mathbf{0}_n$ を $n \times 1$ 零ベクトル，$\mathbf{0}_m$ を $m \times 1$ 零ベクトルとする．$Ax = \mathbf{0}_m$，$x \ge \mathbf{0}_n$ を満たす解 $x \ne \mathbf{0}_n$ が存在するための必要十分条件は，yA が正ベクトル（即ち，すべての成分が正であるベクトル）となるような y が存在しないことである．

$\boxed{11}$ 以下のような，整数の３つ組を入力にとる再帰プログラム P を考える．

$$P(x,y,z) = \texttt{if}\ \ x \le y\ \ \texttt{then}\ \ y\ \ \texttt{else}\ \ P(P(x-1,y,z), P(y-1,z,x), P(z-1,x,y))$$

また，関数 $F : \mathbf{Z}^3 \to \mathbf{Z}$ を，以下のように与える．

$$F(x,y,z) = \begin{cases} y & (x \le y) \\ z & (y < x,\ y \le z) \\ x & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

(i) 任意の $x, y, z \in \mathbf{Z}$ について

$$F(x,y,z) = \begin{cases} y & (x \le y) \\ F(F(x-1,y,z), F(y-1,z,x), F(z-1,x,y)) & (y < x) \end{cases}$$

が成り立つことを示せ．

(ii) 関数 $M : \mathbf{Z}^3 \to \mathbf{N}^3$ を以下のように定める．

$$M(x,y,z) = (M_1(x,y,z), M_2(x,y,z), M_3(x,y,z))$$

ただし，

$$M_1(x,y,z) = \begin{cases} 0 & (x \le y) \\ 1 & (y < x) \end{cases}$$
$$M_2(x,y,z) = \texttt{max}\{x,y,z\} - \texttt{min}\{x,y,z\}$$
$$M_3(x,y,z) = x - \texttt{min}\{x,y,z\}$$

であり，max と min は最大値，最小値を意味する．任意の $x, y, z \in \mathbf{Z}$ について，$y < x$ ならば，$M(x-1,y,z)$, $M(y-1,z,x)$, $M(z-1,x,y)$ および $M(F(x-1,y,z), F(y-1,z,x), F(z-1,x,y))$ は，$\mathbf{N}^3$ 上の辞書式順序に関していずれも $M(x,y,z)$ より真に小さくなることを示せ．

(iii) 任意の $x, y, z \in \mathbf{Z}$ について，$P(x,y,z)$ の計算が停止してその結果が $F(x,y,z)$ と一致することを示せ．