平成１９年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

# 入学試験問題

# 専門科目

◎　問題は １１題 ある。
そのうち ２題 を解答せよ。

◎　解答時間は　２時間３０分　である。

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は、指定された荷物置場に置くこと。

[注意]

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。

2　解答用紙・下書き用紙・選択表のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。

3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。一問を二枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。

4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、選択表を上に置き、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

[記号について]

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

$\boxed{1}$ $\mathbf{Q}$ の４次巡回拡大体 $K$ であって，$i^2 = -1$ をみたす元 $i$ を含むものは存在するか？存在する場合は例を挙げ，存在しない場合はその証明を与えよ．

$\boxed{2}$ $p$ は素数とする．不定元 $T$ に関する $\mathbf{Z}$ 係数多項式 $f(T) = \sum_{j\geq 0} c_j T^j$ に対して

$$f'(T) = \sum_{j\geq 1} j c_j T^{j-1}$$

と定め，非負整数 $N$ に対して $f_N$ は，$f(T)$ に $p\mathbf{Z}$ の元を代入することによって定まる写像

$$f_N : p\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z}$$

を表すとする．$f'(T) \neq 0$ として以下の問に答えよ．

(i) $f_N(t) \neq 0 \in \mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z}$, $f'_N(t) \neq 0 \in \mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z}$ となる $t \in p\mathbf{Z}$ と非負整数 $N$ が存在することを示せ．

(ii) 次の性質 $(*)$ をみたす $c \in \mathbf{Z}$ と非負整数 $m$ が存在することを示せ．

$(*)$ 任意の非負整数 $N \geq m$ に対して，集合

$$\{x \in \mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z} \mid x \equiv c \pmod{p^m}\}$$

は $f_N$ の像に含まれる．

$\boxed{3}$ ２変数多項式環 $\mathbf{C}[x, y]$ の中で $f(x, 0)$ が定数となる多項式 $f(x, y)$ 全体のなす部分環を $R$ とする．また，$x$ と $y - b$ $(b \in \mathbf{C})$ で生成される $\mathbf{C}[x, y]$ のイデアルを $\mathfrak{m}_b$ とおく．

(i) $R$ のイデアル $\mathfrak{m}_1 \cap R$ は二つの元で生成されることを示せ．

(ii) $R$ のイデアル $\mathfrak{m}_0 \cap R$ は有限生成でないことを示せ．

$\boxed{4}$ 区間 $[-1, 1]$ を $I$ とおく．位相空間 $U, V$ を

$$U = \{(x, y, z) \in I \times I \times I \mid x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}\},$$
$$V = \{(x, y, z) \in I \times I \times I \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$$

により定める．$U$ の同値関係 $\sim$ を次で定義する．

$$(-1, y, z) \sim (1, y, z), \quad y, z \in I,$$
$$(x, -1, z) \sim (x, 1, z), \quad x, z \in I,$$
$$(x, y, -1) \sim (-y, x, 1), \quad x, y \in I,\ x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}.$$

$X = U/\sim$ を $U$ の $\sim$ による商空間とし，$Y$ を $U$ から $X$ への射影による $V$ の像とする．

(i) ホモロジー群 $H_n(X; \mathbf{Z})$, $n = 0, 1, 2, 3$, を求めよ．

(ii) ホモロジー群 $H_n(X, Y; \mathbf{Z})$, $n = 0, 1, 2, 3$, を求めよ．

$\boxed{5}$　$f(z)$ を $\mathbf{C}$ 上定義された正則関数とする．

$$z^2 \frac{d}{dz} u(z) + u(z) = f(z)$$

をみたす $\mathbf{C}$ 上定義された正則関数 $u(z)$ が存在するには

$$\oint z^{-2} e^{-1/z} f(z) dz = 0$$

となることが必要十分であることを示せ．ただし $\oint$ は $|z| = 1$ を一周する積分である．

$\boxed{6}$　単位区間 $[0,1]$ 上で定義された複素数値可測関数の列 $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ は次の条件 (a), (b) をみたすと仮定する．

(a) すべての $n$ とすべての $x \in [0,1]$ に対して，$|u_n(x)| = 1$.

(b) $\displaystyle \prod_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 u_n(x) dx \right| > 0.$

このとき，以下を示せ．

(i) $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 |u_n(x) - u_n(y)|^2 dx dy < \infty.$

(ii) ある数列 $c_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ が存在して，集合

$$\{x \in [0,1] \; ; \; \lim_{n \to \infty} (u_n(x) - c_n) = 0\}$$

のルベーグ測度は 1 である．

$\boxed{7}$ 2次元非圧縮性流体の流れ場は流れ関数 $\psi(x,y)$ によって記述される．非粘性の定常流では，渦度 $\omega = -\Delta\psi$ $(\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ と流れ関数 $\psi$ の間に関数関係が成立することが知られており，渦列による流れ等は次の方程式によって議論されることがある．

$$\Delta\psi = \exp(-2\psi) \qquad (*)$$

この方程式について以下の問に答えよ．ただし，$z = x + iy$ $(i = \sqrt{-1})$ とする．

(i) 方程式 $(*)$ の解 $\psi(x,y)$ に対し，

$$\psi_G(x,y) = \psi(\mathrm{Re}[G(z)], \mathrm{Im}[G(z)]) - \log\left|\frac{dG}{dz}(z)\right|$$

は再び $(*)$ の解となることを示せ．ただし，$G(z)$ は $z$ の正則関数で $dG/dz$ が零点をもたないものとする．また，Re, Im はそれぞれ複素数の実部，虚部を表す．

(ii) 方程式 $(*)$ の解で $s = x^2 + y^2$ のみに依存するものを $\psi = f(s)$ とおく．このとき，$f(s)$ は

$$s(f'' + (f')^2)' + 2(f'' + (f')^2) = 0$$

をみたすことを示し，$f(0) = 0$ かつ $f(s)$ は特異点をもたないとして $f(s)$ を求めよ．ただし，$'$ は $s$ に関する微分を表す．また，必要があればラプラシアンの極座標表示

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

を用いてもよい．

(iii) (i) および (ii) の解を用いて，$(*)$ の解で $\psi(x + 2\pi, y) = \psi(x,y)$, $\psi(0,y) \neq \psi(\pi,y)$ をみたし特異点をもたないものを一つ求めよ．

8 $n$ 次複素正方行列全体を $\mathbb{M}_n$ と表し，$n$ 次エルミート行列全体を $\mathbb{H}_n$ と表す．$\mathbb{H}_n$ で物理量全体が与えられ，ある正定値エルミート行列 $H \in \mathbb{H}_n$ をハミルトニアンとして持つ物理系を考える．任意の複素数 $u$ に対して写像 $\sigma_u : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_n$ を

$$\sigma_u(A) = e^{iuH} A e^{-iuH} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

で定義するとき，物理量 $A \in \mathbb{H}_n$ の時間発展は $\sigma_t(A)$ $(t \in \mathbf{R})$ で与えられる．また，この系の逆温度 $\beta(>0)$ における熱平衡状態は「ギブス状態」と呼ばれる $\mathbb{M}_n$ 上の関数

$$\omega_\beta(A) = \frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H} A)}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})} \qquad (A \in \mathbb{M}_n)$$

によって記述される．ただし，Tr( ) は行列のトレースを表す．このとき，以下の問に答えよ．

(i) 全ての物理量 $A \in \mathbb{H}_n$ と可換である $\mathbb{M}_n$ の元は単位行列のスカラー倍しかないことを示せ．

(ii) 正の実数 $\beta$ に対し，$\mathbb{M}_n$ 上の関数 $\omega$ が条件

$$\omega(A\, \sigma_t(B)) = \omega(\sigma_{t-i\beta}(B)\, A) \qquad (\forall A \in \mathbb{H}_n, \forall B \in \mathbb{H}_n, \ \forall t \in \mathbf{R})$$

をみたすとき，$\omega$ は「KMS$_\beta$ 条件」をみたすと言う．ギブス状態 $\omega_\beta$ は KMS$_\beta$ 条件をみたすことを示せ．

(iii) 逆に，$\mathbb{M}_n$ 上の関数 $\omega$ が KMS$_\beta$ 条件をみたし，かつ $\mathrm{Tr}(\rho) \neq 0$ なる $\rho \in \mathbb{M}_n$ を用いて

$$\omega(A) = \frac{\mathrm{Tr}(\rho A)}{\mathrm{Tr}(\rho)} \qquad (A \in \mathbb{M}_n)$$

と書けたとする．このとき，$\omega$ はギブス状態 $\omega_\beta$ に一致することを示せ．

9 級数

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots \tag{$*$}$$

を使って $\log 2$ の値を数値計算するのは極めて非効率である．効率よく計算するための方法に関し，次の問に答えよ．

(i)

$$\log \frac{1+x}{1-x}$$

の $x = 0$ におけるテイラー展開を使うとはるかに速く収束する計算方法を得る．その方法および速い理由を述べよ．

(ii) ひとつの $x$ の値だけを使うのではなく，複数の値を代入したものを利用するとより高速に収束する方法が構成できる．その方法を考案せよ．

(iii) 加減乗除のみが計算可能であるが，他の演算（指数関数や対数関数など）が不可能な環境で $\log 2$ の値を小数点以下 6 桁計算するプログラムを書け．その際，誤差が $10^{-6}$ 以下であることを保証できるようにせよ．ただし，$(*)$ に基づいたプログラムは採点の対象とはしない．特定の計算機言語を使わず，計算のフローチャートのみを書いても可とする．

$\boxed{10}$ 実変数 $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に関する線形計画問題

$$\text{(KP)} \quad \text{最大化} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{制約} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b,$$

$$0 \le x_i \le u_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

を考える．ただし，$a_i, c_i, u_i, b$ はすべて正の整数とし，

$$\frac{c_1}{a_1} \ge \frac{c_2}{a_2} \ge \cdots \ge \frac{c_n}{a_n}$$

が成り立つものとする．このとき，以下の問に答えよ．

(i) 上記の線形計画問題 (KP) の双対問題を書き下せ．

(ii) 線形計画問題 (KP) を解くアルゴリズムで，四則演算の回数が $n$ の 1 次式で抑えられるものを設計し，正当性を示せ．

$\boxed{11}$ 純粋な（型のない）ラムダ計算において，以下のような，有限列を表現するラムダ式を考える．

$$\begin{aligned} [\,] &= \lambda xy.x \\ [M_1, M_2, \ldots, M_n] &= \lambda xy.y\, M_1\, (y\, M_2 \cdots (y\, M_n\, x)) \end{aligned}$$

ただし $M_1, M_2, \ldots, M_n$ は自由な $x, y$ の出現がない任意のラムダ式とする．

(i) 以下の条件をみたす閉じたラムダ式 $C$ をひとつ与えよ．

$$\begin{aligned} CM[\,] &\to^* [M] \\ CM[N_1, \ldots, N_n] &\to^* [M, N_1, \ldots, N_n] \end{aligned}$$

ただし，$\to^*$ は $\beta$ 簡約関係の推移的反射的閉包とする．

(ii) 以下の条件をみたす閉じたラムダ式 $A$ をひとつ与えよ．

$$\begin{aligned} A[\,][\,] &\to^* [\,] \\ A[\,][N_1, \ldots, N_n] &\to^* [N_1, \ldots, N_n] \\ A[M_1, \ldots, M_m][\,] &\to^* [M_1, \ldots, M_m] \\ A[M_1, \ldots, M_m][N_1, \ldots, N_n] &\to^* [M_1, \ldots, M_m, N_1, \ldots, N_n] \end{aligned}$$