平成２０年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

専門科目

◎　問題は １１題 ある。
　そのうち 2題 を解答せよ。

◎　解答時間は　2時間３０分　である。

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は、指定された荷物置場に置くこと。

［注意］

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと。

2　解答用紙・下書き用紙・選択表のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。

3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い、問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ。一問を二枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。

4　提出の際は、解答用紙を問題番号順に重ね、下書き用紙をその下に揃え、選択表を上に置き、記入した面を外にして、一括して二つ折りにして提出すること。

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい。

［記号について］

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は、それぞれ、整数、有理数、実数、複素数の集合を表す。

$\boxed{1}$ T, X は n 次元複素ベクトル空間 V の可逆な線形変換で $TXT = X^{-1}$ をみたし，T の最小多項式の次数が 2 であるとする．このとき，部分ベクトル空間の列

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_\ell = V$$

で，各 $1 \leq i \leq \ell$ に対し

$$TV_i \subseteq V_i, \quad XV_i \subseteq V_i, \quad \dim V_i/V_{i-1} \leq 2$$

をみたすものが存在することを示せ．

$\boxed{2}$ K を体とし，L を K の 3 次拡大体とする．α, β を L の元でいずれも K に属さないものとする．このとき，

$$\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} \quad \text{かつ} \quad ad - bc \neq 0$$

をみたす $(a, b, c, d) \in K^4$ が存在し，K のスカラー倍を除いて一意的に定まることを示せ．

$\boxed{3}$ m, n を互いに素な正整数とし，$f(x, y) \in \mathbf{C}[x, y]$ を二変数 n 次斉次多項式とする．環

$$R = \mathbf{C}[x, y, z]/(z^m - f(x, y))$$

に対し，以下の問に答えよ．

1) R は整域であることを示せ．
2) R の可逆元全体のなす集合 $R^\times$ は $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ に一致することを示せ．
（ヒント：$z^m - f(x, y)$ は重み付き斉次多項式と考えられる．）

$\boxed{4}$ $\mathbf{R}^3$ の部分空間 X を

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 + z^2 \leq 1\}$$

により定め，商空間 $W = X/\sim$ を考える．ただし，$\sim$ は，X の境界 ∂X において，

$$(x, y, z) \sim (-x, -y, -z), \quad (x, y, z) \in \partial X$$

で定まる同値関係である．このとき次の問に答えよ．

(i) ホモロジー群 $H_n(W; \mathbf{Z})$ $(n = 0, 1, 2, 3)$ を求めよ．
(ii) コホモロジー群 $H^n(W; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ $(n = 0, 1, 2, 3)$ を求めよ．

$\boxed{5}$ $f(z)$ を $D=\{z\in \mathbf{C}; |z|<1\}$ 上の正則関数とする．

(i) 微分方程式

$$z^2\frac{du}{dz}(z)+zu(z)=\lambda+f(z)$$

をみたす D 上の正則関数 $u(z)$ と定数 λ の組 $(u(z),\lambda)$ がただ一つ存在することを示せ．

(ii) r を $0<r<1$ をみたす実数とするとき，(i) の $u(z)$ に対して

$$\sup_{|z|\le r}|u(z)|\le\frac{2}{r}\sup_{|z|\le r}|f(z)|,\qquad \sup_{|z|\le r}\left|\frac{du}{dz}(z)\right|\le\frac{4}{r^2}\sup_{|z|\le r}|f(z)|$$

が成立することを示せ．

$\boxed{6}$ H を複素ヒルベルト空間，$A:H\to H$ を有界線形作用素とする．このとき，

$$w(A)=\sup_{x\in H,\,\|x\|=1}|(Ax,x)|$$

とおく．ただし，$(\cdot,\cdot)$ は H の内積であり，それから導かれるノルムを $\|\cdot\|$ で表わす．

(i) $r(A)=\sup_{z\in\sigma(A)}|z|$ とおく．ここで，$\sigma(A)$ は A のスペクトルである．このとき，$r(A)<w(A)<\|A\|$ となる具体例を一つあげよ．ただし，$\|A\|=\sup_{x\in H,\,\|x\|=1}\|Ax\|$.

(ii) $\frac{1}{2}\|A\|\le w(A)\le\|A\|$ となることを証明せよ．また，左の不等式において，係数 $\frac{1}{2}$ はこれ以上大きくはできないことを示せ．(ヒント：$x\in H$ と $y\in H$ が任意に与えられたとき，$u,v,\cdots\in H$ をうまく選んで (Ax,y) を $(Au,u),(Av,v),\cdots$ で表わせ．)

$\boxed{7}$ 一次元空間における流体の連続方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0 \tag{1}$$

を考える．ここで x は空間座標 $(-\infty<x<\infty)$，t は時間 $(t\ge 0)$ とし，速度 $u=u(x,t)$，密度 $\rho=\rho(x,t)$ はいずれもなめらかな関数とする．次の問に答えよ．

(i) 時間 t の関数 $x_i(t)$ $(i=1,2)$ は

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=u(x_i(t),t)\qquad(i=1,2)$$

をみたすものとする．このとき次の式を示せ．

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\rho(x,t)dx=0. \tag{2}$$

(ii) ラグランジュ座標を (ξ,t) とする．すなわち $x=x(\xi,t)$ は

$$\frac{\partial x(\xi,t)}{\partial t}=u(x(\xi,t),t),\quad x(\xi,0)=\xi$$

をみたすものとする．このとき，(2) における積分変数の変換を用いて，次式が成り立つことを示せ．

$$\rho(x(\xi,t),t)\frac{\partial x(\xi,t)}{\partial\xi}=\rho(\xi,0).$$

(iii) $\rho(x,0)=\rho_0$（定数），$u(x,t)=\dfrac{1}{\cosh x}$ のとき，(1) の解 $\rho(x,t)$ を求めよ．

$\boxed{8}$ デルタ関数をポテンシャルとする1次元シュレディンガー方程式

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - \delta(x)\right)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

を考える.

(i) 波動関数 Ψ が

$$-\frac{1}{2}\left(\Psi'(+0) - \Psi'(-0)\right) - \Psi(0) = 0$$

をみたすことを示せ.

(ii) 基底状態の波動関数 Ψ_0 を具体的に求めよ.

(iii) $L > 0$ は実定数とする. 初期状態が波束

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2L}} & (|x| \leq L) \\ 0 & (|x| > L) \end{cases}$$

で与えられたとき, 長時間後, 粒子が原点近傍に局在している確率を, ϕ から Ψ_0 への遷移確率として求めよ.

$\boxed{9}$ つぎの (I) と (II) が同値であることを示せ. ただし, k, m, n は $1 \leq k \leq m-1$ をみたす正整数であり, a_{ij} $(i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$, b_i $(i = 1, \cdots, m)$ は実定数である.

(I) 線形不等式系

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \qquad (i = 1, \cdots, k), \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i \qquad (i = k+1, \cdots, m) \tag{2}$$

をみたす解 x_j $(j = 1, \cdots, n)$ が存在する.

(II) 線形不等式系

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = 0 \qquad (j = 1, \cdots, n), \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \leq 0, \tag{4}$$

$$y_i \geq 0 \qquad (i = 1, \cdots, m), \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{k} b_i y_i + \sum_{i=k+1}^{m} (b_i - 1)y_i < 0 \tag{6}$$

をみたす解 y_i $(i = 1, \cdots, m)$ は存在しない.

$\boxed{10}$ n を 2 以上の整数とする．n 個の要素からなる有限集合 S と関数 $d: S \times S \to \mathbf{R}$ が与えられている．各 $k = 2, \cdots, n$ に対して，S を空でない部分集合 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ に分割し，異なる成分に属する要素の順序対に対する d の最小値

$$\min\{d(u,v) \mid u \in S_i, v \in S_j, i \neq j\}$$

をできるだけ大きくしたい．この観点から最適な分割を，すべての $k = 2, \cdots, n$ に対して見出す効率的なアルゴリズムを設計し，その正当性を示すとともに，計算量を評価せよ．ただし，d の関数値計算は定数時間で実行可能とする．

$\boxed{11}$ 以下の λ 項を考える．

$$\mathrm{S}_1 = \lambda xyz.x \qquad \mathrm{S}_2 = \lambda xyz.y \qquad \mathrm{S}_3 = \lambda xyz.z$$
$$\mathrm{B} = \lambda x.x\mathrm{S}_1 \qquad \mathbf{P} = \lambda sx.x\mathrm{S}_1 \qquad \mathrm{T} = \lambda sx.x(s\mathrm{S}_2\mathrm{S}_3\mathrm{S}_3)$$

λ 項 $M_1, \cdots, M_n \in \{\mathbf{P}, \mathrm{T}\}$ を任意に取る $(n \geq 0)$．このとき，

$$\mathrm{B}M_1M_2 \cdots M_n$$

の β 正規形を，$M_1, \cdots, M_n$ の取り方により分類せよ．