平成２２年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

専門科目

◎　問題は １２題 ある. そのうち ２題 を選択して解答せよ.

◎　解答時間は　２時間３０分　である.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は, 指定された荷物置場に置くこと.

［注意］

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと.

2　解答用紙・下書き用紙・選択表のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.

3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ. 一問を二枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.

4　提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 下書き用紙をその下に揃え, 選択表を上に置き, 記入した面を外にして, 一括して二つ折りにして提出すること.

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい.

［記号について］

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は, それぞれ, 整数, 有理数, 実数, 複素数の集合を表す.

$\boxed{1}$　k は代数閉体とし, $k_0 \subseteq k$ はその部分体とする．また $\mathrm{M}_2(k)$, $\mathrm{M}_2(k_0)$ はそれぞれ k, k_0 の元を成分とする 2 次正方行列全体とし, $\lambda, \mu \in k$ に対して

$$S(\lambda,\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(k) \;\middle|\; ad-bc=\lambda,\ a+d=\mu \right\}$$

と置く．このとき, k_0 係数の多項式 $f(X,Y,Z,T) \in k_0[X,Y,Z,T]$ （ただし, X,Y,Z,T は不定元）に対して定義される関数 $\phi : \mathrm{M}_2(k) \longrightarrow k$

$$\mathrm{M}_2(k) \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \phi(A) \stackrel{\text{def}}{=} f(a,b,c,d) \in k$$

が次の条件を満たすと仮定する: $\forall A, B \in \mathrm{M}_2(k_0)$ に対して $\phi(AB) = \phi(BA)$.

(i)　$k = k_0$ のとき, 任意の $\lambda, \mu \in k$ に対して ϕ が $S(\lambda,\mu)$ の上で定数関数になることを示せ.

(ii)　k_0 が有限体のとき, ϕ が $S(\lambda,\mu)$ の上で定数関数にならないような $\lambda, \mu \in k_0$, $f(X,Y,Z,T) \in k_0[X,Y,Z,T]$ の例を挙げよ.

$\boxed{2}$　p は素数とし, $\mathbf{F}_p$ を濃度 p の有限体とする．$G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$ を $\mathbf{F}_p$ を成分とする可逆な n 次正方行列の成す群とし,

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

を対角成分がすべて 1 の上三角行列の成す部分群とする.

(i)　U は G の Sylow p 部分群であることを示せ.

(ii)　G の Sylow p 部分群の個数を求めよ.

$\boxed{3}$　k を体とする．$k[x]$ を k 係数一変数多項式環とする．R は k を含む $k[x]$ の部分環であり, 次数が互いに素な二つの定数でない多項式を含んでいるものとする．このとき次を示せ.

(i) 商ベクトル空間 $k[x]/R$ は k 上有限次元である.

(ii) $k[x]$ の零でないイデアルであって R に含まれるものが存在する.

$\boxed{4}$

(i) $X = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid |x| \geq 1\}$ の商空間 $X/\sim$ の整係数ホモロジー群 $H_*(X/\sim, \mathbf{Z})$ を求めよ．ただし, $\sim$ は X の境界 ∂X において

$$x \sim -x \qquad (x \in \partial X)$$

で定まる同値関係である．

(ii) $Y = \{y \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq |y| \leq 2\}$ の商空間 $Y/\approx$ の整係数ホモロジー群 $H_*(Y/\approx, \mathbf{Z})$ を求めよ．ただし, $\approx$ は Y の境界 ∂Y において

$$y \approx -y \qquad (y \in \partial Y)$$

で定まる同値関係である．

$\boxed{5}$ 二つの二次元ユークリッド空間

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\}, \qquad U_2 = \{(x', y') \in \mathbf{R}^2\}$$

を考え, その disjoint union $U_1 \sqcup U_2$ の商空間を $M = U_1 \sqcup U_2/\sim$ とする．ただし, $\sim$ は $(x, y) \in U_1$, $x \neq 0$ と $(x', y') \in U_2$, $x' \neq 0$ が

$$x' = \frac{1}{x}, \qquad y' = xy$$

をみたすときに

$$(x, y) \sim (x', y')$$

として定まる同値関係である．

(i) M がハウスドルフ空間であることを示せ．

(ii) M に C^∞ 級多様体の構造を一つ与えよ．以下 M はその構造により C^∞-級多様体とする．

(iii) U_1 上の C^∞ 級関数 $f : U_1 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ を

$$f(x, y) = (y, xy)$$

によって定めたとき, M 上の C^∞ 級写像 $\tilde{f} : M \longrightarrow \mathbf{R}^2$ に拡張されるかどうかを調べよ．拡張される場合は臨界点を全て求めよ．

(iv) m, n を 0 以上の整数とするとき U_1 上の C^∞ 級ベクトル場

$$x^m \frac{\partial}{\partial x} + y^n \frac{\partial}{\partial y}$$

が M 上の C^∞ 級ベクトル場に拡張されるための m, n に関する必要十分条件を求めよ．

$\boxed{6}$ $\{(t,x) \in \mathbf{R}^2 \,|\, t \geq 0\}$ 上の関数 $u = u(t,x)$ に対して次の初期値問題を考える.

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\[2ex] u(0,x) = \dfrac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

(i) x に関するフーリエ変換を利用してこの初期値問題 $(*)$ を解け.

(ii) u が

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\, t^n$$

という展開をもつと仮定する. $(*)$ を用いて $\{u_n(x)\}_{n=0,1,\cdots}$ を求めよ. この展開は収束するか.

(iii) (i) で求めた解と (ii) の展開との関係について論じよ.

$\boxed{7}$ 区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数 $f(x)$ であって $f(0) = f(1) = 0$ をみたすもの全体を X とし, 写像 $\Phi : X \longrightarrow X$ を, $f \in X$ に対し,

$$\big(\Phi(f)\big)(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\[1ex] \dfrac{1}{2x} \displaystyle\int_0^{2x} f(y)\, dy & (0 < x \leq 1/2) \\[2ex] \dfrac{1}{2-2x} \displaystyle\int_{2x-1}^{1} f(y)\, dy & (1/2 < x < 1) \\[1ex] 0 & (x = 1) \end{cases}$$

で定義する. $f_0 \in X$ を $[0,1]$ で下に凸であると仮定し, 関数列 $\{f_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ で定義するとき, 次の問に答えよ.

(i) $f_0(x) \leq 0$ かつ $f_0(x) \leq f_1(x)$ がすべての $x \in [0,1]$ に対して成り立つことを示せ.

(ii) $f_n(x) \leq 0$ かつ $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ がすべての $x \in [0,1]$ とすべての $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して成り立つことを示せ.

(iii) f_n は $0 \in X$ に一様収束することを証明せよ.

$\boxed{8}$ 三次元空間 $\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z) \mid -\infty < x,y,z < \infty\}$ において，z 軸を極軸とする極座標を (r,θ,φ) とする．原点を中心とする半径 $a\,(>0)$ の剛体球の外側に密度 ρ が一定の非圧縮流体があるとする．球が z 軸を回転軸として，時間的に周期的な角速度 $\Omega = \Omega_0 \cos(\sigma t)$ で回転運動をする場合を考える．ただし，Ω_0 と σ は定数である．このとき流体運動は z 軸について軸対称で，流体速度は φ 方向の速度成分 $v(r,\theta)$ のみを持つとすると，流体の運動粘性を ν（定数とする），圧力を p，時間を t として次の方程式が成り立つ．

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2\sin^2\theta}\right]$$

この方程式に関して次の問に答えよ．

(i) $\dfrac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$ を示せ．

(ii) $\omega = \dfrac{v}{r\sin\theta}$ とするとき ω が θ に依存しない（すなわち $\omega = \omega(r,t)$）と仮定して，ω の満たす方程式を導け．

(iii) (ii) で導いた方程式について，

$$\omega(r,t) = \mathrm{Re}\Big[e^{-\alpha(1+i)r+i\sigma t} r^n g(r)\Big]$$

（$g(r)$ は r の多項式，$n \in \mathbf{Z}$）の形を仮定して，境界条件

1. $\omega \longrightarrow 0 \ (r \longrightarrow \infty)$
2. $\omega(a,t) = \Omega_0 \cos(\sigma t)$

を満たす解 $\omega(r,t)$ を求めよ．ただし，$\alpha = \sqrt{\sigma/2\nu}$ とする．

9　正準反交換関係

$$\{c_i, c_j^*\} = c_i c_j^* + c_j^* c_i = \delta_{ij}\,\mathbf{1}$$

で特徴付けられる自由度 n のフェルミ粒子の生成消滅演算子を c_i^*, c_j $(i, j = 1, \cdots, n)$ とする．ただし，$\mathbf{1}$ は恒等演算子である．d 個の元からなる基底 $\{X_1, \cdots, X_d\}$ を持つ Lie 環 $\mathfrak{g}$

$$[X_a, X_b] = \sum_{c=1}^{d} f_{ab}^c\, X_c$$

の n 次元表現 τ が $\{c_i^* \,|\, i = 1, \cdots n\}$ ではられる複素 n 次元ベクトル空間上に

$$\tau(X_a)\, c_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j^*\, (\tau_a)_{ji}$$

で与えられているとする．

(i)

$$(c^* \tau_a c) = \sum_{i,j=1}^{n} c_i^*\, (\tau_a)_{ij}\, c_j$$

とおくと，これは $\mathfrak{g}$ の一つの線形表現を与えること，すなわち次が成り立つことを示せ．

$$\big[(c^* \tau_a c),\, (c^* \tau_b c)\big] = \sum_{c=1}^{d} f_{ab}^c\, (c^* \tau_c c).$$

(ii)　複素 n 次行列全体の成すベクトル空間 $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ の基底 λ_a $(a = 1, 2, \cdots, n^2)$ が $\mathrm{tr}(\lambda_a \lambda_b) = m\delta_{ab}$ $(m > 0)$ を満たせば，「Fierz の恒等式」

$$\sum_{a=1}^{n^2} (\lambda_a)_{ij}\, (\lambda_a)_{k\ell} = m\, \delta_{i\ell}\, \delta_{jk} \qquad (i, j, k, \ell = 1, \cdots, n)$$

が成り立つことを示せ．

(iii)　$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$, $n = 2$ のとき $\sum_{a=1}^{3} (c^* \tau_a c)^2$ を $\hat{N} = \sum_{i=1}^{2} c_i^* c_i$ を用いて表わせ．ただし符号因子を $\varepsilon_{abc} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ と書くと $\mathfrak{su}(2)$ の Lie 環の構造は $[X_a, X_b] = \varepsilon_{abc}\, X_c$ で与えられる．

$\boxed{10}$ p と q は相異なる正整数とする．$\{p^i q^j \mid i, j = 0, 1, 2, \cdots\}$ の要素を小さいものから順に n 個列挙するプログラムで，高々 n に比例したステップ数の計算しか必要としないものを書け．またそれがステップ数についての要求を満たしていることを示せ．プログラムは C, FORTRAN, Pascal 等の手続き型（命令型）プログラミング言語か，Java 等のオブジェクト指向プログラミング言語を用いて書くこと．なお言語の詳細に拘る必要はない．

$\boxed{11}$

(i) ネットワーク・フローに関する最大流最小カット定理を正確に述べよ．

(ii) 非負整数 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_m$ と $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_n$ が $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j$ を満たしているものとする．全ての $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$\sum_{i=1}^{m} \min\{\alpha_i, k\} \geq \sum_{j=1}^{k} \beta_j$$

が成り立つとき，かつそのときに限って

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} q_{ij} = \beta_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

を満たし，成分が 0 か 1 の $m \times n$ 行列 $Q = (q_{ij})$ が存在することを示せ．

$\boxed{12}$ X を無限集合，$X^{(1)}$ を X 上の関数 $f : X \longrightarrow X$ 全体の集合，$X^{(2)}$ を $X^{(1)}$ 上の関数 $F : X^{(1)} \longrightarrow X^{(1)}$ 全体の集合とする．関数列 $F_0, F_1, F_2, \cdots \in X^{(2)}$ を

$$F_0(f) = I \quad (I \text{ は } X \text{ 上の恒等関数 } I(x) = x)$$

$$F_{n+1}(f) = f \circ F_n(f)$$

により定義する．また X 上の二項関係 $R \subseteq X \times X$ が与えられたとき，$R^{(1)} \subseteq X^{(1)} \times X^{(1)}$, $R^{(2)} \subseteq X^{(2)} \times X^{(2)}$ をそれぞれ

$$f\, R^{(1)}\, g \iff \forall a, b \in X\ \bigl(a\, R\, b \Longrightarrow f(a)\, R\, g(b)\bigr)$$

$$F\, R^{(2)}\, G \iff \forall f, g \in X^{(1)}\ \bigl(f\, R^{(1)}\, g \Longrightarrow F(f)\, R^{(1)}\, G(g)\bigr)$$

により定義する．このとき，任意の $F \in X^{(2)}$ に対して次の条件が同値であることを示せ．

1. ある $n \geq 0$ について $F = F_n$ となる．
2. 全ての $R \subseteq X \times X$ について　$F\, R^{(2)}\, F$ が成り立つ．