平成２５年度 京都大学大学院理学研究科修士課程 （数学・数理解析専攻　数理解析系）

入学試験問題

基礎科目

◎　問題は ５題 ある. ５題 とも解答せよ.

◎　解答時間は　３時間　である.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等は, 指定された荷物置場に置くこと.

［注意］

1　指示のあるまで問題冊子を開かないこと.

2　解答用紙・下書き用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.

3　解答は問題ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ. 一問を二枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.

4　提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 下書き用紙をその下に揃え, 記入した面を外にして, 一括して二つ折りにして提出すること.

5　この問題冊子は持ち帰ってもよい.

［記号について］

設問中の $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ は, それぞれ, 整数, 有理数, 実数, 複素数の集合を表す.

$\boxed{1}$　次の (i), (ii) に解答せよ．

(i) 次の 3 次正方行列 A_i $(i = 1, 2, 3)$ に対して，A_i^{2012} を求めよ．

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) 行列式

$$\begin{vmatrix} & & & b_1 \\ & E_n & & \vdots \\ & & & b_n \\ a_1 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}$$

を求めよ．ただし，n は正整数，E_n は n 次単位行列，a_i, b_j $(1 \leq i, j \leq n)$ は実数とする．

$\boxed{2}$　m と n は正整数で，$m \leq n$ とする．A と A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ は m 行 n 列の実行列であって，$k \to \infty$ のとき A_k の各成分が，対応する A の各成分に収束するものとする．さらに，A の階数が m であると仮定する．このとき，十分大きな k について，A_k の階数が m であることを証明せよ．

$\boxed{3}$　次の (i), (ii) に解答せよ．

(i) 実数 x に対して，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \right)$$

を求めよ．ただし，Arctan は tan の逆関数で，$-\pi/2 < \mathrm{Arctan}\, x < \pi/2$ とする．

(ii) 定積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\, nx}{\sin\, x} dx$$

を求めよ．ただし，n は正整数とする．

$\boxed{4}$ 実数 $x>0$ に対して，

$$f(x)=\int_0^1 \frac{\cos\,\pi y}{x+y}dy$$

とおく．このとき，次の (i), (ii) に解答せよ．

(i) $g(x)=f(x)-\dfrac{2}{\pi^2 x(x+1)}$ とおくとき，すべての $x>2$ に対して，

$$|g(x)|\leq \frac{C}{x^3}$$

となる定数 C が存在することを証明せよ．

(ii) 極限値

$$\lim_{x\to+\infty} x\sum_{k=1}^{\infty} f(x+k)$$

を求めよ．

$\boxed{5}$ 実正方行列 A に対して，非負整数列 $R(A)$ を

$$R(A)=\bigl(\mathrm{rank}(A),\,\mathrm{rank}(A^2),\,\mathrm{rank}(A^3),\,\ldots\bigr)$$

で定める．ただし，$\mathrm{rank}(B)$ は行列 B の階数を表す．正整数 n に対して，

$$\mathbb{S}_n=\bigl\{\,R(A)\bigm| A\text{ は }n\text{ 次実正方行列}\,\bigr\}$$

とおくとき，次の (i), (ii) に解答せよ．

(i) $\mathbb{S}_2$ を決定せよ．

(ii) 任意の正整数 n に対して，$\mathbb{S}_n$ は有限集合であることを証明せよ．