数学入門公開講座

平成元年7月25日(火)から8月3日(木)まで

京都大学数理解析研究所

平成元年度(第12回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 平成元年7月31日～8月3日開催)

数学入門公開講座

講師及び内容

1. 定角曲線について

京都大学数理解析研究所・教授　松　浦　重　武

定角曲線についてその存在と、関連する変分問題について述べる。

2. 微分方程式と数値解法

東京電機大学理工学部・教授　一　松　　信

微分方程式は自然現象・社会現象を通じて、有用な数学モデルを提供しているが、それが解析的に解けるのは極めて限られた場合だけである。近年計算機の発展に伴い、数値解法が強力な道具となって、多くの興味ある事実が発見された。しかし数値解法では、大域的な性質を知るのに困難が多く、「Symbolic Graphic Numeric の三位一体」が望まれている。ここではその背景を念頭におき、数値解法を主体とした微分方程式の入門コースを試みる。

3. 確率・意思決定

京都大学数理解析研究所・助教授　楠　岡　成　雄

今日、確率・情報といった言葉がよく用いられるが、きわめてあいまいな意味で使われることが多い。この講義では確率という概念が諸科学でどのように用いられているのかを見ていきたい。前半では、確率とは何かという問題を確率の歴史、自然科学；社会科学に現われる確率概念等を通じて考えていく。前半の最後ではコルモゴロフ以後の確率論の考え方を考察する。

後半では、統計学における決定問題ゲームの理論等々を題材に意思決定の問題を考えていく。

4. 空間との長いつきあい

京都大学数理解析研究所・助教授　成　木　勇　夫

自然の中での生存と言う人間の基本的様態によって形成された空間の概念を、古代ギリシャのユークリッド幾何から始め、代数的演算とともに発達した近代解析幾何、微積分学の影響下に成立した微分幾何、多様体の大域的性質を対象とする位相幾何等の概説を通して一貫した流れを追求し、現代的展望に至る。

時　間　割

時間＼日	7月25日(火)	26日(水)	27日(木)	28日(金)	29日(土)	30日(日)	31日(月)	8月1日(火)	2日(水)	3日(木)
13:15～15:00	松浦	松浦	松浦	松浦	休		楠岡	楠岡	楠岡	楠岡
15:00～15:15	休憩						休憩			
15:15～17:00	一松	一松	一松	一松	講		成木	成木	成木	成木

平成元年度(第12回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 平成元年7月31日～8月3日開催)

4. 空間との長いつきあい

京都大学数理解析研究所・助教授　成　木　勇　夫

1989, JULY 31 AUGUST 1,2,3, 15:15-17:00

空間との長いつきあい

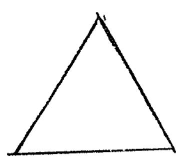
京都大学数理解析研究所
成木勇夫

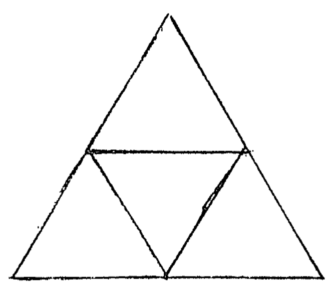
1．数学の起源については色々の説がある。数の概念は人間が産み出したものであるので、これを人間が種々の意味で必要としたことは言うまでもない。まず挙げられるのは、獲物の量を表すために数を要したことであろうが、これは何も人間の専売特許ではなく、或種の高等動物は既にこの観念を持っており、凡そ自分の生存と関係の深い対象の大小を識別できないような生物は殆ど無いであろう。人間が数概念を高度に発達させた理由は、もっと複雑であるように思われる。実際物の個数を概念として個々の対象から切り離して抽象的存在として確立するのに、人類は随分時間を費したと言われている。このことは現在我々の使っている言語における数表現の不完全さから推測されるのである。文字が出来、確かな記録の残っている古代文明において初めて数は明確に表現されるようになった。人間が社会的動物として確立すると文字——

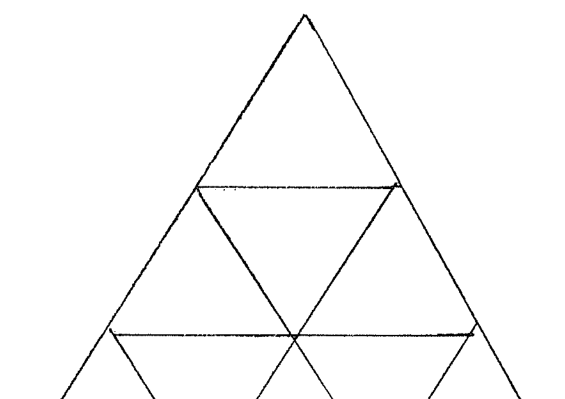
そのうちに数学も含まれている ―― は集団の支配を可能にするものとして登場する。例えばエジプトの象形文字は最初、神聖文字であった。古代人は、国家或は民族と言うような集団の行動ベクトルを占いと言うような祭儀によって決定した。祭儀を執行するのは、神官・書記などの階級であり、彼らは言語を管理し、神とか王とか理想化されたシンボルに依拠することにより律法を制定し、色々の人間の行為を様々に律した。ヘロドトスによれば幾何学はエジプトにおいて測量術として成立した。しかし、幾何学者は測縄士と呼ばれ、祭儀をも司どった。ナイルはほぼ一年を周期に氾濫し、その時期が天球におけるシリウスの位置によって予言できることから天文学が発達し、これはまたエジプト人に暦を与えた。天文に関する知識を管理する者として祭司階級が生れ、彼らはまた氾濫後再び耕地を測量することを仕事とした。エジプトと並ぶ古代文明の一つメソポタミヤもチグリス・ユーフラテスの二大河川の流域の沃地であったので、諸民族の争奪の対象となり、多くの王朝が興っては亡んだ。当然ここでは商取引が盛んで計算術は極度に発達した。特に、代数学は、一般二次方程式

の解法は勿論，数表を使った一般三次方程式の解法さえ出来る程高度に発達した。彼らの幾何学もエジプトのそれに比べて劣っていた訳ではない。実際，有名なピタゴラスの定理も彼らによって最初に定式化され応用された。また，兄弟の相続のときの土地の分割方法が幾何学の演習問題となる程であった。人はここで数学は支配の，或は，交易のために創造されたと思うかも知れない。これに対してアリストテレスは，エジプトの祭司階級は労働から解放されていたために，彼らの余暇が数学を産み出したと言う。この説が正しいと思われる根拠が先史時代にもあると言われる。この時代に作った土器の紋様は，規則性と対称性を持っていて，人間の美的な感性に訴えかけて来る。祭儀に用いられる様々の品々の形状，祭儀そのものの形式なども一定の規則性を持っている。そして人はこの形式を伝統として保存しようとする。人はまたこれを規範として従い，自らの行動に方向性を与える基準とする。こう考えると，この対称性に対する美的感性は人間に本来的に備っているものと思われる。もしそうだとしたら，それは宇宙的法則性の人間における発露なのではあるまいか。何か妄想めいた命題で

この節は終ろうとしているが、それが妄想とばかり言えないような例を我々はギリシヤ数学のうちに見るであろう。実際 人の心のうちに、宇宙的法則性への限りない情熱を発見するのは全く珍しいことではないのである。

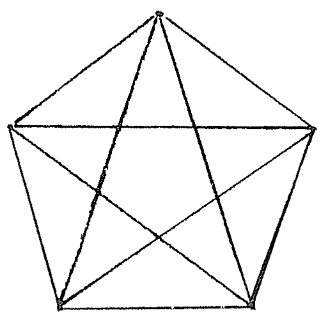






2. 最初にギリシヤ半島に侵入した頃、ギリシヤ人は蛮人であった。しかし、彼らは知識を吸収し、それを応用する能力に卓抜していて、何事も根本から追求する情熱を持っていた。また彼らは旅行好きの抜目のない商人でもあったので、エジプト・メソポタミヤの文化に接したとき、その蓄積を積極的に吸収したと想像されている。現在、数学においてピタゴラスの定理など発見がギリシヤに帰されているものは多いが、先行文明の延長上にないものがどれ程あるかは疑問である。しかし哲学＝Philosophy の語源「智への愛」が示すように、彼らの学問への情熱は桁外れなものであった。外界の対象との直接的関係を断ち切って人間の精神的能力の可能性を極限にまで追求したので、宗教さえも政治的集団的儀式を乗越えて独立した個人の信条・信仰のレベルに到達した。特にピタゴラス学派においては、数学もまたこのような情熱の中で育まれた。この学派の特徴は数に対する神秘主義である。奇数は男性、偶数は女性を象徴し、1は理性の数，2は意見の数，3は最初の真奇数，5は婚姻数，4は正義・応報の数，6は創造の数 云々。彼らは中心火のまわりを天球

に従って回転する宇宙モデルを考案し、調和音を出す弦の長さの比への類比から、宇宙の奏でる音楽をさえ聞いたと伝えられる。全ての量は整数比に還元できると言う主張は彼らの信仰上のドグマであったが、この学派のシンボルマークであったペンタグラムの中に通約不能量が含まれていたのは歴史の皮肉である。

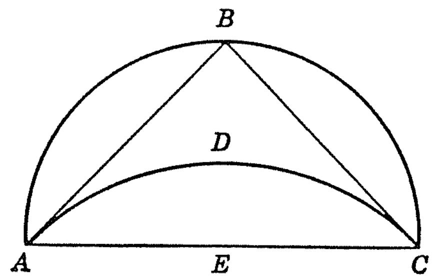


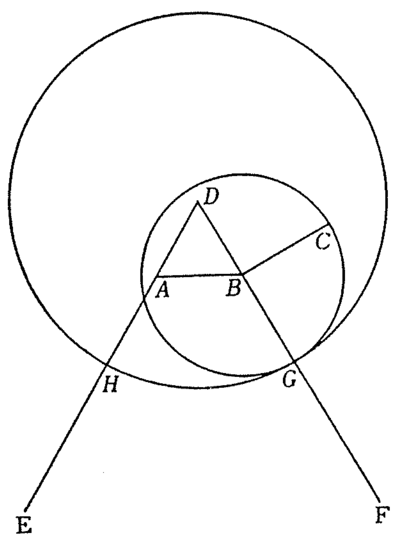
この図形のうちには3種類の相似三角形が含まれており，それらは後にKeplerが黄金分割と呼んだ所の比 $(\sqrt{5}-1)/2 = 2/(\sqrt{5}+1)$ を与えるのである。ドグマは否定されたが、この学派の宇宙の根源に対する無限の探究心は、時代を越えた真実なものとして多くの人々の共感を呼び、今日にまで引継がれているのである。(例えばKepler, Galileo, Newton等。) さて $\sqrt{2}$ が通約不能量であるこ

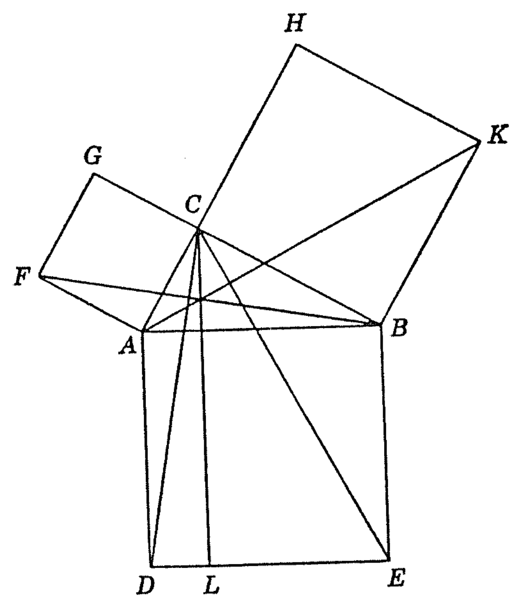
との証明に見られるような高度の論理の完成はギリシヤ文化最大の功績の一つであろう。エレアのゼノンの連続性又は運動に関する逆理は余りにも有名であり説明の必要はない。アキレスと亀の話は連続性の否定に導くが、これに対し、矢またはスタジアムの逆説は時間・空間の不連続性の否定へと導く。ギリシヤの逆理は他にも色々あり、現代の数学基礎論においても決定的な役割を果した。時空の概念に対してギリシヤの提出した疑念は、今日の科学を持ってしても正しく答えられていないようである。さて、通約不能量の発見は、数学においては人々の関心を数よりも長さ等幾何学的量に向わしめたようである。先行文明の遺産を引継いだギリシヤの幾何学はターレス・ヒポクラテス・ヒッピアス・アルキュタス・デモクリトス等の業績を通してユークリッドの原論（Stoichia）のうちに結実する。幾何学を学ぶとき、点・直線・平面などは予めよく判っていなければならない。ユークリッドは一応、点・直線・平面の定義を与えているが、今日から見れば誠に曖昧な言明と言わざるを得ない。さて、

これらの幾何学的対象の間には実に様々の法則が成立つのであるが、ギリシヤ数学は、これらのうちの極少数を仮定すれば、他は全て論理的必然として演繹できることを発見したのである。この証明され得ない法則は公理と呼ばれ、他は定理と呼ばれた。今日の公理主義的立場から言えば点・直線・平面などの基礎概念は公理によって定義される。これは一応合理的な理解ではあるが、そうすると無矛盾な公理系は全て意味を持っているのかと言う問題が生ずる。公理系の正当性を正しく論ずるのはむしろ哲学の課題であってここで深入りすることはできないが、私は、人間が自分を取巻く世界をどのように捉えるかと言うに帰らざるを得ないと思うのである。それはともかく、「幾何学を知らざる者、ここに入るべからず」とプラトンのアカデミアの入口に刻まれていたと言われているように、ユークリッド幾何が一切の欺瞞を排除して物事を正しく論じて行く真面目な態度は広く受入れられ賞讃されて来た。このような真摯な態度が数学のみならず、政治のような

全人格性の要求される分野でも求められているのは言うまでもないことである。このような伝統を遺産として，後の人類に残したギリシヤ文化は誠に偉大である。







3。前節までで幾何学がギリシヤにおいて一個の独立した学問となったことを見たのであるが、このような数学史的観点を貫きながら議論を進めることは時間の制約上出来ない。それよりも単刀直入に、近世の解析幾何特に射影幾何の概説に這込りたいと思う。古代ギリシヤの学問の真髄は実利的な一部を除いて殆ど続くローマ世界には受継がれなかったようである。古カトリシズムもまた，神学を基礎付けるに必要な末期ギリシヤ哲学を利用はしたがユダヤ的伝統的神観からギリシヤの明晰な科学的精神を排除したかのように思える。以後十字軍・ルネッサンスの時代に至るまで、ギリシヤ文化を継承保存し勃興するヨーロッパに伝えた者はイスラム世界であった。数学は再び代数学の故郷に戻り新しい活力を与えられたのである。代数的手法を幾何に持込んだ解析幾何学はデカルトをもって成立したのであるが，イスラムにおいて三次または四次の方程式の解を二つの円錐曲線の交点として求めると言うようなことが行われていた。しかし、代数において最も重要である記号法が充分に発達していなかった。それの

完成とともに、真の意味の解析幾何学が誕生したのである。アイデアの観点を別とすれば幾何学における解析的方法の優位は明らかである。デカルト座標系 (x, y) における平面~~曲~~直線の方程式は

$$ax + by + c = 0$$

の形である。これは「直線とはその上の点について一様に横わる線である」と言うようなユークリッドの定義と比較して、はるかに明確で疑念の余地がない。しかも点・直線の満す諸公理も直接計算によって検証できる。平行でない二直線が唯一点で交わることも、二元二連立方程式の解が一つ定まることと対応し、二直線の平行性も解析的に定式化できる。平行線の公理の検証などもお立所である。もちろん、我々が上のような方程式に到達したのは幾何学的考察によってであった。しかし一旦方程式が確立してしまえば、幾何学的事実は解析的・代数的に証明される。一体、代数とは何か、幾何とは何か。実は全く同一物であったのではないかと言う認識に導かれる。こ

の認識は全く正しい。では何か新しいことがあるのか。二つの異って見えた物が同一物であることを認識するのは本当に大きな発展なのである。幾何学的法則性が代数的解析的世界の演算の一つの顕現であるのなら，この演算の世界の中に通常の幾何とは違った幾何を作ることはできないだろうかと考える。実に非ユークリッド幾何はこのようにして正当化されたのである。換言すれば，ユークリッド幾何も非ユークリッド幾何も同一物の異った発現の形態に過ぎないのである。代数的方法の優位は次の点にもある。演算が幾何を成立させるとしたら、その演算が成立つような別の数体系の中で，同じ形の幾何が成立つのである。デカルトの時代まだ複素数は市民権を得ていなかったが、幾何学はこの数体系の上にも展開することが可能なのである。唯注意して置かねばならないのは，点・直線・平面とか言った一次の関係式で定義されている物を扱っている限り何の違いも起らないのであるが，円錐曲線など二次の関係式で定義されるものを扱うときは，明らかな差違が生ずる。これは大体，実数の範囲では二次以上の方程式が解を

持ったり持たなかったりするのに、複素数の範囲では常に解が存在することと対応している。これから見ても解るように、或意味で複素数体上の幾何学の方が易しいのである。このように幾何と代数が同一物であると言う認識が如何に実り多く豊富な数学的対象の世界を提供してくれるかを我々は後に見ることになろう。

4. 話を射影幾何に戻そう。今、一眼子僧となり視点を原点において世界を眺めれば、我々にはもう遠近は判らず、視線上の点はそれが線のどこにあろうが全く同じに見えるであろう。従って空間座標 (x, y, z) は座標間の比のみが問題とされる。即ち この比 —— $(x : y : z)$ と書く —— がこの射影的世界における点なのである。原点を通る直線 即ち視線の全体が宇宙となるのである。このような世界を表現しようと思うとき、我々はカンバスのようなものを眼前に置き、見えるすべての物をその上に射影＝投影するであろう。このカンバスは原点を通らない平面であるが、この平面上に宇宙の全ての点を投影できるとは限らない。即

ち、この投影のために固定された平面に平行な視線はこれと交わることがないのである。原点を通りカンバスに平行な平面に含まれる視点に対応する宇宙の点はカンバスがいくら大きくても、その上に表現することが出来ないと言うことである。このような点集合が出来るのはカンバスの取方によるのであって、この集合は全宇宙において何ら特別な意味を持つものではない。実際もう一つのカンバスを最初のものと平行にならないように取れば、今除外された点集合の殆ど全ての点はこの上に回復できる。そして、その点集合は第二のカンバスの上の一直線となって現われるであろう。残っている点は唯一つであって、対応する視線は二つのカンバスの交線と平行である。この視線と交わるように第3のカンバスを置けば、結局これも表現を得ることになる。今や我々は、射影的宇宙の全体像を得るためには、同一点が二つ以上のカンバス上に表されるとき、どの点がどの点に対応するかをはっきりさせておけばよいのであるが、これが原点を通る視線によることは自明である。このような対応により三つのカンバスを貼り合せて

端も角もない，二次元的に自由自在に行来のできる世界が出来上る。これが我々の射影平面である。何故平面と呼ぶかは明らかであろう。この平面に置ける直線とは直線的な視線集合，即ち原点を通る平面であり，方程式で言うと

$$ax + by + cz = 0$$

の形に表せる。カンバスとして平面 $z=1$ を取れば，これが最初に与えた直線の方程式と対応しているのは一目瞭然である。こうして射影平面上の直線が通常の平面直線の拡張となっていることが判るのである。唯，この射影的2次元の世界では奇妙なことが起る。原点を通る相異なる二つの平面

$$ax + by + cz = 0$$
$$a'x + b'y + c'z = 0$$

は原点を通る一直線＝視線で交わる。実際，この視線は比 $(bc'-b'c ; ca'-c'a ; ab'-a'b)$

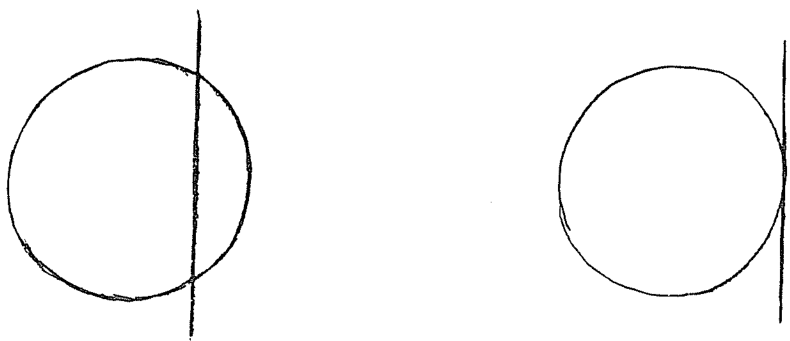
で与えられる。この事実は，射影平面においては，任意の相異なる二直線は必ず一点で交わることを言っている。これは通常のユークリッド平面では考えられないことである。しかし、これは我々の経験から言って、決して驚くべきことではない。実際、地平では交わることのない真直で平行な二本のレールが絵に描かれたときは地平線上の一点で交わるのである。この場合，絵の面と地平とが射影平面を作るときの二枚のカンバスの役割をしている。ここで注意して置かねばならないのは，この射影平面では二点間の距離とか三角形の面積とか大きさを計る尺度 —— 計量と呼ばれる —— は与えることは出来ないことである。実際，二つの異なるカンバスの上では物の大きさは異って見えるのである。

5. 通常のユークリッド平面に対する射影平面の優位は特に円錐曲線を考えるときの便利さにおいて現れている。円錐曲線は，その名の示す通り円錐をその頂点を通らない平面で切ったとき，その平面上に円錐との交線として現れる曲線のことである。ギリシヤ後期最高峰の幾何学者アポロニウス

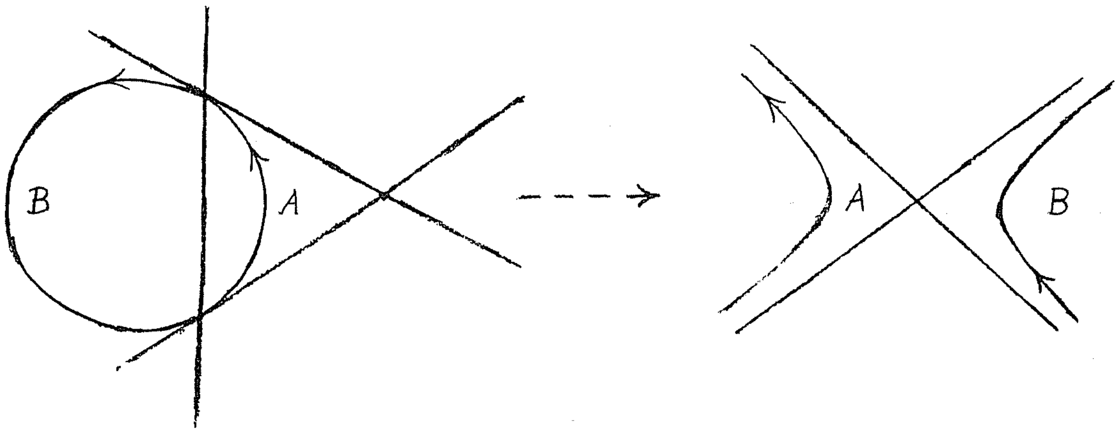
がこの曲線を詳細に研究したことは余りにも有名である。彼はこれを焦点とか準線とか言った幾何学的対象からの距離の和または差が一定である点の軌跡として計量的に特徴付けた。アポロニウスが射影的に考察したかどうかは知らないが，既に一葉の円錐ではなく二葉のものを考えることの合理性には気付いていた。

いずれにせよ，我々の立場では，視点＝原点を円錐の頂点におき，円錐を切る平面はカンバスであると思うのが最も合理的である。こうすれば、まさしく円錐曲線とは円錐に含まれる視線の代表する射影的世界の点の集合をカンバス上に投影して見た像に他ならない。従ってカンバスに無限遠直線を補って射影的平面に移行すれば，この点集合はその姿を完全に現す。これが射影的円錐曲線であって、射

影的に見た円錐そのものである。こうして，円・楕円・放物線・双曲線の区別はなくなってしまうのである。この区別はカンバスと写すときの無限遠直線と曲線の位置関係によって生ずるのみである。カンバスの位置を変えても，除外直線の外ではカンバス同士の点々対応はあるのだから，今や楕円も放物線も双曲線も適当な除外点を取去ってしまえば，それらの置かれてる平面をこめて一対一に対応するのである。カンバスに写して見たとき円または楕円に見えるとき，それは曲線の完全像であるが，双曲線，或は放物線に見えるときの無限遠直線と曲線との位置関係は他の適当なカンバスに写し出して見ると次の通りである。



このように見ると，双曲線の二本の漸近線に対して射影幾何学的な意味がつく。それらは，即ち，見ているカンバスに対する無限遠直線との二交点における円錐曲線の接線に他ならない。

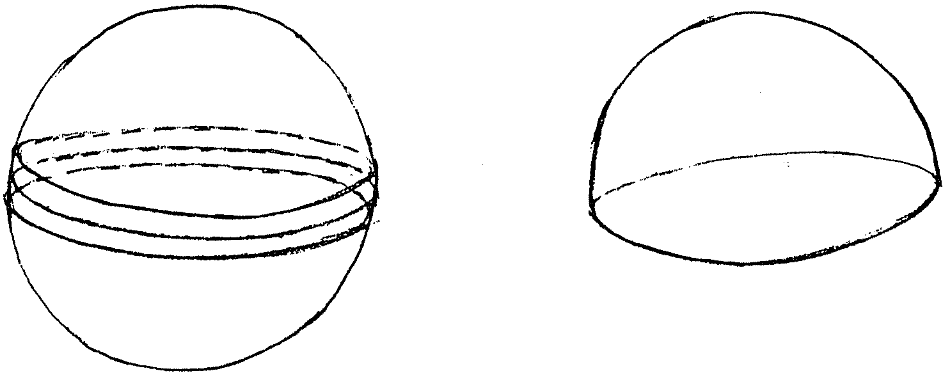


ここで、曲線上の点が無限遠の点に近づき，これを超えて再び有限の場所に姿を現す仕方に注意する。このことの意味を次節で説明する。

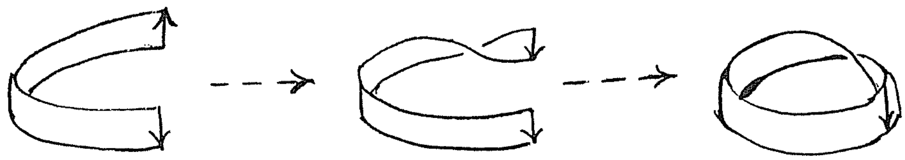
6. 先に射影平面は原点＝視点から空間を眺めたときに生ずる2次元的世界だと述べたが、視線は原点を通る直線とした。これは我々の感覚からすると少し不自然なことである。何故なら頭の後に視線は延びることはないし、背後には一般に全く別の世界があるからである。この不自然さは円錐曲線を考えるときは不可欠のものであった。それにも拘らず，その理論的整合性に反して，実射影平面は向付け可能な曲面ではないと言う事実となって、この

不自然さは残ってしまうのである。今からこの曲面が位相幾何学的にどのようなものであるかを見て見よう。我々が球形の存在で相変らず一眼なのだが、その眼を空間のどの方向にでも自在に向けることの出来る生物であるとする。我々には、そのとき以前に使った平らなカンバスの代りに、自分を中心とする球面をカンバスとして用い、その上に世界を投影するのが便利であろう。このとき出来る2次元的世界は球面そのものであって、星座のある天球か、我々の住んでいる地球の表面のようなものであると思ってよい。この世界での直線は、射影平面の場合と同じく、中心を通る平面との交わり、即ち大円となる。こうすると、任意の相異なる二直線は二点で交わり、この世界もまた非ユークリッド的である。明らかに、この世界は前に考察した射影平面と遠いものではなく、後者は対心点——中心をはさんで向い合う二点——の対を同一視により一点と見なすことにより得られる。この表現により、実射影平面の位相的構造が明らかとなる。先ず球面から、赤道を中心線とする帯状領域を切り取る。残りは二個の椀状領域となるが、これらは射影平面上の領域と見るとき互に同一視されるから、そのうち一

方のみを取って、これを射影平面上の対応する領域であると思うことにする。



さて帯状領域の方であるが、これも経度0°と180°の線で切目を入れて二つの部分とする。この二つの部分も上の同一視によって、互に他によって代表されるので、やはり一方のみを選んで射影平面上の領域と見る。この選ばれた部分で互に同一視される点があるかどうか調べて見ると、経線に沿った二つの切目のみが互に同一視されることが判る。この境界での同一視を図のような貼合せによって実行すると、よく知られたメービウスの帯が得られる。帯の境界は今や一続きとなり、これは先の椀状領域の境界と同一視されるべきものである。



この最後の同一視を同じように貼合せによって（頭の中で）実行すれば、求める実射影平面の位相的像が出来るのである。良く知られているように、メービウスの帯においては、境界をよぎることなく裏側に出ることができるから、実射影平面も同じく方向付可能ではない。裏側に出るという言方が曖昧ならば次のように考えてもよい。曲面が与えられているとき面上のある点で右まわりを予め決めて置く。そのまわり方を保ったまま面の中を適当に移動して元の位置に戻ったとき、保存してきたまわり方が、元の場所に固定して置いたまわり方と丁度反対のものになっているように出来るとき曲面は方向付不能であると言われる。上の場合、帯の部分に沿って移動すればよいのである。

7. 我々は三枚の平面を貼合せることにより射影平面を得たのであるが，このときこれらを互に貼合せるのに用いた変換は次のようなものであった。射影の中心即ち原点 O を通らない二つの平面を H_1, H_2 とし、それらは互に平行でないとする。O を通り H_1, H_2 に平行な平面を夫々 H_1', H_2' とする。仮定により H_1 と H_2', H_1' と H_2 とは交わりその交線を l_1, l_2 とする。明らかに O からの射影により $H_1 - l_1$ と $H_2 - l_2$ とは一対一に対応する。H_1, H_2 上に夫々座標系 (x, y), (X, Y) を取るとき、上の対応は次の形の式によって与えられる。

(1)
$$\begin{cases} X = \dfrac{a'x + b'y + c'}{ax + by + c} \\[2ex] Y = \dfrac{a''x + b''y + c''}{ax + by + c} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{A'X + B'Y + C'}{AX + BY + C} \\[2ex] y = \dfrac{A''X + B''Y + C''}{AX + BY + C} \end{cases}$$

ここに $ax + by + c = 0$, $AX + BY + C = 0$ は夫々, l_1, l_2 の定義方程式である。また，次の二つの行列は互に逆行列となるように取れる。

$$\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

ここで H_1, H_2 を直交座標系 (x, y), (X, Y) の座標軸が重り合うように移動させれば, 上の変換は同一ユークリッド平面から自分自身への変換と理解することができる。この変換及びその逆変換はしかし或る直線 — l_1, l_2 に相当する — に沿って定義が出来ない。しかし, この平面に無限遠直線を補って射影平面とすれば, 上の変換は自然に拡張されて, 全射影平面から自分自身への変換となり, 定義のできない場所は消滅するのである。実際, 射影平面の同次座標を使えば, 式

$$(2) \quad \begin{cases} X = a'x + b'y + c'z \\ Y = a''x + b''y + c''z \\ Z = ax + by + cz \end{cases}$$

によって点 $(x : y : z)$ を点 $(X : Y : Z)$ に写す変換

が定まるのである。このような分母の消滅もユークリッド的立場に対する射影的立場の優位を示すものである。また同次座標を使ったときの円錐曲線の方程式は，次の形となる。

$$ax^2+by^2+cz^2+2(dyz+exz+fxy)=0$$

ここで左辺は (x, y, z) に関する二次形式と呼ばれているものである。よく知られているように，これは適当な線形変換により，いくつかの標準形 例えば $x^2+y^2-z^2$ に直すことが出来る。（もちろん非退化であると言う仮定のもとで。）これは丁度，円錐曲線は射影的に見ればどれも同じであると言う事実に対応している。

(2)の形の変換は射影変換と呼ばれている。射影変換全体は群を成し，それは射影変換群と呼ばれている。前に射影平面は計量を持たないと言ったが，それは，この群の作用のもとで不変な距離の概念は存在しないと言う意味である。しかし，球の対心点を同一視して射影平面を作るとき，球上の距離を射影平面に移すことは出来る。しかし，これは一般の射影変換で不変

ではない。この距離を不変にする射影変換も当然のことながら群をなす。しかし、これは回転群と同じものである。

以上、大体射影幾何の説明を通して、講演者の立場を概説した。これで、話題の面白味を或程度は理解していただけたと思う。この予稿を終えるに当って、引続く主題を個條書しておく。

(1) 複比の射影的不変性
(2) 円錐曲線によるロバチェフスキー平面の構成
(3) 複素数の導入及びリーマン球，ポアンカレ模型
(4) 曲面論初歩
(5) 複素射影平面上の三次曲線と楕円関数

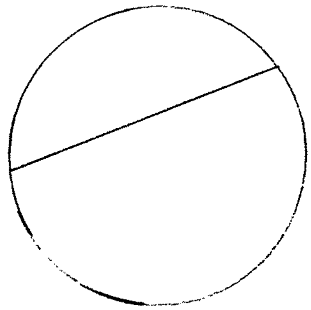
空間との長いつきあい（続き）　成木勇夫

7. ロバチェフスキー平面

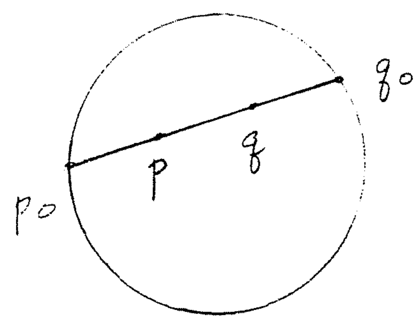
この節では複比の射影的不変性を前提して，非ユークリッド平面を構成する。ユークリッド的でない平面を構成すると言うと，何やら訳の判らない，存在の怪しいものが登場すると思うかも知れない。しかし，これは単に考え方の問題である。数学においては，我々は充分に大胆になることが許されている。我々が神によって創造されたものであって，神の似姿ならば，創造者になった気分で，世界創造の場面を~~…~~あれやこれや想定して楽しんで見ることも許されているのではあるまいか。所詮，それは人間が自らの置かれている立場について考えると言うことに他ならないから。全能の神は憐れな人間のそのような楽しみを罰することはないであろう。さて創造神は考える。世界の次元数は二としよう。世界は射影平面上の円錐曲線の内部としよう。ここに光と闇とを満し，海や陸，山と川，諸々の植物・動物を置き，最後に人間と言う生き物を作ってこれに知恵を与えて棲まわせよう。さて，しかし，この人間達が，この世界の外に出て，自分の所にやって来て，創造した世界のあそこが悪いここが悪い

などと文句を並べ立てては具合が悪い。彼らをこの中に閉込めてしまうにはどうしたらよいか？神である自分には、もちろん、この世界の果など見えている。それを跳び越えるなんて何でもない。ただが、人間には別の知覚を与えよう。彼らが境界に近づいて来れば来る程、自分の進んだ距離が段々長く感じられるようにしよう。もちろん、彼らの運動能力も有限時間のうちに有限距離しか進めないようにする ----- こうして神様は、このような距離を作ると言う問題を、どこかの世界の受験生のことをチラと思い出しながら、解くことになる。全能の神に出来ないことはない。答は立所に得られる。最初に世界の境界として固定した円錐曲線の内部を、それ自身に射すような任意の射影変換で不変な距離がそれである。神様は、すなわち、このような射影変換をこの世界での運動としてお許しになったのである。さて、創造の話はこれ位にして今度は、この世界の距離を明確に記述して見よう。前に、射影変換は直線を直線に写すと言った。それ故、この世界でも、直線は普通の射影直線である。但し、この円錐曲線の内部にある部分のみを

考える：



この世界の任意の二点 p, q に対して、その間の距離 $d(p,q)$ を定義しなければならない。これらを通る直線は確に唯一つ存在する。これを l とよぼう。l は有難いことに境界である円と二点で交わる。これを p_0, q_0 とし、p, q, p_0, q_0 は図のように並んでいるものとする：



ここで、我々はこの四点の複比を考えることが出来るが、これは p, q によって定まるので

$$\rho(p,q) = \frac{\overrightarrow{p_0p}}{\overrightarrow{q_0q}} \cdot \frac{\overrightarrow{q_0p}}{\overrightarrow{p_0p}} = \frac{\overrightarrow{p_0q}}{\overrightarrow{p_0p}} \cdot \frac{\overrightarrow{q_0p}}{\overrightarrow{q_0q}}$$

と置く。一応線分に向きを付けたが、今の場合、複比の符号は正である。また、四点の位置関係から $\overline{p_0q} \geq \overline{p_0p}$, $q_0p \geq q_0q$ で、等号成立は p, q 一致するときに限る。即ち $\rho(p,q) \geq 1$ で、等号成立は $p=q$ のときに限ると言うことも判った。直線 l 上 q の右側に第三の点 r を取れば、$\rho(p,r)$, $\rho(q,r)$ も考えられるが、これらの間には、比の性質によって、関係式

$$\rho(p,r) = \rho(p,q)\,\rho(q,r)$$

が成立っている。しめた！これは一直線上での距離の加法性そのものであろう。和が積になっているに過ぎない。これを和にするには $\log$ を使えば良い訳である。即ち、距離は次式で与えればよい。

$$d(p,q) := \log \rho(p,q)$$

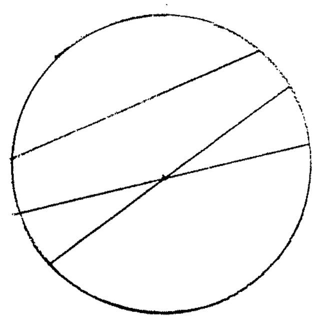
これが、p, q 相異なるとき正値であり、0 となるのは $p=q$ のときに限ることは既に見た。この d が本当に距離としての資格を得るためには、世界の任意の三点 p, q, r

に対して三角不等式

$$d(p,r) \leqq d(p,q) + d(q,r)$$

が成立ち，等号成立は三点が一直線上にあり，q が p，r の間にあるときに限ることを言わねばならないが，証明が煩雑なので後回しにする。複比の射影的不変性から，今導入した距離 d の射影的不変性も明らかであろう。即ち，射影変換には世界の境界をそれ自身に射すと言う条件が課せられているので，d の定義に用いた p_0, q_0 などの境界点は，また境界点に射されているのである。

比 $\rho(p,q)$ は定義式より明らかに，p が p_0（または q が q_0）に近づくとき無限大に発散する。これがこの世界創造の条件であった。このため，この世界の中に住む者は，外に抜け出ることも出来ず，また境界に到達しないのでこれを見ることも出来ないであろう。創造者はしかし，境界を見，必要なときに，この世界に介入したり抜け出たりするであろう。さて，この世界では，問題となったユークリッド幾何の平行線の公理は完全に否定される：



これが、この世界が非ユークリッド平面と呼ばれる由縁である。発見者の一人に因んでロバチェフスキー(Lobachevskii)平面とも呼ばれる。このような表現を考えたのはクライン(F. Klein)なので、上の世界はクライン模型と呼ばれる。

8. ロバチェフスキー平面での運動

前節において、我々は非ユークリッド平面を作ったのであるが、最初の課題は、この平面の運動がどの位沢山あるかを調べることである。我々が世界だと思っている円の内部は射影平面上の領域であって、これは空間領域

$$(*) \qquad x^2+y^2-z^2<0$$

を原点から射影的に眺めたものに他ならない。この領域の点に対しては　$z^2 > x^2 + y^2 \geq 0$　となり z は決して 0 とならない。従って、この領域の内側を見込んだ視線は必ず平面 $z=1$ と交わり、この交点の x, y 座標はこの視線によって決まる射影平面上の点を代表するのである。こうして、~~円の内部だけを考えるならば、~~ 我々の世界は平面 $z=1$ 上の円板 $x^2+y^2<1$ と一対一対応が付くのである。このことを念頭において、我々は空間領域 (*) をロバチェフスキー平面を代表するものと考えることする。そうすれば、求める運動群は (*) を (*) に移す線形変換の群として捉えられるであろう。この線形変換群を記述するため、我々は次のような仕掛を導入する。即ち、三次元ベクトル (x, y, z) に対して、行列

$$M(x,y,z) := \begin{pmatrix} z-y & x \\ x & z+y \end{pmatrix}$$

を対応させる。ベクトル (x, y, z) を ξ などの記号で書き表すときは、上の行列は $M(\xi)$ などと書かれる。この行列は明らかに対称な行列である。逆に、

任意の対称行列 M に対し $M = M(\xi)$ となる三次元ベクトル ξ が存在する。こうして，三次元ベクトル空間と三行三列の対称空間とは一対一の対応が付いたことになる，これがベクトル空間の同型であることは明らかであろう。今，二行二列の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を行列式 $\det(A) = ad - bc = 1$ なるものとし，積行列

$$M := A \cdot M(\xi) \cdot {}^tA \qquad ({}^tA : A \text{の転置行列})$$

を考えると，これは対称行列である。実際

$${}^tM = {}^t({}^tA) \cdot {}^tM(\xi) \cdot {}^tA = A \cdot M(\xi) \cdot {}^tA = M$$

これにより

$${}^tM = M(\Xi)$$

となるような三次元ベクトル $\Xi=(X,Y,Z)$ が存在することが判った。明らかに，X,Y,Z は x,y,z の一次同次式であるから

$$\Xi=\tilde{A}\,\xi \qquad \Xi=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} \qquad \xi=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

となる三行三列の行列 $\tilde{A}$ が最初の行列 A に対して決まることになる。実際計算すると

$$\begin{cases} X=(ad+bc)x-(ac-bd)y+(ac+bd)z \\ Y=-(ab-cd)x+\dfrac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2}y-\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}z \\ Z=(ab+cd)x-\dfrac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2}y+\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}z \end{cases}$$

となる。この線形変換が領域(*)をそれ自身に移すことは，等号

$$Z^2-X^2-Y^2=\det M(\Xi)=\det M$$
$$=\det(A)\cdot\det(M(\xi))\cdot\det({}^t\!A)=\det M(\xi)$$
$$=z^2-x^2-y^2$$

から直ちに判る。重要なのは，上の対応 $A \longmapsto \tilde{A}$ が行列群の準同型であること，即ち

$$\widetilde{AB} = \tilde{A} \cdot \tilde{B}$$

の成立つことである。実際，

$$M(\widetilde{AB}\xi) = AB \cdot M(\xi) \cdot {}^t(AB) = AB\,M(\xi)\,{}^tB\,{}^tA$$
$$= A \cdot M(\tilde{B}\xi) \cdot {}^tA = M(\tilde{A} \cdot (\tilde{B}\xi)) = M((\tilde{A} \cdot \tilde{B}) \cdot \xi)$$

から直ちに上が得られる。線形変換 $\tilde{A}$ によって惹き起される射影変換 $(x:y:z) \longrightarrow (X:Y:Z)$ を $[\tilde{A}]$ と書くことにする。リー群の理論を使えば次の命題が証明される。

命題　向き付を変えないロバチェフスキー平面の運動に対し，行列式 1 の二行二列の行列 A が存在して $[\tilde{A}]$ がこの運動と一致するように出来る。行列の積には運動の合成が対応し，このような運動全体は群を作る。

ここで注意して置くことは，次の二つである。$\tilde{A}=\tilde{B}$ ならば $A=\pm B$．$[\tilde{A}]=[\tilde{B}]$ ならば $\tilde{A}=\tilde{B}$．(もちろんここでは行列の要素などは全て実数の範囲で考えている。) 群論の言葉で言うと，二行二列の行列群

$$SL(2,\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \begin{matrix} a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ ad-bc=1 \end{matrix}\right\}$$

と三行三列の行列群

$$SO(2,1)=\left\{(a_{ij}) \;;\; X^2+Y^2-Z^2=x^2+y^2-z^2\right\}$$

$$\text{但} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=(a_{ij})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とが，対応 $A \longmapsto \tilde{A}$ により局所同型であって，この対応の核が $\pm I$ であることと，上の事実は定式化できる。いずれにせよ，一見全く違って見える二つの行列群が殆ど同じものであることが判ってしまったのである。このことのからくりを明らかにするのは，複素数を導入しクライン模型からポアンカレ模型へ

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で与えられる。これを A としたときの $[\hat{A}]$ は (x, y)-平面での変換

$$X = (\cos 2\theta)x - (\sin 2\theta)y$$
$$Y = (\sin 2\theta)x + (\cos 2\theta)y$$

に他ならない。これは原点の回りの角 2θ の回転である。今度は $[\hat{A}]$ が直線 $y = 0$ をそれ自身に射すための条件を書いて見る これは

$$ab - cd = 0 \qquad a^2 - c^2 = -b^2 + d^2$$

である。これと $ad - bc = 1$ を合せると，$\varepsilon = \pm 1$ とし

$$b = \varepsilon c \qquad d = \varepsilon a \qquad a^2 - c^2 = \varepsilon$$

と言う条件が得られる．このような変換は $(0, 0)$ を $\left(\dfrac{2ac}{a^2+c^2}, 0\right)$ に射すから．$a^2 - c^2 = \varepsilon$ なる a, c

の移行によって行うのが一番自然であろう。

さて、上の命題でロバチェフスキー平面の運動が充分に存在することが判ったのであるが、この「充分」と言う意味を正確に述べて置く必要があろう。それは次の意味である。

1) 任意の点を他の任意の点に射す運動がある。

2) 任意の点に対して、その点を固定する任意角の回転がある。

群の性質から 1) が言えれば 2) は適当な一点に対してだけ確めれば良いことが判る。我々は先ず 2) を原点 $(x,y)=(0,0)$ について確め、それから原点を直線 $y=0$ 上の任意の点に移すことが出来ることを言って上を証明する。$[\hat{A}]$ が原点を固定するための条件は、$M(0,0,1)=I$（単位行列）だから

$$A\cdot{}^{t}A=I$$

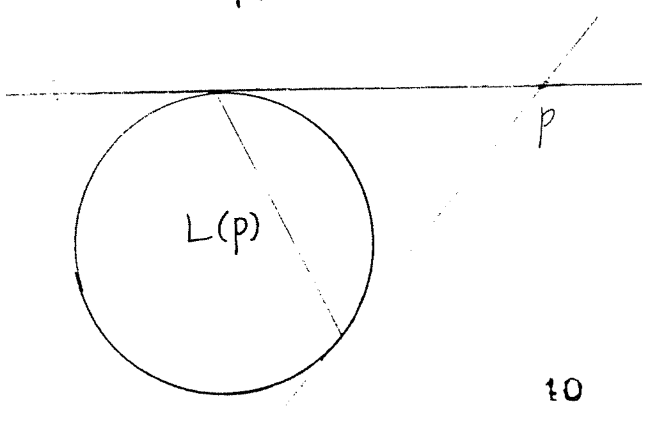
となる。このようなAの一般形は良く知られているように

を選んで 原点を 直線 $y=0$ ，$|x|<1$ 上の任意の点に射すことが出来る。このことと前に得た回転を合せると，原点をロバチェフスキー平面の任意の点に射せることが判った。群の性質によりこのことから 1) が証明できる． 2) の証明も同時に終った。

1), 2) は次節の議論において重要となる。

9. ロバチェフスキー平面における幾何学

我々の構成した非ユークリッド的世界は円の内部であった。では，円の外部は如何なる幾何学的意味を持つであろうか。次のような考察をして見よう。今円 O：$x^2+y^2<a^2$ を考え，その外部（境界は含まない）の一点 p を取り、これより円 O へ接線 L_1，L_2 を引き，その接点を q_1，q_2 とする。閉線分 q_1q_2 は p に対して一意的に定まるのでこれを $L(p)$ と書く。



逆に，ロバチェフスキー平面の任意の直線を考えると，それが $L(p)$ となるような外部の点が一意的に定まる。この対応により，円 O の外部の世界は実はロバチェフスキー平面の直線の作る世界と思ってよいことが判る。次に p を通る直線が円 O によって切り取られる非ユークリッド直線の族が考えられるが，これは $L(p)$ に取って何か特別な意味を持っていなければならない。

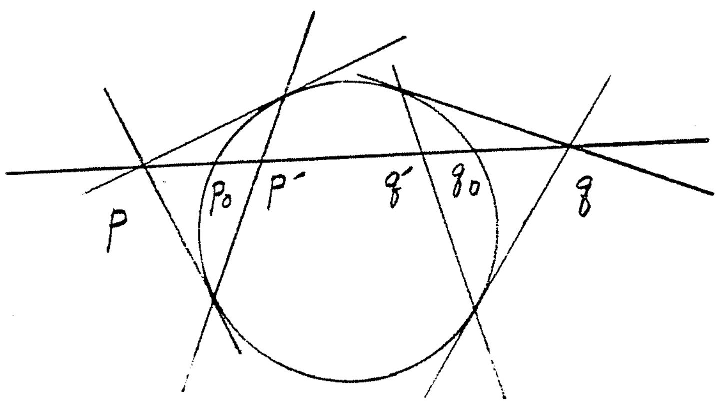
命題　上の記号の下で，p を通り円 O と交わる直線に含まれる非ユークリッド直線は $L(p)$ と直交する。

証明は極めて簡単である。前節の 1), 2) を使えば，二直線の交点は原点 $(x, y) = (0, 0)$ であって，$L(p)$ は y 軸だと思ってよい。このとき，L_1, L_2 は x 軸と平行でそれらの交点である p は右無限遠方にある。従って x 軸が命題に言う直線となり，これは $L(p)$ と明らかに直交している。

系．q が $L(p)$ 上にあれば p は $L(q)$ 上に

ある。

これは射影幾何における基本的事実である。次に、p, q ともに円 O の外部の点であるとし、p, q を結ぶ直線は円 O と二点 p_0, q_0 で交わるとする。また p', q' を夫々、直線 pq と $L(p), L(q)$ の交点とする。



このとき、やはり $\rho(p, q)$ が考えられこれは $\rho(p', q')$ に等しい。何故なら $\rho(p, p') = \rho(q, q') = -1$ が上の命題の証明で既に自明だからである。従って我々は次の命題を得る

命題． 円 O の外部の二点 p, q を結ぶ直線が円 O と交わるとき、対応する非ユークリッド直線 $L(p)$, $L(q)$ は交わらない。また $d(p, q) = \log \rho(p, q)$ が

正の量として定まるが，これは $L(p), L(q)$ の距離（$= d(p', q')$）に等しい。

最後に直線 pq が円 O と接することも交わることもない場合を考えよう。この場合，$L(p), L(q)$ は一点で交わる。この場合にも $\rho(p, q)$ 或は $d(p, q)$ は定義できないであろうか．定義できるとしたら，どのような幾何学的意味を持つだろうか？ 実は，円 O と直線 pq の交点に当る p_0, q_0 は最早眼には見えないけれども，複素座標を持つ点として定まるのである。そして，四点 p, q, p_0, q_0 の複比 $\rho(p, q)$ も一つの複素数として定まるのである。今，これを計算して見よう。再び前節の 1), 2) を使って $L(p), L(q)$ の交点は原点 $(0:0:1)$ で $L(p)$ は x 軸上に載っていると仮定してよい。また $L(q)$ と x 軸との成す角を φ とする。このとき，

$$p = (0 : 1 : 0)$$

$$q = (-\tan\varphi : 1 : 0)$$

$$p_0 = (i : 1 : 0)$$

$$q_0 = (-i : 1 : 0)$$

このとき，第二座標は常に1で第三座標は常に0だから，これら四点の複比は第一座標の複比と一致する。即ち

$$\rho(p,q)=\frac{i-\tan\varphi}{\tan\varphi+i}=e^{2i\varphi}$$

$$\therefore\quad d(p,q)=2i\varphi$$

命題　　直線 pq が（実射影平面の上で）円 O と交わらないとき，非ユークリッド直線 $L(p), L(q)$ は交わり，これらのなす角 φ は次式で与えられる：

$$\varphi=\frac{1}{2i}d(p,q)\,。$$

最後に次を証明なしに与えておく

命題　　非ユークリッド的点 p と直線 $L(q)$ の間の距離は $d(p,q)=\log\rho(p,q)$ によって与えられる。

10. 射影直線詳論

前節では複比の射影的不変性をフルに活用した。また、複素数の複比を考察したりした。また次節で構成するロバチェフスキー平面のポアンカレ(Poincare)模型も複素射影直線の中に構成される。このようなことを考え合せると、この機会に取扱っている数体系に依らない射影直線の一般論を展開して置くのが適切だと思われる。実の世界は複素の世界に含まれてしまうので、我々は一応複素射影平面における直線を考えるが、以下の議論は任意の数体系に通用するものである。前に述べたように複素射影直線とは、複素3次元空間 (x, y, z) において、原点を通る平面を射影的に見たものである。簡単のために、これが $z=0$ で与えられているとする。この平面が表現している比の世界は1つのパラメター$(x:y)$を持つに過ぎない。一般には、この比に対して分数 x/y を対応させれば、これは一つの複素数と見なせる。ところが唯一つの比 $(1:0)$ のみは複素数としては表現できない。これを ∞ とかくのである。通常、複素数全体を $\mathbb{C}$ と書く。複素射影直線は点集合としては $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (和集合)であるが、これ

を $P_1(\mathbb{C})$ などと書いたりする。

平面 $z=0$ を 線形変換

$$X = ax + by + cz$$

$$Y = a'x + b'y + c'z$$

$$Z = a''x + b''y + c''z$$

によって動かせば任意の射影直線が得られる。

平面 $z=0$ は同値な方程式

$$AX + BY + CZ = 0 \qquad \begin{aligned} A &= a'b'' - a''b' \\ B &= a''b - ab'' \\ C &= ab' - a'b \end{aligned}$$

で表現される。ここで例えば $C \neq 0$ ならば Z は $-(AX+BY)/C$ と表されてしまうので、X と Y との比のみで他の座標間の比は表わされてしまう。所で また $z=0$ なのだから、等式

$$\frac{X}{Y} = \frac{ax+by}{a'x+b'y} = \frac{a\left(\frac{x}{y}\right)+b}{a'\left(\frac{x}{y}\right)+b'}$$

が得られる。これで比 X/Y の比 x/y による表現が与えられた。逆の変換は、これを x/y について解けばよい。

$$(*) \qquad S = \frac{as+b}{cs+d} \qquad ad-bc \neq 0$$

なる形の変換は一次分数変換と呼ばれる。これが射影直線から他の射影直線へのパラメター変換の一般形であることは，上の考察によって理解していただけたと思う。このような変換により，複比

$$\frac{(s_1-s_3)(s_2-s_4)}{(s_1-s_4)(s_2-s_3)}$$

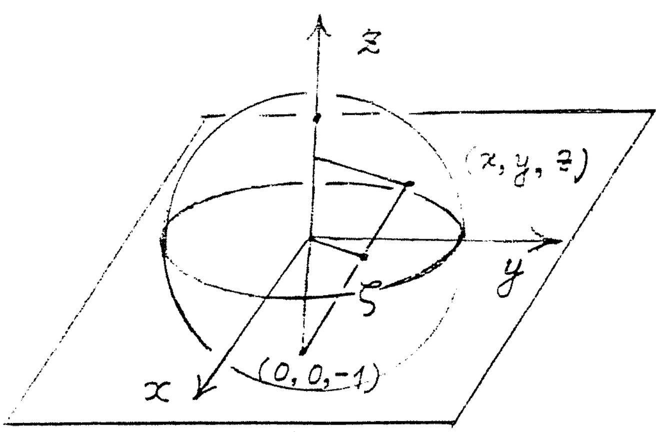
が不変であることは，計算により容易に確められる。(*)においては，$s=\infty$ に対しては $S=\dfrac{a}{c}$ を，$s=-\dfrac{d}{c}$ に対しては $S=\infty$ を対応させることは言うまでもない。即ち，こうして射影直線と射影直線は射影変換によって過不足なく対応するのである。$P_1(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ に ∞ を付け加えたものと理解したが，これだけでは ∞ のみ孤立しているように見える。しかし，変換

$$S = \frac{1}{s}$$

を施せば 0 と ∞ とは入換わり, ∞ の近傍は 0 の近傍の像として理解される。即ち $P_1(\mathbb{C})$ は多様体なのである。次節で我々は $P_1(\mathbb{C})$ は単位球面であると思ってよいことを見るであろう。

11. 立体射影

実三次元ユークリッド空間 (x, y, z) において (x, y)-平面を対応 $(x, y) \longleftrightarrow x + iy$ によって複素平面と考える。今、単位球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を取り, これより南極 $(0, 0, -1)$ を取り除いた部分と複素平面とを次のような幾何学的仕方で一対一に対応させる。即ち S 上の点 $p = (x, y, z)$ に対して, これと南極とを結んだ直線と複素平面との交点 ζ を p に対応させる。



図より

$$\frac{|\zeta|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{1 + z}$$

よって

$$\zeta = \frac{x + iy}{1 + z}$$

逆の対応も直ちに得られる。

$$x = \frac{\zeta+\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}} \qquad y = \frac{i(\bar{\zeta}-\zeta)}{1+\zeta\bar{\zeta}} \qquad z = \frac{1-\zeta\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}}$$

もちろん，南極 $(0,0,-1)$ に対しては $\zeta=\infty$ が対応するとする。この対応 $(x,y,z) \longleftrightarrow \zeta$ により単位球面 S と複素射影直線 $P_1(\mathbb{C})$ とは滑らかに１対１対応がついていることが判る。驚くべきことに，この対応は S，$P_1(\mathbb{C})$ 上に自然に決まる角度の概念を変えていない。ここでは，このことの証明には立入らない。今 $P_1(\mathbb{C})$ 上の円を次のようなものと決める。$\mathbb{C}$ 上の普通の意味の円は円とする。$\mathbb{C}$ 上の任意の直線はこれに ∞ を補って円とする。こうすると，この概念は一次分数変換によって変らないことが計算によって容易に判る。実際この概念が自然であることは，次の命題によっても保証されている。

命題　上の対応 $S \ni (x,y,z) \longleftrightarrow \zeta \in P_1(\mathbb{C})$ は円を円に写す。

証明) S 上の円とは S と交わる平面による S の切口であるから, 平面の方程式

$$ax + by + cz = d$$

で与えられる。S と交わるための条件は

$$d^2 < a^2 + b^2 + c^2$$

である。上の方程式の左辺の2倍は $(a - bi)(x + iy) + (a + bi)(x - iy) + 2z$ であるから ζ に対する方程式

$$\bar{\alpha}\zeta + \alpha\bar{\zeta} + c(1 - \zeta\bar{\zeta}) = d(1 + \zeta\bar{\zeta}) \qquad \alpha = a + bi$$

が得られる。即ち

$$(c + d)\zeta\bar{\zeta} - (\alpha\bar{\zeta} + \bar{\alpha}\zeta) = c - d$$

これより $c + d \neq 0$ ならば

$$|\zeta - \gamma|^2 = (\zeta - \gamma)(\bar{\zeta} - \bar{\gamma}) = \delta^2$$

ここで $\gamma = \dfrac{\alpha}{c + d}$ $\quad \delta = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}}{|c + d|}$

これは中心 γ 半径 δ の円の方程式である。$c+d=0$ ならば直線の方程式が得られる。逆は省略。

QED

次節で重要なのは、最初の平面が y 軸と平行、即ち $b=0$ の場合である。この場合 γ は実数となるので、対応する $P_1(\mathbb{C})$ 上の円の中心は実軸上にある。直線となる場合は、それは実軸と垂直である。

12. ロバチェフスキー平面のポアンカレ模型

この節ではロバチェフスキー平面を複素平面上に上半平面として実現しよう。方法は前節で展開した立体射影である。最初に対応を構成する。クライン模型においては、ロバチェフスキー平面は単位円板であった。ここでは、この単位円板を空間 (x, y, z) において、(x, z)-平面が単位球 $x^2+y^2+z^2<1$ によって切り取られる円板 ~~x^2+y^2~~ $x^2+z^2<1$ であると考える。さて、この円板上の一点 (x, z) を取り、これを通り y 軸に平行に直線を引く。この直線が右半球 $x^2+y^2+z^2=1$, $y>0$ と交わる点は

$$(x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z)$$

である。これに対して，立体射影により対応する複素数は次式で与えられる：

$$\zeta = \frac{x+i\sqrt{1-x^2-z^2}}{1+z}$$

これが (x, z) に対応する $\mathbb{C}$ 上の点なのであるが，明らかに ζ の虚部は正である。逆対応は

$$x = \frac{\zeta+\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}} \qquad z = \frac{1-\zeta\bar{\zeta}}{1+\zeta\bar{\zeta}}$$

によって与えられる。~~この領域に~~ 虚部が正である複素数の作る領域

$$H := \{\zeta \in \mathbb{C};\ i(\bar{\zeta}-\zeta) > 0\}$$

は上半平面と呼ばれている。これが円板 $\cancel{x^2+y^2}$ $x^2+z^2 < 1$ と一対一対応がついたのであった。

前節で証明したことにより、次の命題が得られる。

命題　上の対応 $(x, z) \longleftrightarrow \zeta$ により、クライン模型での非ユークリッド直線は ~~x~~ 実軸と直交する円の H に含まれている部分と対応する。

我々は実軸と直交する円の H 側の部分を H における ~~非~~ 非ユークリッド直線と呼ぶ。簡単な作図により「H の任意の二点 z_1, z_2 に対して、これらを通る非ユークリッド直線が唯一つ定まる」ことが判る。z_1, z_2 の実部が等しいときは、この非ユークリッド直線は z_1, z_2 を通る普通の直線で、これは実軸と直交する。そうでない場合は、求める非ユークリッド直線は中心を実軸上に持つ円であって中心 a と半径 δ は連立方程式

$$z_i \bar{z}_i - a(z_i + \bar{z}_i) + a^2 = \delta^2$$

を $\delta > 0$ のもとで解いて求まる。

次に、非ユークリッド運動群は H 上でどのような表現を持つかを述べよう。二行二列の実行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a,\ b,\ c,\ d\ 実 \\ ad - bc = 1 \end{array}$$

が与えられたとき，これに対して，$P_1(\mathbb{C})$ 上の点変換

$$z = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

が定義できる。これを $\check{A}$ と書く：即ち $\check{A}\zeta = z$。
$\check{A}$ は H をそれ自身の上に射す。実際，計算により

$$i(\bar{z} - z) = \frac{i(\bar{\zeta} - \zeta)}{|c\zeta + d|^2}$$

が示される。次の命題はこのような変換が H 上の非ユークリッド運動であることを言っている。

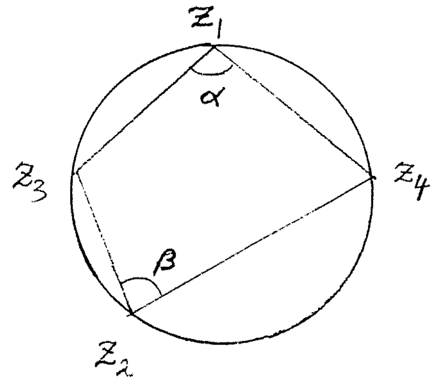
命題　$A \in SL(2, \mathbb{R})$ に対して，クライン模型 $x^2 + y^2 < 1$ 上の運動 $[\hat{A}]$ とポアンカレ模型 H 上の変換 $\check{A}$ は，上の対応 $(x, y) \longleftrightarrow \zeta$ によって一致する。

13. ポアンカレ模型における距離表現

クライン模型においては，距離は複比の log として導入された。では，ポアンカレ表現において距離の表現はどのような形で与えられるであろうか。既に10節で $P_1(\mathbb{C})$ 上の四点 z_1, z_2, z_3, z_4 に対して，それらの複比

$$D(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

が一次分数変換で不変であることを見た。我々のここでの議論は，二つの模型の複比の概念が対応 $(x, z) \longleftrightarrow \zeta$ によって一致すると言う事実の上に成立っている。注意して置かねばならないことは，$P_1(\mathbb{C})$ 上の複比は複素数値であり，任意の四点に対して定義されているのに対して，射影的複比は一直線上にある四点に対してのみ定義されると言うことである。このギャップは，しかし，四点 z_1, z_2, z_3, z_4 が $P_1(\mathbb{C})$ での円の周上にあるとき $D(z_1, z_2, z_3, z_4)$ が実数値であると言う事実によって解消する。このことを見るには，次の図を観察することで充分であろう。



$$\alpha + \beta = \pi$$

命題　上半平面 H の二点 z_1, z_2 の距離は次式で与えられる

$$d(z_1, z_2) = \log \frac{1+t}{1-t} \qquad t := \frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1|}.$$

証明）z_1, z_2 を通る非ユークリッド直線は円

$$C(a, \delta) \qquad (z-a)(\bar{z}-a) = \delta^2$$

であるとし，$a-\delta$, z_1, z_2, $a+\delta$ はこの順に $C(a,\delta)$ 上に並んでいるものとする。我々は次の複比を計算しなければならない：

$$D = \frac{(z_1 - a - \delta)(z_2 - a + \delta)}{(z_1 - a + \delta)(z_2 - a - \delta)}$$

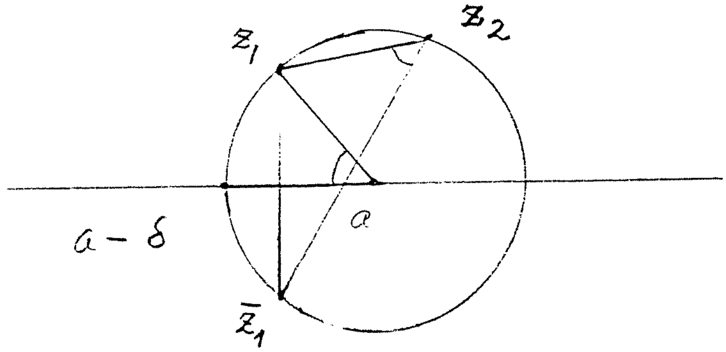
関係式　$z_1 \bar{z}_1 - a(z_1 + \bar{z}_1) = \delta^2 - a^2$ を使うと

$$\text{分子} = (z_1 - a)(z_2 - \bar{z}_1) + \delta(z_1 - z_2)$$
$$\text{分母} = (z_1 - a)(z_2 - \bar{z}_1) - \delta(z_1 - z_2)$$

が得られる。即ち

$$t = \frac{D-1}{D+1} = \frac{\delta(z_1 - z_2)}{(z_1 - a)(z_2 - \bar{z}_1)}$$

が成立つ。　ここで，図



により

$$t = \frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - \bar{z}_1|}$$

これが証明すべきことであった。

系　複素平面上の点を $z=x+iy$ により (x,y)-平面上の点と思い，今点 (x,y) は H 上にある，即ち $y>0$ とする。ds を点 (x,y) とそれから微小に離れた点 $(x+dx,\ y+dy)$ との距離とすると

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

が成立つ。

この表現を見れば明らかなように，非ユークリッド距離は，H の各点の無限小近傍で見れば，複素平面 $\mathbb{C}$ の通常のユークリッド距離に，x 軸からの距離の逆数が掛けられているのみである。創造の神は讃むべきかな！その業は常に簡明且完全なのである。

系　ポアンカレ模型においては，非ユークリッド角度は，ユークリッド角度と変らない。

系　上半平面 H における非ユークリッド面積要素は,

$$d\omega := \frac{dx\,dy}{y^2}$$

によって与えられる。

14. ロバチェフスキー平面の曲率

曲面の曲率（ガウス一）は，その上に与えられている距離によってのみ決まる。ここでは，次の定義を採用する。曲面上の或る点における曲率は，その点~~における~~の微小近傍に含まれる面積 S，角 α, β, γ の測地三角形に対して定まる比 $(\alpha+\beta+\gamma-\pi)/S$ として定まる。この定義が微小測地三角形の取方にこの比が依存していないことを前提していることは言うまでもない。また，測地三角形とは三辺が測地線（局所最短線）から成る三角形のことを言う。この定義の妥当性は，この比が半径 r ~~の曲面~~の球面の場合 $1/r^2$ に等しいことからも理解されよう。さて，ポアンカレ模型 H に対して曲率を計算して見よう。我々の場合，測地三角形とは，実軸と直交するような三つの円の弧によって囲まれ

たHの領域である。以下,このようなものを単に三角形と呼ぶ。

命題　H上の任意の三角形の面積をS その三角をα,β,γとすると,次の等式が成立つ:

$$S = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

従ってHは,至る所曲率が−1の曲面である。

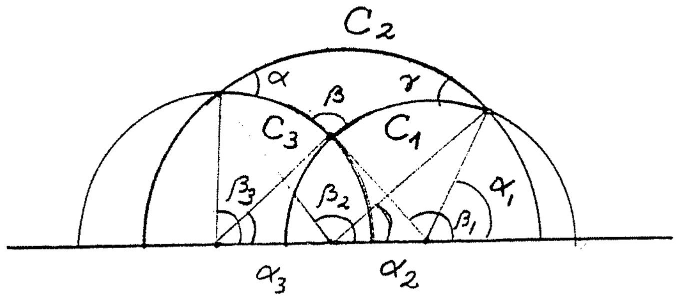
証明)前節の系によりH内の閉領域Dの面積は重積分

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{y^2}$$

によって,与えられる。先づyについての積分を実行すれば,この重積分は線積分

$$\int_{\partial D} \frac{dx}{y} \qquad \partial D : D\text{の境界}$$

に帰着する。但し、∂D は正の方向(反時計一)に向きづけられている。さて、この命題に言う非ユークリッド三角形は下図のように与えられているとしよう。



各円弧 C_i 上でパラメター表示 $x = r_i \cos\varphi$, $y = r_i \sin\varphi$ を与えれば、$dx/y = -d\varphi$。これにより

$$\int_{C_1} \frac{dx}{y} = \beta_1 - \alpha_1$$

$$\int_{C_2} \frac{dx}{y} = \alpha_2 - \beta_2$$

$$\int_{C_3} \frac{dx}{y} = \beta_3 - \alpha_3 \quad .$$

また図より $\alpha = \beta_2 - \beta_3$; $\beta = \pi + \alpha_3 - \beta_1$, $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$

よって等式

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi-\int_{C_1+C_2+C_3}\frac{dx}{y}=\pi-S$$

を得る。

QED

空間との長いつきあい（続き－2）　　成木勇夫

15. 若干の補い

上半平面Hの代りに複素平面での単位円板をポアンカレ模型として採用することができる。上半平面のパラメーターをzとし、単位円板のそれをζとすると、両者の変換は

$$\zeta = \frac{z-i}{z+i} \qquad z = \frac{i(1+\zeta)}{1-\zeta}$$

で与えられる。この変換によりz_1, z_2とζ_1, ζ_2が夫々対応するとすれば

$$d(z_1, z_2) = d(\zeta_1, \zeta_2) = \log \frac{1+t}{1-t}$$

$$t = \frac{|z_2 - z_1|}{|z_2 - z_1|} = \frac{|\zeta_2 - \zeta_1|}{|1 - \bar{\zeta}_1 \zeta_2|}$$

また、$\zeta = x + iy$と置いた時の第1基本形式は

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

となる。

命題　半径 δ の非ユークリッド円の周の長さは

$$\pi(e^{\delta} - e^{-\delta})$$

で与えられる.

また, このポアンカレ円板模型を使うことにより三角不等式が証明される

命題.　単位円板 $|\zeta| < 1$ の三点 $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ において

$$d(\zeta_1, \zeta_2) \leqq d(\zeta_0, \zeta_1) + d(\zeta_0, \zeta_2)$$

が成立つ。また等号成立は, 三点が同一非ユークリッド直線の上にあり ζ_0 が ζ_1 と ζ_2 の間にあるとき, またそのときに限る。

証明)　$\zeta_0 = 0$ と思ってよい。また, $\delta_i = d(0, \zeta_i)$　$i = 1, 2$,　$\delta = d(\zeta_1, \zeta_2)$ と置く。このとき, 次の不等式が得られる。

$$e^{\delta} = \frac{1+t}{1-t} = \frac{(1+t)^2}{1-t^2}$$

$$= \frac{\left(|\zeta_2-\zeta_1| + |1-\bar{\zeta}_1\zeta_2|\right)^2}{|1-\bar{\zeta}_1\zeta_2|^2 - |\zeta_2-\zeta_1|^2}$$

$$\leq \frac{\left(|\zeta_2| + |\zeta_1| + 1 + |\zeta_1||\zeta_2|\right)^2}{(1-|\zeta_1|^2)\cdot(1-|\zeta_2|^2)}$$

$$= \frac{1+|\zeta_1|}{1-|\zeta_1|}\cdot\frac{1+|\zeta_2|}{1-|\zeta_2|} = e^{\delta_1+\delta_2}$$

$$\therefore \quad \delta \leqq \delta_1 + \delta_2$$

※この主張は，上より明らか。　　　　　QED

この三角不等式によって，我々が今迄の議論で ~~最短~~ 非ユークリッド直線と呼んで来たものが測地線 —— 即ち，その上の二点に対して，最短線となっているような曲線 —— であることが判ったのである。

他に証明しなかったことは，と言うと，立体射影の

等角性がある。式

$$x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{1 + \zeta\bar{\zeta}} \quad y = \frac{i(\bar{\zeta} - \zeta)}{1 + \zeta\bar{\zeta}} \quad z = \frac{1 - \zeta\bar{\zeta}}{1 + \zeta\bar{\zeta}}$$

を思い出せば

$$dx = \frac{(1 - \bar{\zeta})^2 d\zeta + (1 - \zeta^2)\, d\bar{\zeta}}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^2}$$

$$dy = \frac{i\{(1 + \zeta^2)\, d\bar{\zeta} - (1 + \bar{\zeta}^2)\, d\zeta\}}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^2}$$

$$dz = \frac{-2(\bar{\zeta}\, d\zeta + \zeta\, d\bar{\zeta})}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^2}$$

が得られ，これにより更に

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{4\, d\zeta\, d\bar{\zeta}}{(1 + \zeta\bar{\zeta})^2}$$

が得られる。これにより等角性が示されている。

これを使えば Klein 模型における距離の微分表現が得られる。

命題　クラインの円板模型 $x^2+z^2<1$ における第1基本形式は

$$ds^2 = \frac{dx^2+dz^2-(x\,dz-z\,dx)^2}{(1-x^2-z^2)^2}$$

によって与えられる。

この形式がベルトラーミが自らの模型に与えた距離であった。(彼もクラインと同値な模型をほぼ時を同じくして発見していた。)

最後に、ロバチェフスキー空間についても簡単に触れて置く。これは射影空間 $(x:y:z:t)$ における領域

$$x^2+y^2+z^2-t^2<0$$

のことである。非ユークリッド直線，平面は射影直線，平面の領域に含まれる部分である。距離は全く同様に複比で導入すればよい。この空間での運動は次のようにして与えられる。列ベクトルに

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$ に対して，エルミット行列 $$M(\xi) = \begin{pmatrix} t-z & x+iy \\ x-iy & t+z \end{pmatrix}$$

を対応させることにより，ベクトル空間の同型を作っておく。今度は，二行二列の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad ad-bc=1$$

は複素行列とし

$$\tilde{M} = A \cdot M(\xi) \cdot {}^t\overline{A}$$

とおく。$\tilde{M}$ は再びエルミット行列となり，実ベクトル

$$\Xi = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}$$ が存在して $\tilde{M} = M(\Xi)$ が成立つ。

即ち，四行四列の実行列 $\tilde{A}$ があって

$$\Xi = \tilde{A} \cdot \xi$$

となる。$\tilde{A}$ によって決まる射影変換がロバチェフスキー空間での運動の一般形である。対応 $A \longrightarrow \tilde{A}$ は $SL(2, \mathbb{C})$ から $SO(3,1)$ 上への準同型を与え、その核は $\{\pm I\}$ となる。非ユークリッド空間での幾何については各自試みられたい。

本稿の記述はここまでとする。最初予定していた曲面論初歩は、話の連続性から見て少し不自然であり、また時間の制約と言うこともあって、割愛せざるを得なかった。ポアンカレ模型を詳述した理由の一つは楕円曲線のモジュライとして上半平面を理解するためであった。この話題については予稿なしに行うことにする。

終りに一言(ひとこと)。ガウスが非ユークリッド幾何の存在を確信してから、ほぼ80年を経てポアンカレは、リーマン面の、フックス群による上半平面の商としての表現に到達した。それより現在に至るまで100年余りの年月が流れたが、その間、アインシュタインの相対性理論の出現により、非ユークリッド運動群が脚光を浴びたり、最近、物理学の等角場の

理論においてリーマン面が素粒子として登場したり、非ユークリッド幾何の提供してくれる空間は数学また物理学の生々とした対象の活躍の場として、常に、古くまた新しくあり続けている。たとえ我々がいつかもっと高次の幾何学的実在に遭遇することがあるとしても、これからも我々の、このような典型的な空間との付合は無限に長く、無限に多様であるに違いない。

本稿の内容は大体、E. Cartan, *Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann*, Gautier Villars, 1928 と C. L. Siegel, Topics in *function theory* I, II, Wiley Intersci., 1969−71 に基いて述べた。この主題の微分幾何学的、函数論的詳細を知りたい方には、これらの本を読まれることをすすめる。また、非ユークリッド幾何については、良い邦書がいくつか存在するようである。例えば「非ユークリッド幾何の世界」(寺坂英孝著, 講談社 1977), この幾何の歴史については共立出版"数学の歴史"の中の幾何学 I, II (寺坂英孝, 静間良次)(1981−1982)が詳しい。

この場を借りて、小生に前もって色々と貴重な御意見を与えて下さった数理工学(京都大学)の布川昊先生に心から感謝の念を表したい。また、先生はじめ個人的に小生の話を聞いて下さった諸賢の方々にも合せて感謝したい。

成木勇夫