平成11年度(第21回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 平成11年8月2日～8月6日開催)

数学入門公開講座

平成１１年８月２日（月）から８月６日（金）まで

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1．多項式の解の近似がとりもつ数論と幾何の関係（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助教授　望月　新一

多項式の有理数解の研究は、歴史が長いだけに、様々なアプローチを産み出しているが、二十世紀の後半に開発され、現在では数々の輝かしい成果を挙げているアプローチとして、現代数論幾何がある。本講義の目標は、その現代数論幾何の世界を紹介することにある。現代数論幾何の基本は、標語的にいえば、多項式の解の近似にあるといってもよい。つまり、有理数というものは、整数論の対象としては構造が複雑すぎるため、数論的にはより単純な構造をした実数や複素数のような数で近似することによって多項式の有理数解を調べるのである。このような近似解のなす集合は、有理数解のなす集合と違い、「滑らかな物質」で出来た幾何的な対象をなしていて、その対象の幾何的性質が、有理数解の性質に大きく影響することが知られている。

2．計算幾何学入門（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助教授　田村　明久

平面上に与えられた有限個の点の集合に対して、これを含む最小の凸多角形を求める問題を（2次元）凸包問題とよびます。計算幾何学とは、このような幾何的な問題を解くアルゴリズム（解法）を研究する計算機科学の一分野です。

本講座では凸包問題のほかに勢力圏のモデルとして利用されるボロノイ図など、計算幾何学において基礎的な問題とそれらに対するアルゴリズムを紹介します。また、アルゴリズムの効率性の評価についてもふれます。

3．微積分をつうじて多様体が見える（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・教授　宮岡　洋一

「多様体」は現代数学を理解する上で鍵となる概念です。

数学のなかでも最も古い伝統をもつ幾何学は、三次元空間という入れ物にはいっている図形という素朴な直感から出発したわけですが、百五十年ほど前のこと、リーマンは、必ずしも入れ物を必要とせず、いくらでも高い次元をもてる、多様体の概念に到達しました。この概念は解析学を複雑な図形のなかで自由に展開することを可能とし、その結果として宇宙全体の幾何構造といったものまで考察することまでできるようになったのです。

この講義では、多様体の豊かな世界への入門として、積分を通じて解析（微分形式）と幾何（コホモロジー）とがかかわりあう、その様子に焦点をしぼって解説したいと思います。

時　間　割

日 ＼ 時間	8月2日(月)	3日(火)	4日(水)	5日(木)	6日(金)
10：30～11：45	望月	望月	望月	望月	望月
11：45～13：00	休　憩				
13：00～14：15	田村	田村	田村	田村	田村
14：15～14：45	休　憩				
14：45～16：00	宮岡	宮岡	宮岡	宮岡	宮岡

微積分をつうじて多様体が見える

京都大学数理解析研究所・教　授　　宮　岡　洋　一

1999, AUGUST 2,3,4,5,6, 14:45～16:00

1．多様体とは何か

高校までの幾何学や微積分は座標平面あるいは3次元の座標空間の中での話でした。そこではどんな点に対してもキチンと座標が定まっています。しかしこうしたことが常に可能かというと，いかにもあやしげです。たとえば「宇宙は曲っている」という表現にであった方は多いでしょう。宇宙はどうやら3次元ユークリッド空間ではないらしいし，時空も4次元ミンコフスキー空間ではないようです。つまり宇宙全体で通用する座標系はない，ということです。

もちろん，曲った空間においても全体で通用する座標がとれることもある。たとえば球面 $S^2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\}$ には $\mathbb{R}^3$ の座標 (x,y,z) があります。でも三つの座標には拘束条件がありますから，各点において実質的な座標は2つしかありません。ところが2つの座標，たとえば x と y

図1．球面 S^2

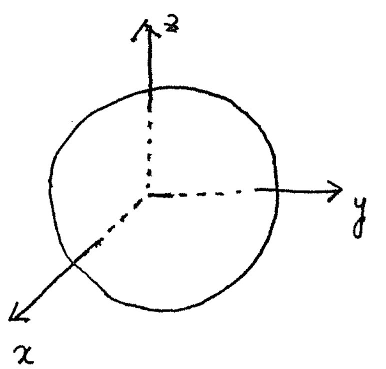
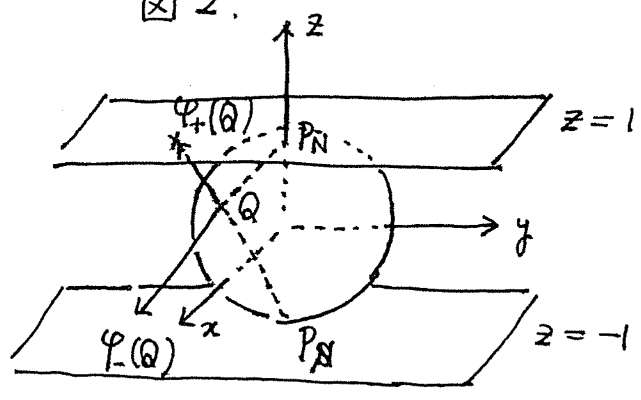


図2．



を決めても，z座標は一般には2通りの値をとります。つまり，S^2上全体で定まっていて，しかも独立な2つの座標(大域座標系)をとることができない。また球面に対してならば独立性を犠牲にしても3次元座標系(x, y, z)を考えるのもある程度自然ですが，対象が宇宙だとすると，宇宙の外に飛びだして外から宇宙をながめるというのも妙なものでしょう。

そこで大域座標系をとることはあきらめ，かわりに各点の近くだけに着目します。S^2の一点，たとえば北極$P_N = (0, 0, 1)$の近くを見てみると，ゆがんではいるけれども平面に近い感じがします。実際S^2から南極$P_S = (0, 0, -1)$を除いた部分$S^2 - P_S$と$\mathbb{R}^2$との間に1:1対応

$$\varphi_+ : S^2 - P_S \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi_+(Q) = (\text{直線 } \overline{P_S Q} \text{ と平面 } z = 1 \text{ との交点})$$

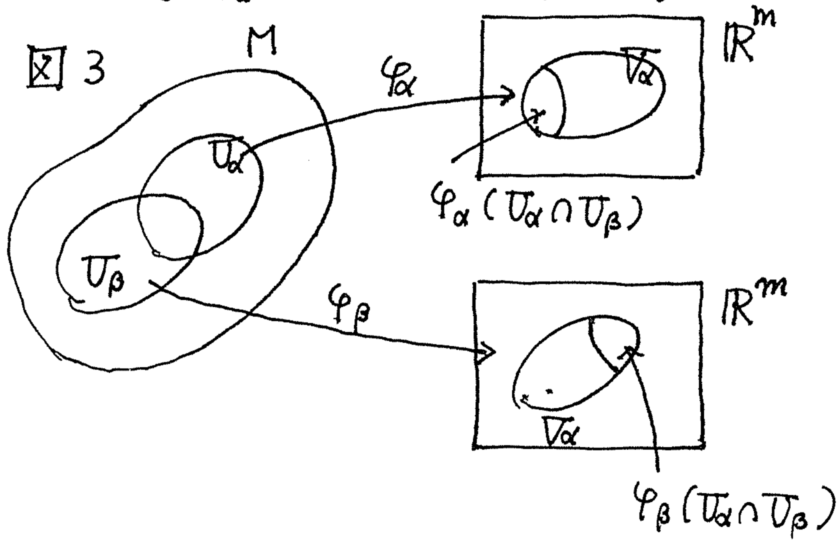
を定めることができます(図2)。φ_+もその逆像φ_+^{-1}も連続です。専門用語では，φ_+はS^2の開集合$S^2 - P_S$から$\mathbb{R}^2$への<u>同相写像</u>です。同様に$S^2 - P_N$から$\mathbb{R}^2$への同相写像φ_-も作れます(図2)。φ_+によって$S^2 - P_S$と$\mathbb{R}^2$とを同一視すれば$S^2 - P_S$(または$S^2 - P_N$)の点Qに座標系$(\varphi_+^1(Q), \varphi_+^2(Q))$(または$(\varphi_-^1(Q), \varphi_-^2(Q))$)が入ります。とくに$Q \in S^2 - \{P_N, P_S\}$なら2つ座標系が入っていていますが，当然これらは異ります。つまり各点$Q \in S^2$に対して一

つは座標系がとれるけれど，特別にこれ，という座標系を指定することはできない。

これを一般化すると，位相多様体の概念に到達します。

$\boxed{\text{定義}}$ Mを(Hausdorff, パラコンパクトな)位相空間とする。Mがm次元位相多様体であるとは，Mの開部分集合の族$\{U_\alpha\}$, $\mathbb{R}^m$の開部分集合の族$\{V_\alpha\}$, U_αからV_αへの同相写像φ_αの族$\{\varphi_\alpha\}$があって，$\bigcup U_\alpha = M$をみたすこと。

図3



(註) 位相空間とは点列の収束が定義されるような点集合，と考えてください。Hausdorffとは点列$\{x_1, x_2, \cdots\}$が収束するような点x_∞は存在すればただ一つである，という条件.

$\mathbb{R}^m$の座標を$(x^1, \cdots, x^m)$とすると，$\varphi_\alpha^i(Q) = x^i(\varphi_\alpha(Q))$は$U_\alpha$上連続です。$(\varphi_\alpha^1, \cdots, \varphi_\alpha^m)$を($\varphi_\alpha$によって定まる)$U_\alpha$上の局所座標系，$U_\alpha$を座標近傍と言います。図式

$$\mathbb{R}^m \supset \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{\varphi_\beta} \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^m$$

を考えると，$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$は$\mathbb{R}^m$の開部分集合$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$上定義され像$\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$を持つ連続写像で(図3)，$m$個

の独立変数をもつm個の連続関数 $\psi^i_{\beta\alpha}(x^1,\cdots,x^m)$, $i=1,\cdots,m$ と思うこともできます。$\psi^i_{\beta\alpha}(x)$ を座標変換関数(系)と言います。

$\boxed{\text{定義}}$ 位相多様体の定義で ($U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ のとき) $\psi^i_{\beta\alpha}(x)$ がすべて滑らかであるとき, Mをm次元の滑らかな多様体または可微分多様体という。

図2で与えた二つの座標系 $(\varphi^1_+, \varphi^2_+)$, $(\varphi^1_-, \varphi^2_-)$ により S^2 は滑らかな多様体になります。M, N を滑らかな多様体とし, $\phi: M \longrightarrow N$ を連続写像としたとき, ϕが滑らかな写像であるとは, Mの各点Qに対し, Qを含む座標近傍 $U_\alpha \subset M$ と局所座標系 $(\varphi^1_\alpha,\cdots,\varphi^m_\alpha)$, $\phi(Q)$ を含む座標近傍 $W_\nu \subset N$ とその局所座標系 $(\xi^1_\nu,\cdots,\xi^n_\nu)$ により, $\phi|_{U_\alpha \cap \phi^{-1}(W_\nu)}$ を, n個のm変数関数 ($\varphi^1_\alpha,\cdots \varphi^m_\alpha$ が自由変数) とみなしたとき, $\varphi^1_\alpha, \cdots, \varphi^m_\alpha$ でいくらでも微分できること, と定義します。特に$N=\mathbb{R}$ のとき, 滑らかな写像 $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ のことをM上の滑らかな関数といいます。

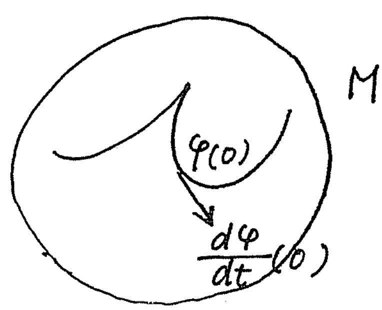
M, Nを滑らかな多様体, f を N 上の滑らかな関数, $\phi: M \longrightarrow N$ を滑らかな写像とすると, $f\circ\phi: M \longrightarrow \mathbb{R}$ はM上の滑らかな関数です。逆に 任意の滑らかな関数f に

対し $f\circ\phi$ が滑らかならば ϕ は滑らかであることがわかります。$f\circ\phi$ を ϕ による f の引き戻しといい, ϕ^*f と書くことが多い。M上の滑らかな関数全体を $\mathcal{D}^0(M)$ で表すと, $\mathcal{D}^0(M)$ は無限次元の可換環です。$\phi: M\longrightarrow N$ を滑らかな写像とすると, $\phi^*: \mathcal{D}^0(N)\longrightarrow\mathcal{D}^0(M)$ は環準同型です。特に M と N が**可微分同相**ならば $\mathcal{D}^0(M)\simeq\mathcal{D}^0(N)$ で, 実は逆も成立します。

2. 接ベクトル, 接空間, ベクトル場, 接束

M を $\mathbb{R}^3$ の中で $z=z(x,y)$ で与えられる滑らかな曲面とします。M の一点 $p\in(x_0,y_0,z(x_0,y_0))$ における M の**接ベクトル** a を p を通る直線 $p+ta$ が M と接するような3次元ベクトル a と考えるのが自然です。このようなベクトル全体（p における M の**接空間**）は2次元ベクトル空間になります。具体的には $\left\{\left(a^1, a^2, a^1\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)+a^2\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\right\}$ が接空間です。このような定義は M が $\mathbb{R}^n$ の中の滑らかな部分多様体の場合にもすぐ一般化することができ, 直観的にもわかりやすいものですが, M が $\mathbb{R}^n$ の中に入っていることを使うような定義は具合が悪い。一般に通用する定義を与えるために, 上の構成を反省してみましょう。

$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ を $\varphi(0) = p$ となるような滑らかな写像とします。φ の 0 での微分 $\left(\frac{d\varphi^1}{dt}(0), \frac{d\varphi^2}{dt}(0), \frac{d\varphi^3}{dt}(0)\right)$ は p での M の接ベクトルで，逆に任意の接ベクトルはこのようにして得られます。M 上の滑らかな関数 f を取ると，φ による f の引きもどし $(\varphi^* f)(t) = f(\varphi(t))$ は $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上の滑らかな関数です。



$$X_{\varphi,p}(f) = \frac{d(\varphi^* f)}{dt}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi(t)) - f(p)}{t}$$

は f の $\left(\frac{d\varphi^1}{dt}(0), \frac{d\varphi^2}{dt}(0), \frac{d\varphi^3}{dt}(0)\right)$ 方向への<u>方向微分</u>で，座標 x, y, z を M 上の関数と思ったとき

$$(X_{\varphi,p}(x), X_{\varphi,p}(y), X_{\varphi,p}(z))$$

が上の直観的な意味での接ベクトルを与えます。ところで

$X_{\varphi,p} : \mathcal{D}^0(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$-線型で，Leibniz 公式

$$(\star) \qquad X_{\varphi,p}(fg) = f(p)(X_{\varphi,p}(g)) + g(p)(X_{\varphi,p}(f))$$

を満たします。実は Leibniz 公式を満たす線形写像 $X_{\varphi,p} : \mathcal{D}^0(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ は $X_{\varphi,p}(x), X_{\varphi,p}(y)$ を決めれば完全に決定してしまいます。なぜなら

- $f = 1,\ g = 1$ に $(\star)$ を適用すると

$$X_{\varphi,p}(1) = 1 \cdot X_{\varphi,p}(1) + 1 \cdot X_{\varphi,p}(1) \qquad \therefore\ X_{\varphi,p}(1) = 0.$$

- 一般の可微分関数 f は

$$f = f(p) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(p) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(p)$$
$$\quad + (x-x_0)(x-x_0)g + (x-x_0)(y-y_0)h + (y-y_0)(y-y_0)k$$

と書けます。第1項に $X_{\varphi,p}$ をほどこすと 0, 第4項以降も 0 になります。結局 $X_{\varphi,p} = a$, $X_{\varphi,p}(y) = b$ と置くと,

$$X_{\varphi,p}(f) = a\frac{\partial f}{\partial x}(p) + b\frac{\partial f}{\partial y}(p), \quad \text{つまり} \quad X_{\varphi,p} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$$

となります。整理すると,

$$\begin{tikzcd}
(\text{直観的な意味の接ベクトル}) \arrow[r, leftrightarrow, "1:1"] & (X_{\varphi,p}(x), X_{\varphi,p}(y), X_{\varphi,p}(z)) \arrow[d] \\
((\star)\text{をみたす線形写像}) \arrow[r, leftrightarrow, "1:1"] \arrow[ur] & (X_{\varphi,p}(x), X_{\varphi,p}(y))
\end{tikzcd}$$

なる図式が得られます。結局，直観的な意味の接ベクトル $\left(a, b, a\frac{\partial z}{\partial x}(p) + b\frac{\partial z}{\partial y}(p)\right)$ と 微分作用素 $a\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + b\frac{\partial}{\partial y}\Big|_p$ が $1:1$ に対応します。この対応は $\mathbb{R}^n$ の中の m 次元部分多様体の場合も成立します。そこで滑らかな多様体 M とその一点 p に対し，$(\star)$ をみたす線型写像 $X_p : \mathcal{D}^0(M) \to \mathbb{R}$ を<u>接ベクトル</u>といいます。局所座標系を $x^1, \cdots, x^m$ とすると, X_p は $\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ の形で，p における M の接ベクトル全体 $T_p(M)$ は，$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ を基底とする m 次元ベクトル空間。

接ベクトルや接空間は M の一点について定義されるものです。M の各点 p について接ベクトル $X_p \in T_p(M)$ が定まっていて，しかもこれらが滑らかにつながっているとき，$X = \{X_p\}_{p\in M}$ を M 上の <u>ベクトル場</u> といいます。

ここで滑らかにつながっているとは，任意の可微分関数 $f \in \mathcal{D}^0(M)$ に対し，$X(f)(p) = X_p(f)$ を M 上の関数と見たとき，これがまた滑らかになることです。局所座標系 $(x^1, \cdots x^m)$ を使えば $X_p = \sum a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ と書いたとき，$a^i(p)$ がすべて滑らか，と言っても同じです。特にベクトル場 X は $\mathbb{R}$-線形写像 $\mathcal{D}^0(M) \longrightarrow \mathcal{D}^0(M)$ で，Leibniz 公式

(☆) $\quad X(fg) = f\,X(g) + g\,Y(f)$

を満足します。逆に (☆) をみたす線型写像 $X : \mathcal{D}^0(M) \rightarrow \mathcal{D}^0(M)$ はベクトル場です。

ベクトル場全体は自然にベクトル空間になりますが，更に非可換な積 $[\ ,\ ]$ が入って，いわゆる Lie 環になります。$X = \{X_p\}$, $Y = \{Y_p\}$ を二つのベクトル場として，

$[X, Y] : \mathcal{D}^0(M) \longrightarrow \mathcal{D}^0(M)$ を

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

で定義します。これが (☆) をみたすことをチェックします。

$$\begin{aligned}
[X, Y](fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\
&= X(fY(g) + gY(f)) - Y(fX(g) + gX(f)) \\
&= fX(Y(g)) + \cancel{X(f)Y(g)} + gX(Y(f)) + \cancel{X(g)Y(f)} \\
&\quad - fY(X(g)) - \cancel{Y(f)X(g)} - gY(X(f)) - \cancel{Y(g)X(f)} \\
&= f(X(Y(g)) - Y(X(g))) + g(X(Y(f)) - Y(X(f))) \\
&= f\,[X, Y](g) + g\,[X, Y](f).
\end{aligned}$$

問題　[,] が次を満たすことを示せ。

a)　$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$,　$Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

なら　$[X, Y] = \sum_{i,j} \left(X^j \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} - Y^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$

b)
- $[X, Y] = -[Y, X]$
- $[\alpha_1 X + \beta X_2, \gamma Y_1 + \delta Y_2] = \alpha\gamma [X_1, Y_1] + \alpha\delta [X_1, Y_2] + \beta\gamma [X_2, Y_1] + \beta\delta [X_2, Y_2]$
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

問題　$S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上のベクトル場の基底は

$$X_m = \frac{e^{\sqrt{-1}mt} + e^{-\sqrt{-1}mt}}{2} \frac{\partial}{\partial t} \qquad m = 0, 1, 2, \cdots$$

$$Y_m = \frac{e^{\sqrt{-1}mt} - e^{-\sqrt{-1}mt}}{2\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial t} \qquad m = 1, 2, 3, \cdots$$

で与えられます。$[X_m, X_n]$, $[X_m, Y_n]$, $[Y_m, Y_n]$ を求めてください。(この Lie 環は最も単純な無限次元 Lie 環の一つで“Virasoro 代数”の一次元中心による商 Lie 環です)

M の座標近傍 U_α と局所座標系 $(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^m)$ をとると, U_α 上の点 q における接ベクトル $X_q = \sum a_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\Big|_q$ は

$$U_\alpha \times V_\alpha, \qquad V_\alpha = \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x_\alpha^m} \cong \mathbb{R}^m$$

の元と考えることができます。別の座標近傍 U_β とその局所座標系 $(U_\beta, (x_\beta^1, \cdots, x_\beta^m))$ をもってくると,

$q \in U_\alpha \cap U_\beta$ に関し, $X_q = \sum a_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\Big|_q$ を書きかえると

$$X_q = \sum_{i,j} a_\alpha^i \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i}(q) \frac{\partial}{\partial x_\beta^j}$$

となります。そこで

$$(U_\alpha \cap U_\beta) \times V_\alpha \xrightarrow{\sim} (U_\alpha \cap U_\beta) \times V_\beta$$

を $\quad \left(p,\ a_\alpha^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\Big|_q\right) \longmapsto \left(p,\ \alpha_\beta^i \frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i}(q) \frac{\partial}{\partial x_\beta^j}\Big|_q\right)$

と定義してやると, これは可微分多様体 $T(M)$ を定義することがわかります。自然な射影 $U_\alpha \times V_\alpha \longrightarrow U_\alpha$ を寄せ集めることで $T(M) \xrightarrow{\pi} M$ なる自然な射影が得られ, $p \in M$ の逆像は $T_p(M)$ に他なりません。 $T(M)$ を M の<u>接束</u>と言います。ベクトル場とは, M から $T(M)$ への滑らかな写像 $X : M \to T(M)$ で $\pi \circ X = id$ となるもの, と言いかえることができます。M の各点 p に対し, $0 \in T_p(M)$ を対応させると, 零ベクトル場 $0 : M \to T(M)$ が得られます。開集合 $T(M) - 0(M)$ も多様体です。

このように可微分多様体 M が与えられると, 別の多様体 $T(M)$, $T(M) - 0(M)$ が得られます。M と N が微分同相なら $T(M)$ と $T(N)$, $T(M) - 0(M)$ と $T(N) - 0(N)$ は微分同相です。しかし2つの滑らかな多様体 M, N が同相であっても, $T(M) - 0(M)$ と $T(N) - 0(N)$ とが同相とは限りま

せん。

例　$S^7 \subset \mathbb{R}^8$ をノルム 1 の $\mathbb{H}^2$ の元の集合と見なします。$\tau_1, \tau_2 \in S^7$ が同値であるということを，$\sigma \in \mathbb{H}$，$|\sigma| = 1$ があって，$\tau_2 = \sigma\tau_1$ となることと定義すると，S^7 を同値類で割った空間（$\mathbb{H}$-射影直線）は S^4 になります。自然な射影 $S^7 \longrightarrow S^4$ は次のようにして得られます。

$$U_1 = \{(\tau_1, \tau_2) \mid \tau_2 \neq 0\} \longrightarrow \tau_2^{-1}\tau_1 \in \mathbb{H} = V_1$$

$$U_2 = \{(\tau_1, \tau_2) \mid \tau_1 \neq 0\} \longrightarrow \tau_1^{-1}\tau_2 \in \mathbb{H} = V_2$$

$$V_1 \ni \underset{\neq 0}{v} \longleftrightarrow \underset{\neq 0}{v^{-1}} \in V_2$$

$$U_1 \simeq V_1 \times S^3 \qquad (\tau_1, \tau_2) \longmapsto \left(\tau_2^{-1}\tau_1, \frac{\tau_2}{\|\tau_2\|}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|v|^2+1}}(\sigma v, \sigma) \longleftarrow (v, \sigma)$$

であり $V_1 \times S^3$ と $V_2 \times S^3$ の間の座標変換は

$$(v, \sigma) \longleftrightarrow \left(v^{-1}, \sigma\frac{v}{\|v\|}\right)$$

によって与えられますが，この変換を少し変えて

$$(v, \sigma) \longleftrightarrow \left(v^{-1}, v^{k}\sigma\frac{v^{1-k}}{\|v\|}\right)$$

とすると，別の可微分多様体 M_k が得られます。

Milnor によると M_{2k} は S^7 と同相，しかし $T(M_2) - 0(M_2)$ と $T(M_0) - 0(M_0)$ とは同相ではない。つまり M_2 は

S^7 と同相だけれども微分同相ではない，ということになります（Milnor の異種球面）．

3、積分——図形と解析との接点．

<u>線積分</u>　$\mathbb{R}$ 上の滑らかな関数を $[a_1, a_2]$ で積分することを考えます。$\int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt$ は確かに定まります。座標変換 $t = \varphi(u)$ を行ったらどうなるでしょうか。$\varphi(a_i) = b_i$ と置くと，置換積分の公式より

$$\int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt = \int_{b_1}^{b_2} f(\varphi(u))\frac{d\varphi(u)}{du}\,du$$

であり，被積分関数は $f(\varphi(u)) = \varphi^* f$ ではなく，$(\varphi^* f)\frac{d\varphi(u)}{du}$ です。一般の多様体のように標準的座標系というものがないときは，関数 f を積分する，というよりむしろ記号 dt を含めた $f\,dt$ を積分するのである，と考えた方が自然なのです。関数 $\times\, dt$ の形のものを（$\mathbb{R}$上の）<u>1次微分形式</u>と言います。一般に可微分多様体 M と局所座標系 $(U_\alpha, (x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^m))$ があったとき，$\omega = \sum \omega_{\alpha i}(p)\,dx_\alpha^i$ の形のものを U_α 上の~~微分~~1次微分形式と呼びます。ただし別の座標系 $(x_\beta^1, \cdots, x_\beta^m)$ をとって x_α^i を x_β の関数と思ったとき，

$$dx_\alpha^i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\,dx_\beta^j$$

と考えます。M上の微分形式（1次）とは，各座標近傍 U_α で1次微分形式が与えられていて，$U_\alpha \cap U_\beta$ 上では一致すること，と定義します。可微分写像 $M \xrightarrow{\varphi} N$ に対して，N上の微分形式 $\omega = \sum_i \omega_i dy^i$ の φ による引きもどし $\varphi^*\omega$ を $\sum_{i,j} \omega_i(\varphi(p)) \frac{d\varphi^i}{dx^j} dx^j$ として定義します。

$\varphi : [a_1, a_2] \longrightarrow M$ を可微分射像，ω をM上の1次微分形式とします。$\varphi^*\omega$ は $[a_1, a_2]$ 上の1次微分形式で

$\int_{a_1}^{a_2} \varphi^*\omega$ は φ のパラメータ付けに依存しません。つまり

$\phi : [b_1, b_2] \xrightarrow{\sim} [a_1, a_2]$ ならば $\int_{a_1}^{a_2} \varphi^*\omega = \int_{b_1}^{b_2} (\varphi\circ\phi)^*\omega$.

言いかえればその積分は，φ のパラメータ付けを忘れたM上の有向曲線 C だけで決まり，これを $\int_C \omega$ と書き ω の C に沿った線積分と呼びます。

1次微分形式の別の解釈をしてみましょう。X をM上のベクトル場とします。$p \in M$ をとって，X の p を始点とする積分曲線 $\varphi_p(t)$ をとります（付録3参照）。積分 $\int_0^t \varphi_p^*\omega$ を $t=0$ で微分してみます。$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，$\omega = \sum \omega_i dx_i$ と書くと，答は $\sum X^i \omega_i$ となります。これを $\langle X, \omega \rangle$ と書くことにすれば，1次微分形式 ω に対し線形写像

$$\langle \cdot, \omega \rangle : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{D}^0(M)$$

が得られます。1次微分形式全体 $\mathcal{D}^1(M)$ と，$\mathcal{D}^0(M)$－線型

射像：$\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{D}^0(M)$ 全体がなす $\mathcal{D}^0(M)$－加群との同型が得られます。特に $(dx^i)_p$ を $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ の双対基底と考えることができます。

一般次元での積分

$\mathbb{R}^m$ の中の領域 D での多重積分

$$S = \int \cdots \int_D f(x)\, dx^1 \cdots dx^m \qquad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

に対して また座標変換 $x^i = x^i(y)$ を考えますと，

$$S = \int \cdots \int_{D'} f(x(y)) \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right) dy^1 \cdots dy^m \qquad \text{②}$$

が成立します。 $dx^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j \qquad \cdots\cdots\cdots \text{③}$

でしたから，② は ① に ③ を代入し，$dx^{\sigma(1)} \cdots dx^{\sigma(m)} = (\mathrm{sgn}\,\sigma)\, dx^1 \cdots dx^m$，2つ同じ dx^i を含む積 $= 0$ とおいて得られることがわかります。そこで積 $\wedge$ を

$$\begin{cases} dx^{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(i_k)} = (\mathrm{sgn}\,\sigma)\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ dx^i \wedge dx^i = 0 \end{cases}$$

と(形式的に)おくと，$\mathbb{R}^k$ の領域 D から M への可微分写像 $\varphi : D \longrightarrow M$ と M 上の <u>k 次微分形式</u>

$\omega = \sum \omega_{i_1 \cdots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ に対し，$\int_D \varphi^* \omega$ は パラメータ付けによらず，M の中の向きづけられた

k次元図形(k-チェーン) $\varphi(D)$ だけで定まる量なので

$\int_{\varphi(D)} \omega$ と書き，ω の $\varphi(D)$ 上の積分と呼びます。

つまり，Mの中の k-チェーン(向きづけられたk次元図形) $E \subset M$ と M 上のk次微分形式 ω に対して $\int_E \omega$ なる数を対応させることにより，双線型写像

$$\underbrace{\{\text{実係数 } k\text{-チェーン}\}}_{= \mathcal{C}_k(M)} \times \underbrace{\left\{\begin{matrix}\text{(コンパクトな台をもつ)} \\ k\text{次微分形式}\end{matrix}\right\}}_{= \mathcal{D}^k_c(M)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

が得られます。

外微分 d，境界作用素 ∂，Stokes の定理

k次微分形式 $\omega = \sum \omega_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ に対し，外微分 $d\omega$ を $\sum \dfrac{\partial \omega_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ で定義すると $\mathbb{R}$-線形な外微分作用素 $d: \mathcal{D}^k_{(c)}(M) \longrightarrow \mathcal{D}^{k+1}_{(c)}(M)$ が得られます。dは次の性質をもちます。

1) $d \circ d : \mathcal{D}^k_{(c)}(M) \longrightarrow \mathcal{D}^{k+2}_{(c)}(M)$ は0写像.

2) $\omega \in \mathcal{D}^k_{(c)}(M)$，$\eta \in \mathcal{D}^j_{(c)}(M)$ とすると，

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta).$$

1) から $d(\mathcal{D}^{k-1}_c(M)) \subset \ker d \subset \mathcal{D}^k_c(M)$ で，商空間 $\ker d / d\mathcal{D}^{k-1}_c(M)$ を(コンパクト台をもつ) De Rham コホモロジー群 $H^k_{c,DR}(M)$ です。

$\partial : \mathcal{C}_k(M) \longrightarrow \mathcal{C}_{k-1}(M)$ を $E \mapsto \partial E (= E\text{の境界})$

なる境界作用素とします。∂ も線型で，$\partial\circ\partial : \mathcal{C}_k(M) \to \mathcal{C}_{k-2}(M)$ は0. 商空間 $\ker\partial/\partial\mathcal{C}_{k+1}(M)$ を，M の $\mathbb{R}$-係数k次ホモロジー群といい，$H_k(M)$ で表します。$H_k(M)$ は M の位相不変量です（付録0参照）

d と ∂ の関係について，次の公式（Stokesの定理）が証明されます。すなわち，$\omega \in \mathcal{D}^k_c(M)$，$A \in \mathcal{C}_{k+1}(M)$ とすると，

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega. \qquad (\text{Stokes})$$

これを用いると，双線形写像 $H_k(M) \times H^k_{c,DR}(M) \to \mathbb{R}$ が定まります。

定理（De Rham） 上の対応により，$H^k_{c,DR}(M)$ は $H_k(M)$ の双対空間である。特に $H^k_{c\,DR}(M)$ はMの位相不変量である。

4. カレントと調和形式

以後簡単のため，M は向きづけられたコンパクト m 次元多様体とします。特に $\mathcal{D}^k_c = \mathcal{D}^k$．$\omega \in \mathcal{D}^k(M)$，$\eta \in \mathcal{D}^{m-k}(M)$ の間の pairing $\langle \omega, \eta \rangle = \int_M \omega \wedge \eta$ を考えます。$\omega = 0$ ということと，$\forall \eta \in \mathcal{D}^{m-k}(M)$ に対し $\langle \omega, \eta \rangle = 0$ とは同値です。したがって，$\mathcal{D}^k(M)$ は $\mathcal{D}^{m-k}(M)$ の双対空間（正確には位相的双対空間）$\mathcal{E}^k(M)$

(＝k次カレントの空間)の部分空間です。同様に $\mathcal{C}_{m-k}(M)$ も $\mathcal{E}^k(M)$ の部分空間です。$\mathcal{E}^k(M)$ の<u>外微分</u>
$\tilde{d}: \mathcal{E}^k(M) \longrightarrow \mathcal{E}^{k+1}(M)$ を，$\eta \in \mathcal{D}^{m-k-1}(M)$ に対し

$$(\tilde{d}\omega)(\eta) = -(-1)^k \omega(d\eta)$$

によって定義します。($\omega \in \mathcal{E}^k(M)$). 特に $\omega \in \mathcal{D}^k(M)$ ならば $\int_M (-1)^k \omega \wedge d\eta + \int_M (d\omega) \wedge \eta = \int_M d(\omega \wedge \eta) = 0$ なので，$\tilde{d}$ を $\mathcal{D}^k(M)$ に制限したものは通常の外微分。また $\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega$ でしたから，$\tilde{d}$ を $\mathcal{C}_{m-k}(M)$ に制限したものは $\pm\partial$ です。これから自然な線型写像
$H^k_{DR}(M) \longrightarrow \tilde{H}^k(M) = \ker \tilde{d} / \tilde{d}(\mathcal{E}^{k-1}(M))$ および
$H_k(M) \longrightarrow \tilde{H}^{m-k}(M)$ が得られます。

<u>補題</u> $H^k_{DR}(M)$ と $\tilde{H}^{m-k}(M)$ は互いに双対.

$$H_k(M) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}^{m-k}(M).$$

この補題から De Rham の定理が示されます。

ここまでの議論では向きづけられているとか，コンパクトであるとかの条件は本質的ではありませんが，以下では必要。

$H^k_{c,DR}(M)$ は商空間として定義されました。しかし $d\mathcal{D}^{k-1}_c(M)$ は巨大な空間で，同値類を考えるというのは気持ちが悪いも

のです。そこで代表元の標準的なとり方はないのか，と考えてみます。一般的には標準的なとり方というものはないのですが，Riemann 計量 $ds^2 = \sum g_{ij}\, dx^i dx^j$ を決めればそのようなものがあるのです。

ds^2 を決めると自然に M の体積形式 $dv = \sqrt{\det g_{ij}}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ および $\mathcal{D}^k(M) \ni \omega, \omega'$, $p \in M$ に対し p での内積 $\langle \omega, \omega' \rangle_p$ が定まり，$(\omega, \omega') = \int_M \langle \omega, \omega' \rangle_p \, dv$ と定義することで，$\mathcal{D}^k(M)$ の内積 $(\ ,\ )$ が定義されます。$d : \mathcal{D}^k(M) \to \mathcal{D}^{k+1}(M)$ の形式随伴 $d^* : \mathcal{D}^k(M) \to \mathcal{D}^{k-1}(M)$ を，

$$(\omega, d\eta) = (d^*\omega, \eta) \qquad \forall \omega \in \mathcal{D}^{k+1}, \eta \in \mathcal{D}^k$$

をみたすただ一つの線型作用素として定まります。そうすると，

$$\begin{cases} \mathcal{D}^k(M) = d\mathcal{D}^{k-1}(M) \oplus d^*\mathcal{D}^{k+1}(M) \oplus \mathbb{H}^k \\ \ker d = d\mathcal{D}^{k-1}(M) \oplus \mathbb{H}^k \\ \mathbb{H}^k = (\ker d^*) \cap (\ker d) = \ker(dd^* + d^*d) \end{cases}$$

がわかります。実は $\omega = d\eta + d^*\xi + h$ と上の分解を行うと $(\omega, \omega) = (d\eta, d\eta) + (d^*\xi, d^*\xi) + (h, h)$ となるので，<u>調和形式</u>はコホモロジーの代表元のうちノルムを最小にするものとして特徴づけられるのです。

付録 0. 位相不変量, (可)微分不変量.

位相多様体 M に対し, 何らかの"量" $\gamma(M)$ が定まって, M と N が 同相なら $\gamma(M)=\gamma(N)$ となるとき, γ を位相不変量といいます。たとえば次元 $\dim : M \longmapsto \dim M$ や基本群 $M \longmapsto \pi_1(M)$ (の同型類), ホモロジー群 $H_k(M)$ などは位相不変量です。

それに対して, 可微分多様体 M によって定まる量 $\delta(M)$ で M と N が微分同相ならば $\delta(M)=\delta(N)$ となるようなものを微分(同相)不変量といいます。位相不変量は微分(同相)不変量ですが, 逆は正しくありません。

微分同相不変量としては

$\mathcal{D}^0(M)$ ($\mathbb{R}$-代数としての同型類)

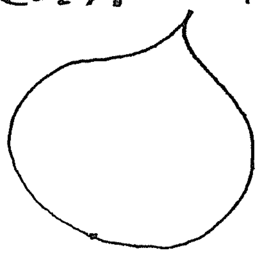
$\mathfrak{X}(M)$ (の Lie 環としての同型類)

$T(M)-O(M)$ (の位相同型類)

などがあります。$M \longmapsto \mathcal{D}^0(M)$ は単射になることが知られています。

付録 1. 位相多様体の例.

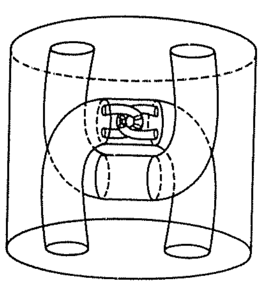
a) S^1の連続像を閉曲線, 同相写像によるS^1の像をJordan閉曲線という。Jordan閉曲線は位相多様体である。$\mathbb{R}^2$の中のJordan閉曲線は$\mathbb{R}^2$を2つの連結な領域に分割する(Jordanの定理)。内部領域は開球体と同相です(Schönflies)

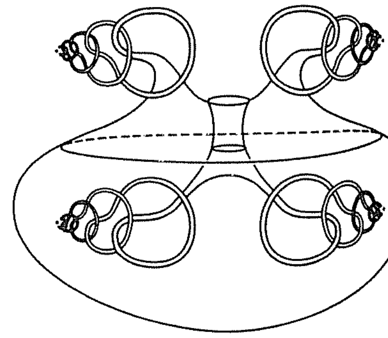
 $\simeq S^1 \not\simeq$ 

問題 8の字形閉曲線は位相多様体でないことを示せ。

b) n次元トーラス $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq S^1\times\cdots\times S^1$

c) 下図の複雑な曲面はいずれもS^2と同相, とくに位相多様体である。$\mathbb{R}^3$の中でこの曲面で囲まれる内部領域は球体と同相ではないので, Schönfliesの定理は高次元では成立しない。





付録2 接ベクトルと可微分写像

M, Nを可微分多様体, $\varphi: M \longrightarrow N$を滑らかな写像とします。$f$を$N$上の滑らかな関数とすると, $\varphi^* f = f \circ \varphi$は$M$上の滑らかな関数。$X_p$を$T_p(M)$の元とすると,

$$Y_{\varphi(p)}(f) = X_p(\varphi^* f)$$

は$T_{\varphi(p)}(M)$の元となります。この$Y_{\varphi(p)}$を$\varphi_* X_p$と書きます。$\varphi_*: T_p(M) \longrightarrow T_{\varphi(p)}(N)$は線型写像です。

問題　$\varphi: M \rightarrow N$とM上のベクトル場$X = \{X_p\}$があれば$\{\varphi_* X_p\}$が得られますが, これは必ずしもN上のベクトル場ではありません。なぜでしょうか。(ヒント: 相異る2点p, p'で$\varphi(p) = \varphi(p')$となる可能性があることに着目)　しかしφが微分同相であれば$\{\varphi_* X_p\}$はベクトル場になり, リー環としての同型をひきおこします。したがって$\mathfrak{X}(M)$のLie環としての同型類は微分不変量です。

付録3　ベクトル場，流れ，1径数変換群．

ベクトル場とは，いわば多様体の各点に対して方向ベクトルがくっついているようなものですから，M上に流れがあると考えることができます。点 $p \in M$ からこの流れに沿って自然に流されていけば曲線（pを始点とする積分曲線）が得られます。積分曲線は次の微分方程式をみたす写像 $(-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{\varphi_p} M$ として定義します。　$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ として

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_p^i}{dt}(t) = X^i(\varphi(t)) \\ \varphi_p^i(0) = x^i(p) \end{cases}$$

Cauchy の定理により，十分小さな ε に対し解はただ一つ定まります。　また　$\varphi_p(t)$ を t をパラメータ，pを変数と考えて　$\varphi_t : M \longrightarrow M$　と思うと（$\varphi_t(p) = \varphi_p(t)$）

$$\begin{cases} \varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p)) \\ \varphi_0(p) = p \qquad\qquad \therefore\ \varphi_t^{-1} = \varphi_{-t} \end{cases}$$

が成立し，十分小さなtに対し φ_t は Mの（局所）微分自己同型を与えます。Mがcompactなら $^\forall t \in \mathbb{R}$ に対して φ_t が定義され，X に対応する1径数変換群 $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ が定まります。