数 学 入 門 公 開 講 座

平成１２年７月３１日（月）から平成１２年８月４日（金）

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1．球面の対称性（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助手　永田　雅嗣

「対称性」というのは、実生活にもなじみの深い概念です。「球面という図形にどんな対称性があるか」と問われれば、誰でも点対称、回転対称、面対称などのアイデアを思い起こすでしょう。では、点対称や面対称が必ず周期２の対称性であるのは、なぜでしょうか。「周期３の点対称」のようなものがありえないことの理由をつきつめて考えていくと、図形のグローバルな性質をつかさどる、美しい数学が見えてきます。図形の定性的な性質と、定量的な群論とを結ぶ、変換群論と呼ばれる幾何理論を紹介したいと思います。

2．有理点の問題と符号暗号への応用について（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・教授　伊原　康隆

代数曲線の有理点が符号、暗号(主に符号)の問題にどのように使われるかについて、入門的な話をしたいと思います。

体、とくに有限体とは何か(？)といったあたりから話をはじめ、代数曲線とその有理点、楕円曲線の場合、等についての基礎的な話をし、それらが符号、暗号に関する如何なる問題にどう応用されるかについて、その一端を紹介したいと思います。

3．離散と連続 － 微分方程式の数値解析（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助手　降籏　大介

「数えられるもの＝離散量」と「数えられないもの＝連続量」という素朴な感覚にたがわず、数学では離散量と連続量は異なった扱いを受けます。

しかし、離散と連続の間には、連続は離散の極限であるという直感を越えて微妙で意義深い関係があるらしいことが各分野の様々な結果によって強く示唆されていて、非常に興味深いものがあります。

本講座では、そうした離散と連続の関係の一端を紹介するべく、離散量を対象としアルゴリズムの構築と計算量の解析を柱とする計算機科学と、連続量を対象とし関数空間の解析を柱とする関数解析学とが合流する分野－微分方程式の数値解析－を中心に講演を行います。

時　間　割

時間＼日	7月31日(月)	8月1日(火)	2日(水)	3日(木)	4日(金)
10：30～11：45	永田	永田	永田	永田	永田
11：45～13：00	休　憩				
13：00～14：15	伊原	伊原	伊原	伊原	伊原
14：15～14：45	休　憩				
14：45～16：00	降籏	降籏	降籏	降籏	降籏

球面の対称性

京都大学数理解析研究所・助　手　　永　田　雅　嗣

2000, JULY 31, AUGUST 1,2,3,4,　10:30～11:45

球面の対称性

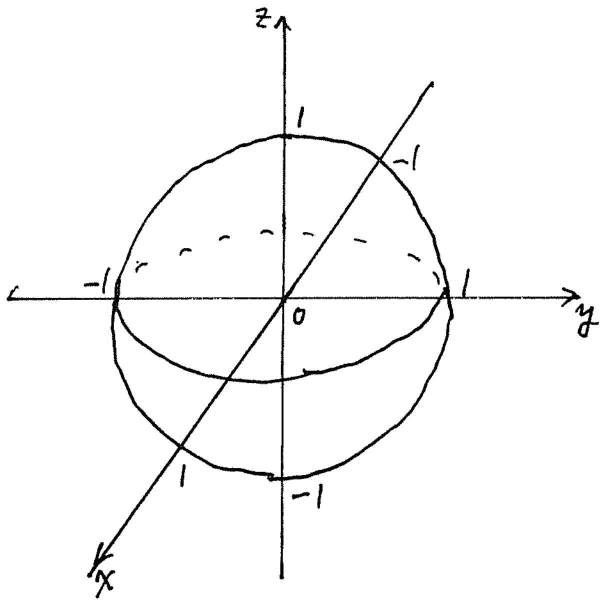
永田雅嗣（京大数理研）

1　はじめに

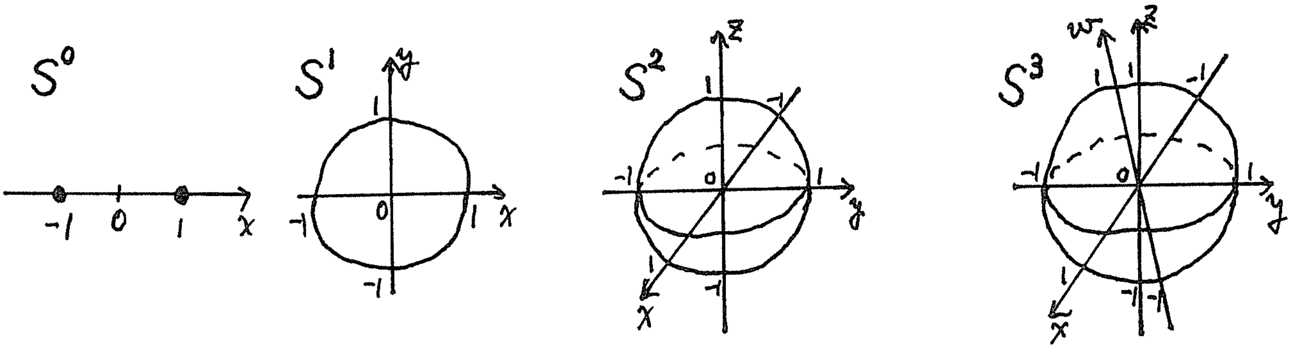
「対称性」というのは、実生活にもなじみの深い概念です。「球面という図形にどんな対称性があるか」と問われれば、だれでも点対称、回転対称、面対称などのアイデアを思い起こすでしょう。では、回転対称にはどんな周期でもありうるのに、点対称が必ず周期2の対称性であるのは、なぜでしょうか。「周期3の点対称」のようなものがありえないことの理由をつきつめて考えていくと、図形のグローバルな性質をつかさどる、美しい数学が見えてきます。図形の定性的な性質と、定量的な群論とを結ぶ、変換群論と呼ばれる幾何理論を紹介したいと思います。

2　扱う図形

題名にもあるように、ここではおもに「球面」という図形を対象としたいと思います。ふつう日常用語で「球面」といえば、「2次元球面」のことでしょうか。これは、3次元 xyz 空間の中で、$x^2+y^2+z^2=1$ という方程式の解としてあらわされる曲面です：



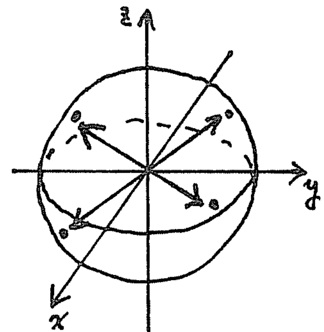
これを一般化して、「n 次元球面 S^n」($n \geq 0$) を考えましょう：



$x^2 = 1$　　$x^2 + y^2 = 1$　　$x^2 + y^2 + z^2 = 1$　　$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$

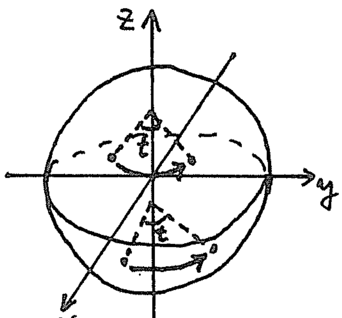
「n 次元球面 S^n」は、$(n+1)$ 次元空間に浮かぶ n 次元の図形です。「2次元球面」を、今後 S^2 と呼びます。この図形での「対称性」のうち、代表的なものを挙げてみましょう：

点対称



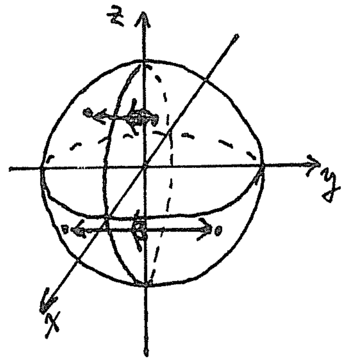
$$(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$$

回転対称



$$(x, y, z) \to (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z)$$

面対称



$$(x, y, z) \to (x, -y, z)$$

ほかの次元の球面 S^n についても、同じように考えてみてください。

3　一般の対称性

一般に、図形 X があるとき、その図形の「対称性」とは、X から X への同相写像

$$g : X \to X$$

であって、その対応を何度か繰り返すと元に戻るものを言います。X のすべての点が元に戻るような最小の繰り返し回数を、その対称性の「周期」と言います。つまり、g の周期が m とすると、

$$\overbrace{g \circ g \circ g \circ \cdots \circ g}^{m回}(x) = x$$

がすべての $x \in X$ について成り立つ、ということです。以後、この左辺を $g^m(x)$ であらわします。

さて、$g : X \to X$ を図形 X の対称性とするとき、その「固定点集合」X^g を、次のような X の部分集合とします。

$$X^g = \{x \in X | g(x) = x\}$$

上記の S^2 への3種類の対称性で調べると、点対称の固定点集合は空集合（つまり固定される点がない）、回転対称の固定点は2点 $S^0 = \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$、面対称の固定点集合は円 $S^1 = \{(x,0,z)|x^2+z^2=1\}$、となっています。

実は、2次元球面 S^2 については、そこにどんな対称性 $g : S^2 \to S^2$ を与えても、その固定点集合は必ず空集合 $S^{(-1)}$（以下説明の便宜のため空集合のことを「(-1) 次元球面」と呼び、n 次元球面のうちの1つとみなすことにします）、2点 S^0、円 S^1、または全体 S^2（何も動かさない恒等写像 $\mathrm{id} : S^2 \to S^2$ も対称性として考えた場合）のいずれかになることがわかっています。

より高い次元の球面では、そこまで限定されることはないのですが、少し一般化された形で次のことがわかっています：

> 『**Smith** の定理』：X が mod$p$ ホモロジー n 次元球面、p は素数、G が p-群、G が X に作用しているとすると、その作用の固定点集合 X^G は、必ず mod$p$ ホモロジー s 次元球面、ただし s は $-1 \leq s \leq n$ をみたすある整数、となる。

「mod$p$ ホモロジー s 次元球面」とは、mod$p$ ホモロジーの意味で s 次元球面と似ている図形、ということです。たとえば、離散な点集合（0次元の図形）の場合には、「mod$p$ ホモロジーの意味」は「普通の意味」とまったく同じ意味になりますから、

固定点集合がもし離散な点集合ならば、それは S^0、すなわち2点でなければならない（つまり、1点だけを固定するような対称性や、固定点が4点となるような対称性はありえない)

という、驚くべき結果なのです。

4 群

さきほど、「p-群 G が図形 X に作用している」という用語が出てきました。図形 X の対称性は、写像 $g: X \to X$ であって何度か繰り返すと元に戻るもの、と定義しましたが、そういうものの性質を調べるためには、1つの写像 $g: X \to X$ のみに注目するのではなく、それを何度か繰り返したものたち、またはその他の別の写像 $h: X \to X$ たちをもひとまとめに考えて、それらの集まり

$$G = \{g, g^2, g^3, \cdots, g^m, h, h^2, h^3, \cdots\}$$

（ただし $g^m = e$、$e: X \to X$ は恒等写像 $e(x) = x$、また h についてもそれ独自の周期を仮定、など）を扱うことが必要になります。このような G を「群」と呼びます。一般に群とは、何か別の集合 X の変換 $X \to X$ を集めたもので、変換の合成による代数的な相関関係（たとえば $g^m = e$ という関係）を抽象して、その代数的構造から個々の変換 $X \to X$ の持つべき性質を導き出そうとするための道具です。

ここで、最も基本的な群の例として、「位数 m の巡回群」を定義しましょう。X を2次元球面 S^2 とし、その「z 軸を中心とした $1/m$ 回転の回転対称」を g とします。つまり、

$$g(x, y, z) = (x \cos\frac{2\pi}{m} - y \sin\frac{2\pi}{m}, x \sin\frac{2\pi}{m} + y \cos\frac{2\pi}{m}, z)$$

です。これは、北極点 $(0, 0, 1)$ と南極点 $(0, 0, -1)$ との2点を固定点とする変換で、角度 $2\pi/m$ の回転ですから、ちょうど m 回繰り返せば元に戻ります：

$$g^m(x, y, z) = (x, y, z) = e(x, y, z)$$

このとき、この g の「繰り返したち」を全部集めた集合

$$G = \{g, g^2, g^3, \cdots, g^m = e\}$$

を、「位数 m の巡回群」と呼びます。この群を C_m と書くこともあります。集合としては m 個の要素からなりますが、大切なことは、それら m 個の要素はすべて g という特定の1個

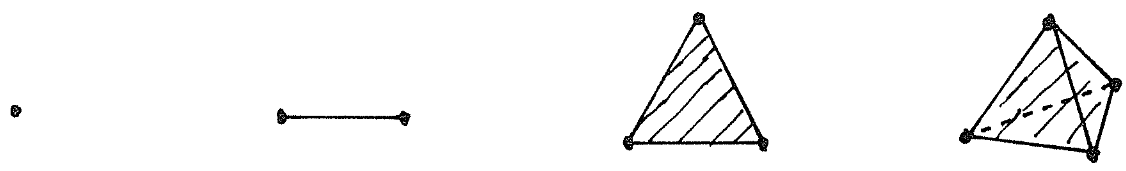
の要素（「生成元」と呼びます）を何回か合成したものであり、また、$m-1$ 回までは e とは異なっていて m 回目ではじめて e と等しくなる（「元に戻る」変換 e、$e(x,y,z)=(x,y,z)$ をこの群の「単位元」と呼びます）という代数構造です。

ここで観察したことは、「どんな自然数 m に対しても、2次元球面には周期 m の回転対称がある。具体的には z-軸を中心、角度 $2\pi/m$ の回転によって実現される」ということです。このことを、数学用語で「どんな自然数 m に対しても、2次元球面には位数 m の巡回群の効果的な作用が存在する」と言いあらわします。

5　最初の道具－図形のオイラー数

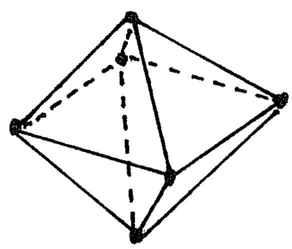
対称性 $g : X \to X$ の性質を調べるために図形を定量化して群の代数構造との関係をみつける、というのが本講演のテーマなのですが、その「図形を定量化」の第一歩が、オイラー数と呼ばれる数です。個々の図形には、その図形に固有の整数、オイラー数が定まります。この数が、その図形の持ちうる幾何構造（たとえば対称性）に、重要な条件を与えるのです。

オイラー数を定義するために、図形に「足場」となるべき構造を与えます：



e_0：一点　　e_1：線分　　e_2：正三角形　　e_3：正四面体

これらの e_n を、「単体」（「n 次元単体」）と呼びます。図形 X を同相写像で変形して、いくつかの単体の組み合わせとしてあらわすことを、その図形の単体分割と言います。（もちろん、その「組み合わせ」のやり方には条件が付くのですが、その詳細はここでは省略します）たとえば2次元球面 S^2 は、次のように6個の0次元単体、12個の1次元単体、8個の2次元単体で単体分割できます：



3次元単体は使っていない、ということに注意して下さい。さて、一般に、図形 X の単体分割が c_n 個の n 次元単体から成っているとき、その図形 X の「オイラー数」$\chi(X)$ を、

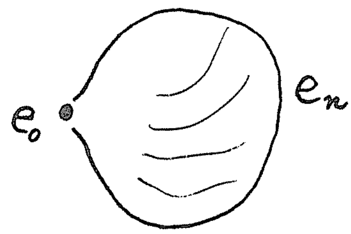
$$\chi(X) = \sum_n (-1)^n c_n = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots$$

と定義します。たとえば上記の単体分割による S^2 のオイラー数は、

$$\chi(S^2) = 6 - 12 + 8 = 2$$

です。重要なことは、単体分割のやり方がいろいろあっても、同じ図形 X の単体分割ならばいつでも（単体分割のやり方によらずに）オイラー数は同じになる、ということです。この意味で、オイラー数という整数は、図形 X の不変量です。

さて、「単体分割」の「組み合わせの条件」をゆるめて、もう少し自由な組み合わせを許した、「胞体分割」というものも考えられます。直観的に言うと、「単体分割」が「平らな単体」どうしを「まっすぐに」貼り合わせて作るのに対し、「胞体分割」は、「曲がってもよい胞体」を、「胞体の境界部分に限り、つぶしこんで貼ってもよい」としたものです。この胞体分割を許せば、n 次元球面は、たった2個の胞体のみに分割できます：



$S^n = e_0 \cup e_n$

この胞体分割によって n 次元球面のオイラー数を計算すれば、$c_0 = 1, c_n = 1$, その他の $c_i = 0$ となりますから、

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$$

つまり、球面は偶数次元か奇数次元かでオイラー数が決まる：

$$\chi(S^{2k}) = 2, \quad \chi(S^{2k-1}) = 0$$

ということがわかります。

ここで、図形 X に何らかの対称性 $g : X \to X$ が与えられたとします。「単体近似定理」という定理があって、X を十分細かく分割し直せば、写像 $g : X \to X$ は、単体分割の構造

を保つ写像（つまり、各単体を単体に移す写像、「単体写像」という）で近似できることがわかっています。そこで、以後すべての写像は単体写像だとしておきます。

第1の場合として、対称性 $g : X \to X$ の周期が素数 p の場合を考えましょう。g の周期というのは、X のすべての点を同時に元の点に返すための最小の繰り返し回数ですが、X の個々の点 x のみに注目して考えればその1点 x については g の周期よりも早い回数で x に戻る可能性があります。ところが、整数の掛け算の代数的構造をよく考えてみると、この「x が最初に x に戻る g の回数」が「g の周期」の約数である、ということがわかります。（ぜひ、厳密に証明してみて下さい。）

今は、g の周期が素数 p の場合を考えていますので、その約数は1であるか p であるかのどちらかです。したがって、X の個々の点は、

（1）点 x の周期が1、すなわち $g(x) = x$、つまり $x \in X^g$ の場合

（2）点 x の周期が p、すなわち $x, g(x), g^2(x), \cdots, g^{p-1}(x)$ の p 個がすべて異なる場合

のいずれかに属することがわかります。今、g は単体写像であるとしていますので、X の各単体も、それぞれ（1）か（2）のいずれかの挙動をすることになります。したがって、

$X - X^g$ の単体の個数は p の倍数である

ということがわかります。つまり、オイラー数について、次の重要な公式がわかりました：

X に周期が素数 p の対称性 g があれば、$\chi(X)$ と $\chi(X^g)$ との差は p の倍数

2次元球面（一般に偶数次元球面）のオイラー数は $\chi(S^2) = 2$ です。空集合のオイラー数は0です。このことから、

固定点のない対称性が偶数次元球面にあればその周期は2でなければならない

という、非常に強い結果が出るのです。これが、冒頭で述べた「2次元球面に周期3の点対称のようなものがありえないことの理由」です。注意していただきたいことは、このことを示すために難しいことは何も使っていない、ということです。Smith の定理のような一般化された定理を導くには、いろいろの抽象的道具立てが必要になりますが、今説明した事実（これは Smith の定理のごく特別の場合とも言えますが）には、そのようなものは一切要りません。必要だったのは、オイラー数という不変量があるという事実、図形の単体の個数を符号付きで数えるだけで図形に内在する性質が浮かび上がってくる、という発見です。

幾何学は、このような不変量の発見によって、図形の定性的性質の判定を定量化して代数学に帰着することで発展してきたのです。

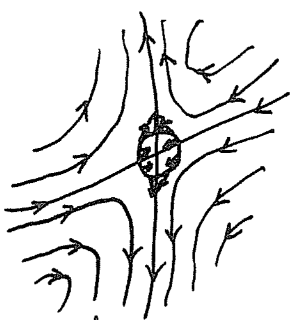
6　ベクトル場とオイラー数

2次元曲面 X （たとえば2次元球面 S^2）の上に接ベクトル場があったとします。接ベクトル場とは、X の各点 x にその点で X に接する接ベクトル $v(x)$ があって、$v(x)$ は x の変動につれて滑らかに変動する、としたものです。

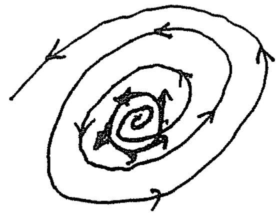
$v(x)=0$ となる点を、そのベクトル場の特異点と言います。今、考えているベクトル場の特異点はすべて「孤立している」と仮定します。つまり、特異点どうしが連続的に並ぶことがなく、各特異点のごく近い近傍には他の特異点はないとしておきます。

特異点 x に対して、その「指標数」index(x) を、次のように定義します。まず、点 x のごく近い周囲を一周回る円を考えます。その円の上を、好きな点から出発して、（反時計回りに）一周歩くとします。歩いていくにつれて、その足元の点でのベクトル $v(x)$ は方向を変えていきます。（今、孤立した特異点のみを考えているので、この円周上では $v(x)\neq 0$ です。）一周歩く間に、歩く人から見た $v(x)$ の相対方向は、変化して元に戻るのですから、整数回回転することになります。歩く人から見て反時計回りを正の回転、時計回りを負の回転として考えた回転数を index(x) と定義します。

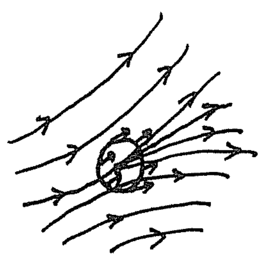
いくつかの実例を挙げておきましょう：



index = −1



index = +1



index = 0

index = +2

次の公式が成り立ちます：

$$\chi(X)=\sum_{x}\mathrm{index}(x)$$

つまり、接ベクトル場の特異点の指標数という、きわめて局所的な性質をあらわす数が、その接ベクトル場が乗っている図形 X の上のすべての特異点にわたって総和をとると、X という図形に固有のグローバルな数量であるオイラー数と等しくなる、ということです。たとえば、

2次元球面 S^2 のオイラー数は2ですから、特に

S^2 上の接ベクトル場には必ず特異点が存在する

ということがわかります。これが、「髪の毛には必ずつむじがある」ことの数学的理由です。

7　周期が素数でない場合

第5節では、対称性 $g: X \to X$ の周期が素数 p の場合を考察して、$\chi(X) - \chi(X^g)$ が p で割り切れることを示しました。この節では、周期 m が素数でない場合を考えましょう。

例として $m = 6$ の場合を考えてみると、素数周期の場合に X の点が2種類のタイプに分類されたのに対して、$m = 6$ の場合には4種類のタイプが生じうることがわかります：

（1）点 x の周期が1、すなわち $g(x) = x$、つまり $x \in X^g$ のもの

（2）点 x の周期が2、すなわち $x, g(x)$ の2個は異なるが $g^2(x) = x$ となるもの

（3）点 x の周期が3、すなわち $x, g(x), g^2(x)$ の3個は異なるが $g^3(x) = x$ となるもの

（4）点 x の周期が6、すなわち $x, g(x), g^2(x), \cdots, g^5$ の6個の点がすべて異なるもの

の4種類です。一般に、図形 X に周期 m の対称性があれば、X の点のタイプは m の約数の種類に対応してあらわれます。

このように、群 G が図形 X に作用するとき、X の各点 x のタイプはその点の「イソトロピー部分群」G_x によって記述されます：

$$G_x = \{h \in G | h(x) = x\}$$

上記の $G = C_6$ の場合には、タイプ（1）が $G_x = G = C_6$ となる場合でそのような x 全体が固定点集合 X^G をなし、タイプ（2）が $G_x = \{g^2, g^4, e\} = H \cong C_3$ となる場合、タイプ（3）が $G_x = \{g^3, e\} = K \cong C_2$ となる場合、そしてタイプ（4）が $G_x = \{e\}$ となる場合です。

G_x は G の部分群、つまり群の代数構造で閉じた部分集合で、それ自身群をなしていますから、もとの作用の制限として G_x も X に作用しています。この部分群の作用の固定点集合を上記の $G = C_6$ の場合で考えてみると、

X^G はタイプ（1）の点全体

X^H はタイプ（1）または（2）の点全体

X^K はタイプ（1）または（3）の点全体

$X^{\{e\}}$ はタイプ（1）（2）（3）（4）全部

となっています。変換が単体写像になっているような単体分割を選んでおくと、タイプ（2）の単体は個数が2の倍数、タイプ（3）の単体は個数が3の倍数、タイプ（4）の単体は個数が6の倍数ですから、オイラー数の関係式が出てきます：

$$\chi(X) + \chi(X^K) + 2\chi(X^H) + 2\chi(X^G) = 6\chi(X/G)$$

ただしここで X/G とは「商空間」と呼ばれるもので、X の点で G の要素による変換で移りあうものどうしを1つに同一視することによってできる図形のことです。つまり、X の単体分割で、それぞれのタイプごとに何個かずつ組になる単体（タイプ（2）では2個ずつ、タイプ（3）では3個ずつ、タイプ（4）では6個ずつ）を、それぞれ1個の単体に「重ね合せて」しまったもの、とみることもできます。

この手法は、必ずしも巡回群とは限らない、一般の有限群の作用にも、たやすく一般化することができます。一般の群 G が図形 X に作用しているとき、X の各点 x のタイプは、そのイソトロピー群 G_x で決まります。つまり、群 G の部分群を全部リストしておいて、それぞれをイソトロピー群とするような点のタイプごとに、順序良く単体の個数を数え上げていけばよいのです。一般の公式は、参考文献に挙げた「変換群論」（川久保勝夫著）の 235 ページ、定理 37.7 に載っています：

$$|G|\chi(X/G) = \sum_i n_i \chi(GX^{H_i})$$

ただし $|G|$ は群 G の要素の個数で、n_i は部分群 H_i の部分群の個数を数えることにより帰納的に決まる整数です：

$$H_i = \{e\} \quad \Rightarrow \quad n_i = 1$$

$$H_i \neq \{e\} \quad \Rightarrow \quad n_i = |H_i| - \sum n_j$$

最後の和は H_i の部分群のうち H_i とは等しくないものを、G の中での共役類に分けた集合にわたる和とします。G が可換群でない場合には、H_i による固定点集合 X^{H_i} が G の作用によって X^{H_i} の外部に移ってしまうことがあるため、正しく単体の数を数えるには X^{H_i} の代わりにそれを G の作用で移した点の和集合 GX^{H_i} を考え、さらに重複の係数を数える際にも部分群の共役類による寄与を考慮する必要が生じるのです。

可換でない群の例も考えてみましょう。p を素数とし、二面体群 $D(2p)$ を、次のように定義します。集合としては

$$D(2p) = \{e, g, g^2, \ldots, g^{p-1}, h, gh, g^2h, \ldots, g^{p-1}h\}$$

とし、代数的関係として $g^p = e, h^2 = e$ および $hg = g^{p-1}h$ を入れたものです。hg と gh とが異なりますから、これは可換群ではありません。この群は、「正 p 角形を自分自身に移す変換」の全体、として実現されます。g は、正 p 角形を、重心を中心に回転させます。この変換は p 回繰り返せば元に戻ります。h は、最初にうまく固定しておいた直線についての線対称、いわゆる「裏返し」です。正 p 角形を反時計周りに回転させてから裏返したときと、先に裏返してから反時計周りに回転させたときとでは、結果が違います。これが $hg \neq gh$ をあらわしています。

部分群の共役類は $D = D(2p), E = \{e, g, g^2, \ldots, g^{p-1}\}$, $F = \{e, h\}, \{e\}$ の 4 種類で、オイラー数の関係式は次のようになります：

$$\chi(X) + \chi(DX^F) + 2\chi(DX^E) + 2\chi(X^D) = 2p\chi(X/D)$$

特に、固定点のない作用ならば X のオイラー数が $2p$ の倍数でなければならないこともわかります。

8　自由作用の例

ここからは、簡単のため、イソトロピー群が常に単位元のみから成るような作用、つまり、どんな $g \in G$ とどんな $x \in X$ についても $g \neq e$ である限り $g(x) \neq x$ となる場合のみを考えます。このような作用を「自由作用」と言います。イソトロピー群が単位元のみですから、前節で述べたような「点のタイプ」は最後のタイプのみの一種類で、点や単体は常に個数 $|G|$ 個ずつが組になって移り合います。$g \in G$ が単位元 e でなければ、固定点集合 X^g は常に空集合です。

まず、位数 2 の巡回群 C_2 は、すべての n 次元球面 S^n に自由作用を持ちます。これは第 2 節でも述べた、「原点に関する点対称」です：

$$g \cdot (x_0, x_1, \ldots, x_n) = (-x_0, -x_1, \ldots, -x_n)$$

次に、2 より大きい位数 m の巡回群 C_m の自由作用を考えます。偶数次元球面 S^{2k} のオイラー数は 2 ですから、第 5 節の結果により、C_m が S^{2k} に自由作用を持つことは不可能です。そこで、奇数次元球面 S^{2k-1} を考えましょう。

S^{2k-1} は、複素数 k 次元ベクトル空間の単位球面ですから、複素数成分を用いて

$$S^{2k-1} = \{(z_1, \ldots, z_k) | \sum z_j \cdot \bar{z}_j = 1\}$$

と書けます。位数 m の巡回群 $G = \{g, g^2, \cdots, g^m = e\}$ に対して、1 の m 乗根 $\xi = \cos 2\pi/m + i \sin 2\pi/m$ を使って

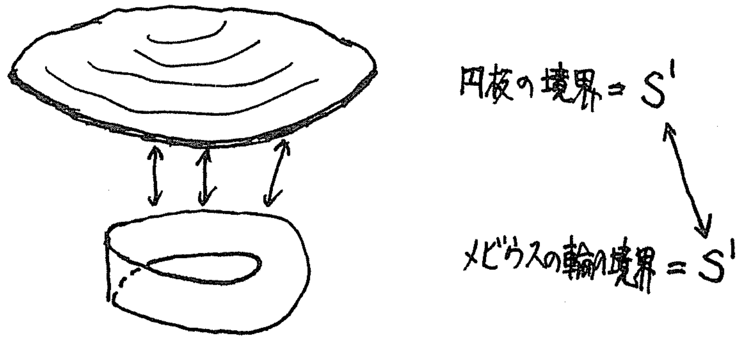
$$g \cdot (z_1, \ldots, z_k) = (\xi z_1, \ldots, \xi z_k)$$

と定義します。複素数の掛け算が可逆なことから、この作用は周期 m の自由作用であることがわかります。

これら2つの自由作用の商空間を、それぞれ「射影空間」$RP^n = S^n/C_2$ と「レンズ空間」$L^{2k-1}(m) = S^{2k-1}/C_m$ と呼びます。第7節の計算により、それぞれのオイラー数は

$$\chi(RP^{2k}) = \chi(S^{2k})/2 = 1$$
$$\chi(RP^{2k-1}) = \chi(S^{2k-1})/2 = 0$$
$$\chi(L^{2k-1}(m)) = \chi(S^{2k-1})/m = 0$$

とわかります。2次元射影空間とは、2次元球面で互いに原点対称な2点どうしを同一視してできる空間ですから、2次元球面を北半球と南半球とに分けて考えれば、RP^2 が円板の周囲に「メビウスの輪」を貼り付けてできる図形であることがわかります。胞体分割すれば、$RP^2 = e_0 \cup e_1 \cup e_2$ となります。



2次元射影空間

レンズ空間も、胞体分割すれば各次元に1個ずつの胞体しか持たないような胞体分割を持ちます。たとえば3次元レンズ空間は $L^3(m) = e_0 \cup e_1 \cup e_2 \cup e_3$ です。

3次元射影空間と3次元レンズ空間の、別の表現法を紹介しましょう。さきほど述べた、複素数成分表示を使った S^3 への C_m の自由作用を思い出しましょう：

$$\xi \cdot (z, w) = (\xi z, \xi w)$$

この作用は単なる複素数によるスカラー倍ですから、ξ 倍に限らずより一般の複素数倍に拡張することができます。そこで、長さが 1 の複素数全体 $\{\zeta = \cos\theta + i\sin\theta\}$ を考えると、この集合は複素数の掛け算によって群をなし、しかも図形としては実 2 次元ユークリッド空間の原点からの距離が 1 の点集合ですから円 S^1 と同じものになります。そこで以後、これを「群 S^1」と呼びます。つまり、

$$\zeta \cdot (z, w) = (\zeta z, \zeta w)$$

という対応によって、群 S^1 は 3 次元球面に自由作用を持ちます。

作り方から、どんな巡回群 C_m に対しても、その生成元 $\xi = \cos 2\pi/m + i\sin 2\pi/m$ をそのまま自然に複素数として群 S^1 の要素とみなすことで、自然に群 C_m は群 S^1 の部分群になります。ところが、3 次元球面 S^3 の各点での S^1 の作用を観察すれば、それぞれの「S^1 軌道」ごとに一様に C_m が乗っていることがわかります。すべての作用は自由作用ですから、これらの作用の商空間どうしを比べれば、

商空間 S^3/C_m に商群 S^1/C_m が自由作用しており、その作用の商空間は S^3/S^1 に等しい

ことがわかります。ここで C_m の S^1 への作用は円における角度 $2\pi/m$ の回転移動に過ぎませんから、商群 S^1/C_m もまた S^1 と同型な群になります。商空間 S^3/C_m はレンズ空間 $L^3(m)$ です。($m = 2$ の場合には射影空間 RP^3 です。) 商空間 S^3/S^1 が何かを調べましょう。

$$S^3 = \{(z, w) | |z|^2 + |w|^2 = 1\}$$

という複素数成分表示に対して、関数 ρ を、

$$\rho(z, w) = (2|z|^2 - 1, 2z\bar{w})$$

とおきます。値の第 1 成分は実数、第 2 成分は複素数ですからこの値は 3 次元ユークリッド空間の中にあるとみなせ、かつ実ベクトルとしての長さを計算すれば常に 1 になることがわかりますから、

$$\rho(z, w) \in S^2$$

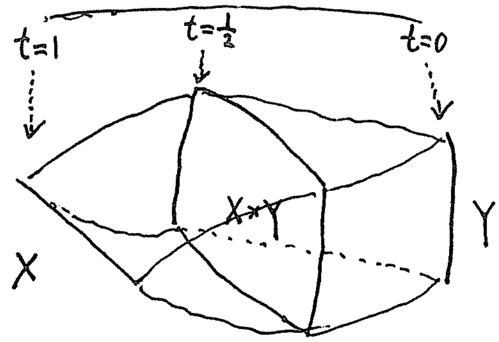
すなわち ρ は S^3 から S^2 への写像です。S^2 の点 $(1,0,0)$ の逆像を計算すると $\rho^{-1}(1,0,0) = \{(z, w) | |z| = 1, |w| = 0\} = S^1$ となることと、$(z, w) \in S^3$ に $\zeta \in S^1$ を作用させても $\rho(z, w)$ の値が不変なこととを考えあわせれば、商空間 S^3/S^1 が S^2 であることが判明します。結局、

3 次元球面 S^3 に群 S^1 が自由作用しており、その作用の商空間は S^2 に等しい（この対応 $\rho : S^3 \to S^2$ を Hopf の写像と言います）

レンズ空間 $L^3(m)$ （$m = 2$ の場合には射影空間 RP^3 ）に群 S^1 が自由作用しており、その作用の商空間は S^2 に等しい

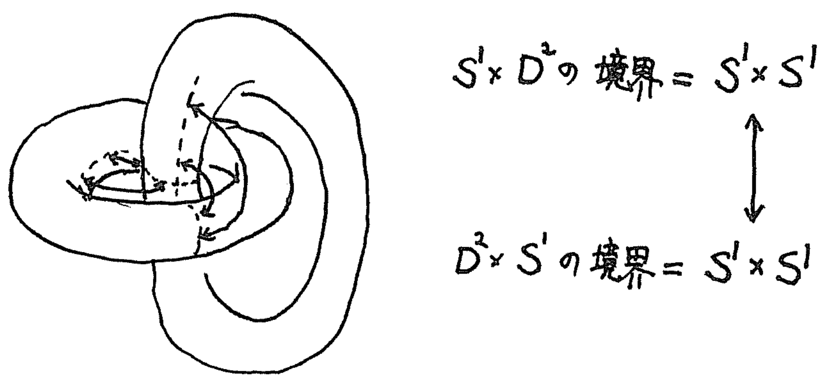
という 2 つの事実がわかりました。

S^3 はまた別の表現もできます。$X \times [0,1] \times Y$ という直積空間に $(x_1, 0, y) \sim (x_2, 0, y)$ と $(x, 1, y_1) \sim (x, 1, y_2)$ との同一視を入れた位相空間を X と Y のジョインと呼び、$X * Y$ と書きます。S^1 と S^3 とをそれぞれ複素数成分表示しておいて、写像 $f : S^1 * S^1 \to S^3$ を $f(z,t,w) = (tz/\sqrt{t^2+(1-t)^2}, (1-t)w/\sqrt{t^2+(1-t)^2})$ で定義すると、これは同相写像になります。



ジョイン

この対応 $S^1 * S^1 \cong S^3$ を言い替えると、3 次元球面 S^3 は 2 本の「ドーナツ型」$S^1 \times D^2$ をそれぞれの境界面 $S^1 \times S^1$ で互いに貼り合わせてできる図形と同じである、ということです。



さらに、さきほどの S^3 への S^1 の作用を読み替えれば、それぞれの $S^1 \times D^2$ の S^1 成分への掛け算から成っていることがわかり、その商空間は 2 枚の円板 D^2 をそれぞれの境界線 S^1 で互いに貼り合わせたもの、すなわち 2 次元球面 S^2 になることが再確認されました。

そこで、さきほどの、商空間 S^2 を共有する S^3 と $L^3(m)$ への S^1 の 2 つの自由作用の比較に当てはめれば、

> レンズ空間 $L^3(m)$ （$m=2$ の場合には射影空間 RP^3 ）は、２本の「ドーナツ型」 $S^1 \times D^2$ をそれぞれの境界面 $S^1 \times S^1$ で m 回片方のドーナツを S^1 方向にねじってから互いに貼り合わせてできる図形と同じである、

という結論が得られました。このように、異なる作用どうしを比較することにより、登場する図形の性質について新たな情報が得られることもあります。特にここで紹介した S^3 や $L^3(m)$ の解釈は、３次元空間での「結び目理論」の基本的道具になっています。

9　自由作用の分類

前節で、巡回群の球面への最も標準的な自由作用の例を挙げました。つまりこれらは、球面への周期 m の対称性でいかなる種類の固定点ももたないものの例です。では、そのような対称性は、前節の標準的なもの以外に、他にもあるのでしょうか。

このような作用の構成と分類の問題は、一貫して幾何学の基本問題の１つであり、いろいろな新しい理論や新しい不変量（オイラー数だけでなく）を生み出しつつ発展してきました。

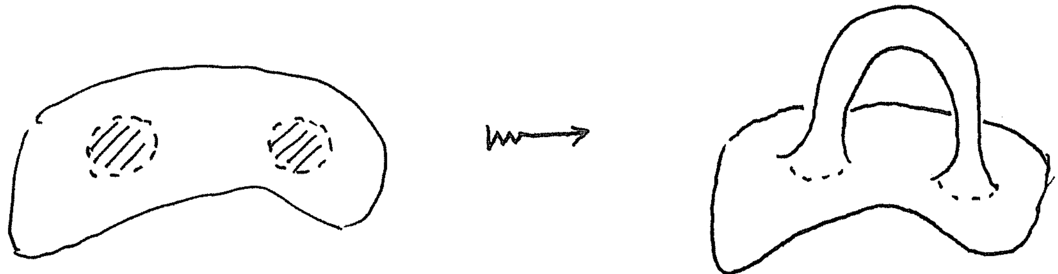
まず、前節の２つの例のように、ベクトル空間の線形変換によって生成される作用があります。このような作用は、線形代数（あるいは表現論）と呼ばれる数学の分野で古くから研究され、少なくとも有限群の作用のための代数的条件については完全に分類されています。球面への自由作用をもちうるこのような有限群は「周期群」と呼ばれ、群論的条件では「すべての可換部分群が巡回群である」ことで特徴づけられます。この条件を満たさない最も簡単な群は、巡回群の直積 $C_p \times C_p$ です。

巡回群の直積 $C_p \times C_p$ がいかなる球面にも自由作用をもたない、という事実は、第３節の Smith の定理と同じく P. A. Smith によって発見されたものですが、この研究のためには「ホモロジー論」と呼ばれる代数的位相幾何学の理論が必要でした。これまでの節で説明してきたオイラー数は、単に単体分割での単体の個数を数えることのみで定まる数量だったわけですが、単体どうしの並び方をより精密に記述することにより、「単体をつなげて輪状にできる箇所が何通りあるか」「それらの輪状単体鎖どうしの積を作った場合、それが高次元の単体鎖とどう絡んでいるか」などの構造を系統的に代数化した、「ホモロジー」という不変量（群）を構成したのです。C_p が球面に自由作用する状況をホモロジー群の言葉で記述し、そのホモロジー群の積構造における条件を調べることで、巡回群の直積 $C_p \times C_p$ が球面に自由作用をもちえないことが示せたのです。

さて、このような代数的条件を満たす周期群が、実際の滑らかな図形、たとえば球面に作用しうるかどうかという問題は、1970 年ごろまでは構成・分類とも未知の領域に属していまし

た。その状況を打破したのが、いわゆる「手術の理論」と呼ばれるもので、これが幾何学のこの分野に大発展をもたらしたのです。

「手術」による作用の構成・分類は、次のように実行されます。まず、作用の持つべき性質を考慮して、実現すべき作用の商空間となるべき図形のホモロジー群を決定します。($G = C_2$ の場合には、射影空間のホモロジーです。) 次に、そのホモロジー群を実現する単体複体を組み立てます。このままでは、単体が乱雑に集まった、抽象的集合に過ぎませんので、これを望ましい、滑らかな図形(多様体)にするために、必要な変形操作を施します。ところが、この操作の過程で、ホモロジー群の状態も変形されてしまいますので、できあがった図形は目的の性質を持っていません。そこで、この図形を、滑らかな多様体であるということを保ったままで、ホモロジー群に所定の変形を施し直すような標準的操作を、最後に実行するのです。この最後のステップが「手術」と呼ばれるもので、たとえばホモロジー群の要素を実現する輪状単体鎖が1つ不足していれば、そこの部分の図形の表面に2つ穴を切り取ってからその切り口にハンドル状にバイパス管を貼り付ける、という操作で不足していた輪状単体鎖を実現するのです。($G = C_2$ の場合には、射影空間とホモロジーは同じだが図形としては異なる、という多様体が構成できたことになるわけで、それが「標準的でない $G = C_2$ 作用」なるものを実現していることになるわけです。)



手術

この最後の「手術」のステップが実行可能かどうかの判断があるホモロジー群上の代数的2次形式の計算によって代数学に帰着される、というのがこの「手術理論」の特徴です。

Madsen, Thomas, Wall などの「手術理論」の開拓者の人たちは、この理論を駆使することによって、群 G が何らかの次元の球面に自由作用をもつための必要十分条件が群 G が周期群であってかつすべての位数2の要素が G の中で中心的であること、という定理の証明に成功しました。この条件を満たさない周期群のうちで最も簡単なものが、二面体群 $D(2p)$ です。$D(2p)$ は位数が $2p$ であるのに巡回群ではない、非可換群です。

その後この手術理論はより系統化・一般化され、「手術完全系列」という形で広く応用可能な道具に発展しています。手術の実行の判定のためには広く代数学・解析学にわたる結果が駆

使され、さらにいろいろな新しい不変量が発見されて幾何学的応用も生まれつつあります。

球面への一般の作用の分類の結果は非常に複雑で、未知の部分も多いですから、ここでは線形な表現によって定義される２つの作用がいつ同値か、という分類の問題（いわゆる「位相的相似性」の問題）についてだけ、知られている結果を紹介しておきましょう：

（１） G の位数が奇数、または $2\times$ 奇数という形の数ならば、２つの線形作用が同値なのは線形同値な場合に限る。（この結果は 1980 年代の手術理論の集大成とも呼べるもので、各イソトロピー型ごとに順次手術を施し、その結果そのような多様体の「向きづけ類」という新しい不変量も構成する、という壮大なものです。なお、このごく特殊な場合として、$G = C_2$ の場合（周期２の対称性）も含まれます。$G = C_2$ の場合には、線形作用は第２節に挙げたものと類似のタイプのものに限られます。）

（２） $G = C_4$ の場合には、（１）と同じ結果になります。

（３） $G = C_{4m}, m > 1$ の場合には、球面上への２つの線形作用で線形同値ではないのに作用としては同値なものが存在します。どのようなものがそうなるのか、という具体的な分類については現在もまだ未解決問題です。

10　参考文献

この分野の日本語の教科書としては、川久保勝夫氏の「変換群論」が名著です。

川久保勝夫：変換群論、岩波書店、1987

変換群論についてのその他の文献は、川久保勝夫氏の教科書の巻末に多数リストされていますので、それを参照して下さい。

単体分割、ホモロジー論については、

田村一郎：トポロジー、岩波全書 276、岩波書店、1972

が読みやすいです。また、オイラー数とベクトル場との関係については、ミルナーの講義録

John Milnor： Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965

が名著です。

最後の節で触れた球面上の自由作用の分類については、

I. Madsen, C. B. Thomas and C. T. C. Wall： The topological space form problem II, Topology, 15 (1976), 375-382

J. F. Davis and R. J. Milgram： A survey of the spherical space form problem, Mathematical Reports, Volume 2 (1985), 223-283

などを参照して下さい。