

数学入門公開講座

平成13年8月6日(月)から平成13年8月10日(金)まで

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. 電気回路とランダムウォーク (6時間15分)

京都大学数理解析研究所・助教授 熊谷 隆

皆さんの中には、高校の物理でオームの法則・キルヒホッフの法則といった、電気回路についての法則を経験則として学んだ人も多いと思います。この講座では、これらの法則が離散調和解析と呼ばれる数学を用いてどのように表現されるかを学び、電気回路に対応するランダムウォーク(マルコフ連鎖)について考察します。グラフの上に電気回路を構成してそのポテンシャル論的な性質を学ぶとともに、電気回路の性質が、対応するランダムウォークの性質にどのように反映するかを調べ、これらを用いた応用にも触れる予定です。

2. 流体力学と流体数学 (6時間15分)

京都大学数理解析研究所・教授 岡本 久

わが国の大学の数学教室では流体力学を講義することは少ないが、ヨーロッパの大学では数学教室で流体力学を教えることも多い。イギリスなどでは応用数学のかなりの部分を流体力学周辺で占めていることもある。歴史的に見ても、B. Riemann, H. Poincare, H. Weyl, A. N. Kolmogorov など、その人の主要な業績からは外れるけれども重要な流体力学の論文を書いてきた数学者は多い。

本講義の目的は、流体力学が数学の問題の宝庫であることを、具体例を通じて感じとっていただくことである。簡単な微分方程式は使うけれども、内容の大部分はグラフや流れの画像等を使って理解できるようにする予定である。

3. 超弦理論の数学 (6時間15分)

京都大学数理解析研究所・助手 高橋 篤史

物質や空間の基本構成要素が「点(素粒子)」ではなく1次元の空間的な広がりを持った「弦」であると考えことから、超弦理論は始まりました。現在では、一般相対性理論と量子論の究極的統一理論、つまり万物の理論の最有力候補として、理論物理学の表舞台で活躍しています。

数学と理論物理学は互いに刺激を与えながら発展してきましたが、超弦理論はこれまで以上に数学の世界に非常に大きな影響を与え続けています。それは、群論・表現論・保型形式・数論・代数幾何・シンプレクティック幾何……と広範囲にわたりますが、それも「弦」の持つ1次元の空間的自由度が理由です。

この講座では、超弦理論の数学的側面について、入門的解説および最新の成果の紹介をします。とくに、「空間とは何か」という幾何学の基本的問題に対する超弦理論からのアプローチについて触れたいと思います。

時間割

| 時間 \ 日 | 8月 6日 (月) | 7日 (火) | 8日 (水) | 9日 (木) | 10日 (金) |
|-------------|-----------------|-----------|-----------|-----------|------------|
| 10:30~11:45 | 熊谷 | 熊谷 | 熊谷 | 熊谷 | 熊谷 |
| 11:45~13:00 | 休憩 | | | | |
| 13:00~14:15 | 岡本 | 岡本 | 岡本 | 岡本 | 岡本 |
| 14:15~14:45 | 休憩 | | | | |
| 14:45~16:00 | 高橋篤 | 高橋篤 | 高橋篤 | 高橋篤 | 高橋篤 |

電気回路とランダムウォーク

京都大学数理解析研究所・助教授 熊谷 隆

2001, AUGUST 6, 7, 8, 9, 10, 10:30～11:45

電気回路とランダムウォーク

熊谷 隆

皆さんの中には、高校の物理でオームの法則・キルヒホッフの法則といった、電気回路についての法則を経験則として学んだ人も多いと思います。この講座では、そのような電気回路を数学の言葉で表し、ランダムウォーク（一般にはマルコフ連鎖）と呼ばれるランダムな粒子の動きとの関係を探っていきます。グラフの上に電気回路を構成してそのポテンシャル論的な性質を学ぶとともに、電気回路の性質が、対応するランダムウォークの性質にどのように反映するかを調べ、これらを用いた応用にも触れる予定です。

1 有限グラフ上の電気回路

有限個の点の集合 V と、 V の2つの要素を結んだ線（ボンド）の集合 B のペア (V, B) を考える。（このようなペアを有限グラフと呼ぶ。）

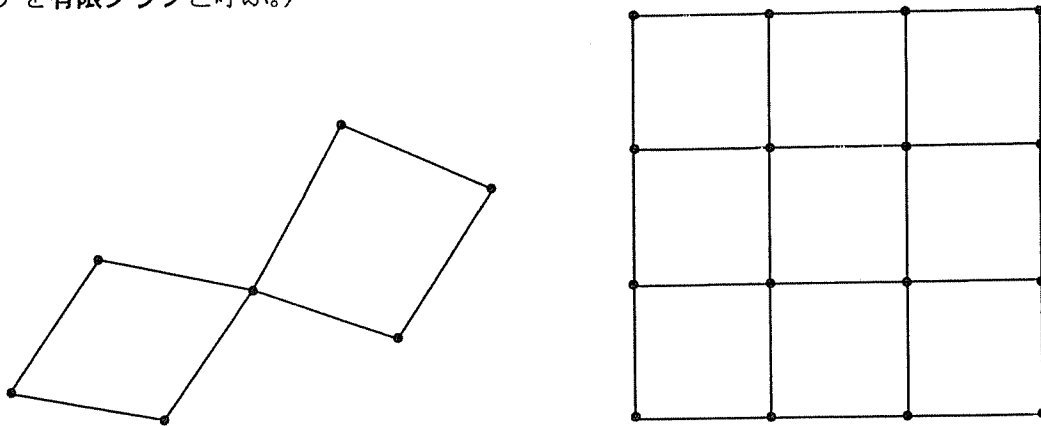


図 1.1 有限グラフの例

V の元は x, y, z という風に表し、 $x, y \in V$ を結ぶ B の元を $\{x, y\}$ という風に表すことにする。ここで (V, B) は連結である、つまり V の任意の2点がいくつかのボンドを通じてつながっていると仮定する。また、簡単のため $x \in V$ に対して $\{x, x\}$ というボンドはないものとする。

次に、このグラフを電気回路と思うために、各ボンド $\{x, y\} \in B$ にコンダクタンス $C_{xy} > 0$ を置く（あるいは、抵抗 $R_{xy} = 1/C_{xy}$ を置くと言ってもいいが）。 $x, y \in V$ が繋がっていない、つまり $\{x, y\} \notin B$ のときは、 $C_{xy} = 0$ とする。 $C_{yx} = C_{xy}$ とし、 $X \in V$ に対して、 $C_x = \sum_{y \in V} C_{xy}$ とする。このように決めた電気回路を以下では電気回路 (V, C) と呼ぶ。

さて、この回路の $y_0 \in V$ を接地し、 x_0 と y_0 の間に電圧1ボルトをかけたとき、各点での電位(x での電位を $v(x)$ とかく)、各ボンドを流れる電流(x から y への電流を i_{xy} とかく)はどうなるであろうか? 中学・高校で次のような法則を習ったことを思い出して欲しい。

オーム (Ohm) の法則: 2点間の電圧(電位差)は流れる電流と抵抗の積に等しい。つまり

$$v(x) - v(y) = i_{xy} R_{xy} \quad \text{for all } \{x, y\} \in B \quad (1.1)$$

キルヒホッフ (Kirchhoff) の法則: x_0, y_0 以外の点では、流入電流量の和と流出電流量の和は等しい。 x から y に流れる電流量は i_{xy} (y から x に流れる場合はこの値が負になる)であるから、

$$\sum_{\substack{y \in V \\ \{x, y\} \in B}} i_{xy} = 0 \quad \text{for all } x \in V, x \neq x_0, y_0 \quad (1.2)$$

ここで $\sum_{\substack{y \in V \\ \{x, y\} \in B}}$ は、 $\{x, y\} \in B$ となるような $y \in V$ についての和という意味である。オームの法則を適用すると、(1.2)は次のように表せる。

$$\sum_{\substack{y \in V \\ \{x, y\} \in B}} (v(x) - v(y)) C_{xy} = 0 \quad \text{for all } x \in V, x \neq x_0, y_0 \quad (1.3)$$

注意: 実際には \ominus の電荷を持った電子が流れるのであるが、我々は便宜的に \oplus の電荷を持った粒子が流れると考えて議論を進めていく。(すべての符号を変えれば、 \ominus の電荷を持った電子の話になる。)

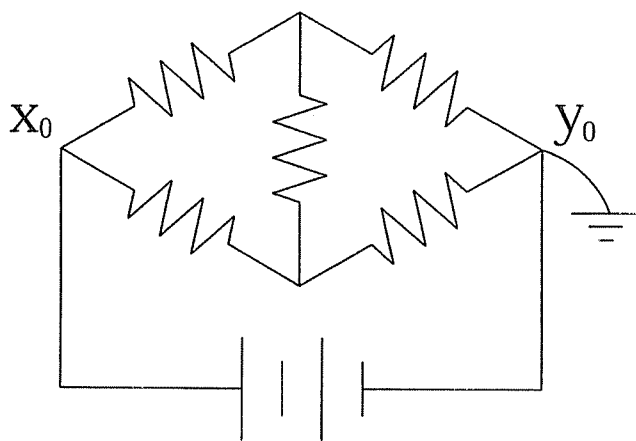


図 1.2 電気回路の例の図

このように中学では、電圧、電流は上の性質を満たすものだと頭ごなしに習ったわけであるが、一体こういう性質は、どのような理由から出てくるものなのであろうか? これを明らかにするために、回路の上の差分作用素と、回路のもつエネルギーという概念を持ち込もう。

定義 1.1 V 上の関数 f (以下では V 上の関数のことを V 上のポテンシャルと呼ぶ) に対して、差分作用素 Δ を次のように定める。

$$\Delta f(x) = \frac{1}{C_x} \sum_{\substack{y \in V \\ \{x, y\} \in B}} (f(y) - f(x)) C_{xy} = \sum_{\substack{y \in V \\ \{x, y\} \in B}} \frac{C_{xy}}{C_x} f(y) - f(x)$$

$f(x)$ が x の電位を表すときには、 $(f(y) - f(x))C_{xy}$ は y から x への流入電流量を表すから、 $\Delta f(x)$ は x に流れる電流量を C_x で割ったものである。 $\Delta f(x) = 0$ のとき、 f は x で調和であるという。 x で調和であるということは、とりもなおさず x で(1.3)の意味でキルヒホッフの法則を満たすということである。 $V = \{1, 2, \dots, N\}$ という数直線で、各ボンドに抵抗1がのっている回路の場合、

$$\Delta f(i) = \frac{1}{2}\{f(i+1) + f(i-1) - 2f(i)\} \quad 0 < i < N$$

となり、普通を中心差分に等しくなる。

定義 1.2 V 上のポテンシャル f が与えられたとき、この回路のエネルギー消費量を以下のように定義する。

$$\mathcal{E}_C(f, f) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V \\ y \in V}} (f(x) - f(y))^2 C_{xy}$$

中学で習った公式に $E = VI$ というものがあつたと思う。さらにオームの法則を用いると $E = V^2/R$ 、つまりエネルギーは電圧の2乗を抵抗で割った(コンダクタンスをかけた、といってもよい)ものに等しいということである。ここで定義したエネルギーは、この公式に合致している。1/2がついているのは、 Σ によりひとつのボンドを $\{x, y\}, \{y, x\}$ と2回加えているためである。 V 上のポテンシャル f, g に対して一般に、

$$\mathcal{E}_C(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in V \\ y \in V}} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) C_{xy}$$

とする。すると、 \mathcal{E}_C と Δ の間に、次のような関係が導き出せる。

命題 1.3 V 上のポテンシャル f, g に対して $(f, g)_C = \sum_{x \in V} f(x)g(x)C_x$ とすると、以下が成り立つ。

$$\mathcal{E}_C(f, g) = -(f, \Delta g)_C$$

注意： これはガウス-グリーン (Gauss-Green) の公式と呼ばれる式

$$-\int_M f(x)\Delta g(x)dx = \int_M \nabla f(x)\nabla g(x)dx \quad \text{if } f|_{\partial M} = 0 \text{ or } \nabla g|_{\partial M} = 0$$

の離散版である。

証明：

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_C(f, g) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{x, y \in V} f(x)g(x)C_{xy} + \sum_{x, y} f(y)g(y)C_{xy} \right) - \sum_{x, y} f(x)g(y)C_{xy} \\ &= \sum_{x, y} f(x)g(x)C_{xy} - \sum_{x, y} f(x)g(y)C_{xy} \\ &= -\sum_x f(x) \sum_y (g(y) - g(x))C_{xy} = -\sum_x f(x)\Delta g(x)C_x \\ &= -(f, \Delta g)_C \end{aligned}$$

■

では、先ほどの疑問に答えよう。電圧が ((1.3)の意味で) キルヒホッフの法則を満たすというのは、実は電圧が、ディリクレ (Dirichlet) の原理と呼ばれる次の変分原理を満たすことなのである。

命題 1.4 (ディリクレの原理) V' を V の部分集合とし、 V' 上のポテンシャル s が与えられたとき V 上のポテンシャル f を

$$\Delta f(x) = 0 \quad \text{for all } x \in V \setminus V', \quad f|_{V'} = s \quad (1.4)$$

を満たすものとする。このとき、 $g|_{V'} = s$ となる V 上の任意のポテンシャル g に対して

$$\mathcal{E}_C(g, g) \geq \mathcal{E}_C(f, f) \quad (1.5)$$

が成り立つ。さらに、(1.4)の解は唯一であり、(1.5)の性質を持つ関数 f はこの解に限られる。

証明: ここでは(1.4)の解の存在を仮定して話を進める。(話が前後してしまうが、この解の存在については2節と3節で2つの証明を与える。もちろん、その際に議論が循環論法に陥らないように配慮してある。) f を(1.4)の解の一つとしよう。 V 上のポテンシャル g で $g|_{V'} = s$ なるものを任意にとると、 $x \in V \setminus V'$ のとき $\Delta f(x) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_C(g, f) &= -(g, \Delta f)_C = - \sum_{x \in V} g(x) \Delta f(x) C_x \\ &= - \sum_{x \in V'} g(x) \Delta f(x) C_x = - \sum_{x \in V'} f(x) \Delta f(x) C_x \\ &= -(f, \Delta f)_C = \mathcal{E}_C(f, f) \end{aligned}$$

となる。式変形の中で、(1.4)、 $g|_{V'} = s = f|_{V'}$ と命題 1.3を用いた。これにより、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{E}_C(g - f, g - f) = \mathcal{E}_C(g, g) + \mathcal{E}_C(f, f) - 2\mathcal{E}_C(f, g) \\ &= \mathcal{E}_C(g, g) - \mathcal{E}_C(f, f) \end{aligned}$$

となり、 f が(1.5)を満たすことがわかった。さらに \mathcal{E}_C の定義の仕方と、この回路が連結であることから、 $\mathcal{E}_C(g - f, g - f) = 0$ となるのは $g - f$ が定数であるときに限られることが分かる。 f, g は V' 上ともに s となり一致しているから、結局 $g = f$ であることがわかる。つまり、(1.5)を満たすのは f に限るということがわかった。これは(1.4)の解が唯一であることも示している。 ▣

ディリクレの原理を標語的に言うと、「エネルギー消費量が最小となるようにポテンシャルを決めると、それが電位 ((1.3)の意味でキルヒホッフの法則を満たすもの) である」ということである。

これと対になる原理で電流 (フロー) に着目した原理もあり、トムソン (Thomson) の原理と呼ばれる。詳細は略すが、この原理を標語的に言うと、「エネルギー消費量が最小となるようにフローを決めると、それはある電圧からオームの法則によって定まる電流である」というものである。

2 電気回路に対応するマルコフ連鎖

この節では、前節で見た電気回路を、マルコフ連鎖という概念を用いて「確率論」の立場から考察する。これにより、電気回路を、粒子が動いて電流を伝えているものとしてより直感的に感じることができるであろう。まずは簡単な例でマルコフ連鎖がどのようなものを説明しよう。 $V = \{1, 2, \dots, N\}$ という数直線上に粒子がいるとする。点 i ($1 < i < N$)に粒子がいるとき、1秒後に粒子が $i+1$ に動く確率が $1/2$ 、 $i-1$ に動く確率が $1/2$ であり、点1 (あるいは N)に粒子がいるときには1秒後に必ず2 (あるいは $N-1$)に動くものとする (図 2.1参照)。

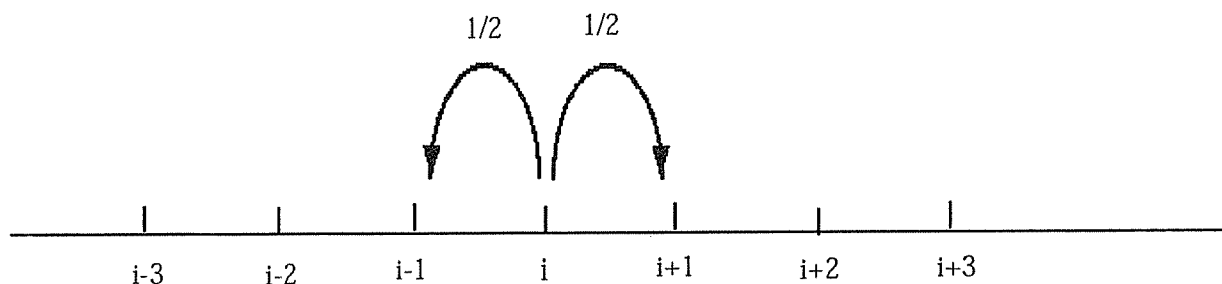


図 2.1 数直線上のマルコフ連鎖 (ランダムウォーク)

このように、粒子の動きが現在の粒子の位置と1秒後にどこに移るかの確率 (推移確率という) のみで決まり、それまでの粒子の動き (過去の履歴) によらないとき、このような粒子の動きをマルコフ連鎖と呼ぶ。マルコフ連鎖の時刻 n での粒子の位置を X_n で表す。特に、この例のように推移確率が (境界点を除いては) 点によらないようなマルコフ連鎖を、ランダムウォークという。ランダムウォークは酔っばらいの動きに似ているので、酔歩という邦訳がついている。

さて、電気回路 (V, C) を考えよう。 $P_{xy} = C_{xy}/C_x$ とすると、 $\sum_{\substack{y \in V \\ \{x,y\} \in B}} P_{xy} = 1$ となる。推移確率が $\{P_{xy}\}_{x,y \in V}$ で与えられるマルコフ連鎖を、 (V, C) に対応するマルコフ連鎖と呼ぶ。これはつまり、粒子が x にいるとき、1秒後にこの粒子が y に動く確率が P_{xy} で与えられる確率過程である。今、

$$C_x P_{xy} = C_x \frac{C_{xy}}{C_x} = C_y \frac{C_{yx}}{C_y} = C_y P_{yx} \quad (2.1)$$

が成り立つ。このようなマルコフ連鎖は、 $\{C_x\}_{x \in V}$ を対称測度とする対称なマルコフ連鎖であるという。マルコフ連鎖は一般に対称とは限らないが、電気回路に対応するマルコフ連鎖はこのように常に対称なのである。次に、このマルコフ連鎖を用いて電位が確率論的にどのように解釈されるかを見る。

電位の確率論的解釈

電気回路 (V, C) に対して、2点 $a, b \in V$ をとり、 a, b 間に電圧1ボルトをかけ b を接地しよう(具体例は、図2.2参照)。

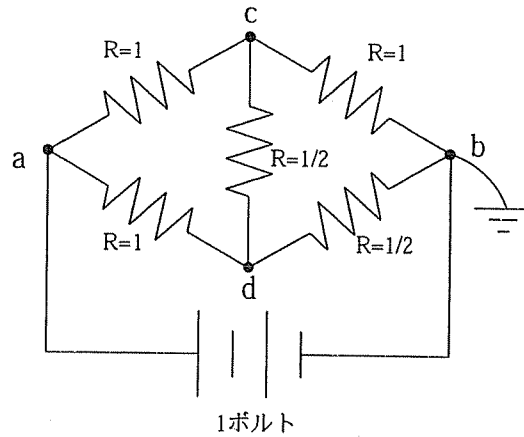


図 2.2 電気回路の図

1節の議論から、このときに各点にかかる電位 v は

$$v(a) = 1, \quad v(b) = 0, \quad \Delta v(x) = 0 \quad \text{for all } x \in V \setminus \{a, b\} \quad (2.2)$$

となる。最後の式を変形すると、

$$v(x) = \sum_{y \in V} \frac{C_{xy}}{C_x} v(y) = \sum_y P_{xy} v(y) \quad (2.3)$$

となる。一方、対応するマルコフ連鎖を用いて、次のような量を導入しよう。

$$h(x) = P^x(\tau_a < \tau_b) \quad \text{for all } x \in V \quad (2.4)$$

ここで P^x は x から出発するマルコフ連鎖(つまり $X_0 = x$)に関する確率を表し、 $\tau_a = \min\{n \geq 0 : X_n = a\}$ 、つまりマルコフ連鎖が a に初めてたどり着いた時刻を表す。(2.4)は、「 x から出発した粒子が b に着く前に a に戻る確率」を表す。明らかに $h(a) = 1, h(b) = 0$ であり、また、 $x \neq a, b$ のとき、1秒後に粒子がどの位置に動くかに分けて考えることにより $h(x) = \sum_{y \in V} P_{xy} h(y)$ となることが分かる。(ここで、マルコフ連鎖が現在の粒子の位置と推移確率のみで決まるという性質(このような性質をマルコフ性という)を使っている。)つまり、 h は(2.2)を満たしている。命題1.4からこのような解は(存在すれば)唯一であることが示されているから、 $h(x)$ がこの回路の x での電位を表すと分かる。よって、以下の命題が示された。

命題 2.1 $v(a) = 1, v(b) = 0$ としたときの x での電位 $v(x)$ は、対応するマルコフ連鎖で x から出発した粒子が b に着く前に a に戻る確率に等しい。

ここで述べた事実を使うと、前節で仮定していた(1.4)の解の存在も示される。(厳密にいうと、与えられた推移確率を持つマルコフ連鎖が存在することをきちんと示さないといけないが、そのためには「測度論」と呼ばれる理論が必要となるのでここでは省略する。)

系 2.2 $h^a(x) = P^x(\tau_a < \tau_{V' \setminus \{a\}})$ とすると,

$$f(x) = \sum_{a \in V'} s(a) h^a(x)$$

は(1.4)の解である。

証明: 先ほどと同様に考えると、 $h^a(a) = 1$, $h^a(y) = 0$ ($y \in V' \setminus \{a\}$)であり、 $x \notin V'$ のとき、 $h^a(x) = \sum_y P_{xy} h^a(y)$ が成立することが分かるから、これらをたしあわせて(1.4)を得る。 ■

問 2.1 図2.2での各点での電位とその確率論的意味を述べよ。

ここでは証明しないが、実は電流についても次のようにその確率論的解釈を与えることができる。

命題 2.3 電源から a への流入電流量が 1 (b から電源への流出電流量が 1) となるように a と b に電圧をかけたとき、ボンド $\{x, y\}$ を x から y に流れる電流 i_{xy} は、対応するマルコフ連鎖で a から出た粒子が b に着く直前までに $\{x, y\}$ を $x \rightarrow y$ 方向に通った回数の平均を表す。

3 ディリクレ問題の解の求め方

この節では、1 節で登場した(1.4)の解の求め方をいくつか紹介する。いずれの方法も、解をコンピュータを用いて実際に数値計算で求めるのに有効な方法である。方程式を再記しよう。

$$\Delta f(x) = 0 \quad \text{for all } x \in V \setminus V', \quad f|_{V'} = s \tag{3.1}$$

但し $V' \subset V$ で、一般性を失うことなく $V \setminus V'$ は連結であるとする (これが連結でないときは、連結な成分に分けて議論すればよい)。上式のように、 V' を境界と考えて境界条件が与えられ、内部で調和である関数を見つける問題をディリクレ問題という。

1) モンテカルロ法

前節の系2.2で述べたように、 $h^a(x) = P^x(\tau_a < \tau_{V' \setminus \{a\}})$ とすると

$$f(x) = \sum_{a \in V'} s(a) h^a(x) = E^x[s(X_{\tau_{V'}})]$$

がディリクレ問題の解である ($\tau_{V'}$ は、粒子が初めて V' に着く時刻を表す)。そこで各 $x \in V \setminus V'$ について、その点から粒子を出発させ $\{P_{xy}\}$ に従ってランダムに動かし、 V' に初めて着いた点が a であれば賞金 $s(a)$ 円を

もらえるというゲームをしよう。このようなゲームを n 回行ったとき、 n が十分大きいと(大数の法則により)もらえる賞金の平均は期待値 $E^x[s(X_{\tau_V})]$ に近づくので、このようなゲームを数多く行うことによりディリクレ問題の解を近似しようというのがモンテカルロ法である。モンテカルロ法は適用範囲が広いが、一般に解への収束のスピードはあまり速くはないことが知られている。ちなみに、モンテカルロはカジノで有名な街の名前で、ランダムウォークを用いたこの方法にギャンブルで有名な街の名称を与えるとは、なかなかしゃれている。

2) ガウス-ザイデル法

ガウス-ザイデル(Gauss-Seidel)法という名称は考案者の名前から付けられたもので、数値解析の本などにもよく紹介されている方法である。

$V \setminus V' = \{x_1, \dots, x_k\}$ とする。まず $f_0 = f_0^{(0)}$ を $x \in V'$ ならば $f_0^{(0)}(x) = s(x)$ 、 $x \in V \setminus V'$ ならば $f_0^{(0)}(x) = 0$ と定め、 $x \neq x_1$ ならば $f_0^{(1)}(x) = f_0^{(0)}(x)$ 、 $x = x_1$ ならば $f_0^{(1)}(x) = \sum_{y \in V} P_{x_1 y} f_0^{(0)}(y)$ によって $f_0^{(1)}$ を定める。同様にして $f_0^{(i)}$ から $f_0^{(i+1)}$ を、 x_{i+1} 以外では $f_0^{(i)}$ と同じ値とし、 x_{i+1} では $\sum_{y \in V} P_{x_{i+1} y} f_0^{(i)}(y)$ により定めていき、 $f_0^{(k)} = f_1^{(0)} = f_1$ とする。要するに k 回の操作で $V \setminus V'$ の各点の中心差分をとり(ただし中心差分を取った点の値は、元の値から差分で決まる値に置き換えていく)、新しい関数 f_1 を作り出すのである。 $l \geq 1$ でも同様にして、 $f_l = f_l^{(0)}$ から $f_{l+1} = f_l^{(k)}$ を、 $1 \leq i \leq k$ について

$$f_l^{(i)}(x) = \begin{cases} f_l^{(i-1)}(x) & \text{if } x \neq x_i \\ \sum_{y \in V} P_{x_i y} f_l^{(i-1)}(y) & \text{if } x = x_i \end{cases} \quad (3.2)$$

によって順次定めていく。すると、ある $\alpha < 1$ が存在して

$$\|f_{l+1} - f_l\| \leq \alpha \|f_l - f_{l-1}\| \quad (3.3)$$

が成り立つことが証明できる(但し $\|f\| = \max_{x \in V} |f(x)|$)。よって $C = \log(1/\alpha) > 0$ とすると、

$$\|f_{l+1} - f_l\| \leq \alpha \|f_l - f_{l-1}\| \leq \dots \leq \alpha^l \|f_1 - f_0\| \leq e^{-lC} \|s\|$$

となり、 $l \rightarrow \infty$ のとき f_l はある関数 f に収束する(しかも収束のスピードは指数的に速い!)。 f は V' 上 s であり、さらに f_l から f_{l+1} を作る操作によって値を変えない、つまり $f(x) = \sum_y P_{xy} f(y)$ が $x \in V \setminus V'$ で成り立つから、これはディリクレ問題の解になっている。これも、ディリクレ問題の解の存在証明の一つになっている。

問 3.1 次のような電気回路におけるディリクレ問題の解を、モンテカルロ法、ガウス-ザイデル法を使って計算してみよ(コンピューターでそれぞれのプログラムを組んでみよ)。ただし、抵抗は各ボンドで1とし、数値の入っている点が境界であるとする。プログラムを走らせて、2つの方法の収束のスピードを見比べてみよ。

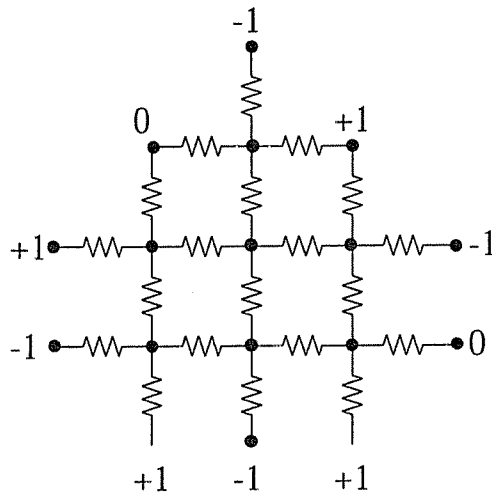


図 3.1 電気回路のディリクレ問題の例

4 ポアソン方程式とその応用

ポアソン方程式

電気回路 (V, C) に対して、 V 上の関数 (ポテンシャル) 全体を $\ell(V)$ と書くことにする。命題1.3より、 $f, g \in \ell(V)$ は

$$(f, \Delta g)_C = -\mathcal{E}_C(f, g) = -\mathcal{E}_C(g, f) = (\Delta f, g)_C \quad (4.1)$$

となる。さて、 $\text{Ker } \Delta = \{f \in \ell(V) : \Delta f = 0\}$, $\text{Image } \Delta = \{f \in \ell(V) : g \in \ell(V) \text{ で } \Delta g = f \text{ なるものが存在する}\}$ とおくと、 $f \in \text{Ker } \Delta, g \in \text{Image } \Delta, g = \Delta h$ のとき、(4.1) より

$$(f, g)_C = (f, \Delta h)_C = (\Delta f, h)_C = 0 \quad (4.2)$$

となることが分かる。逆に、 f が任意の $g \in \text{Image } \Delta$ に対して (4.2) を満たすとする。このとき h として $h(x) = 1, h(y) = 0 (y \neq x)$ という関数をとることにより、 $\Delta f(x) = 0$ を得る。 $x \in V$ は任意にとれるので、結局 $f \in \text{Ker } \Delta$ であることが分かる。一方、 $f \in \text{Ker } \Delta$ ならば $\mathcal{E}_C(f, f) = 0$ であり、 \mathcal{E}_C の定義からこのとき f は定数関数となり、逆に定数関数は明らかに $\text{Ker } \Delta$ に属するから

$$\text{Ker } \Delta = \{f \text{ は } V \text{ 上の定数関数}\} \quad (4.3)$$

である。これらの事実を使うと次の命題が示される。

命題 4.1 (ポアソン方程式の解) $g \in \ell(V)$ が与えられたとき、

$$\Delta f(x) = g(x) \quad \text{for all } x \in V \quad (4.4)$$

を満たす $f \in \ell(V)$ が存在するための必要十分条件は g が $(g, 1)_C = 0$ を満たすことである。ここで1は V 上に常に1という値をとる定数関数を表す。さらに、このとき上の方程式の解は定数の違いを除いて一意的に定まる。(つまり f_1, f_2 が(4.4)の2つの解であるとき、 $f_1 - f_2$ は定数関数である。)

証明： 上で述べた事実から、

$$\begin{aligned} \text{Image } \Delta &= \{g \in \ell(V) : (g, f)_C = 0, \text{ for all } f \in \text{Ker } \Delta\} \\ &= \{g \in \ell(V) : (g, 1)_C = 0\} \end{aligned}$$

であるから、命題の初めの主張が示せた。 f_1, f_2 が(4.4)の2つの解であるとき、 $f_1 - f_2 \in \text{Ker } \Delta$ であるから、差が定数関数であることも分かる。 ■

方程式(4.4)をポアソン (Poisson) 方程式という。

\mathbb{Q} を有理数全体の集合としよう。次の命題は後のデーアの定理の証明で用いる。

命題 4.2 電気回路(V, C)で、コンダクタンスの値がすべて有理数 (つまり任意の $\{x, y\} \in B$ について $C_{xy} \in \mathbb{Q}$) とする。さらに、 $g \in \ell(V)$ を、任意の $x \in V$ について $g(x) \in \mathbb{Q}$ かつ $(g, 1)_C = 0$ を満たすものとする。このとき、ポアソン方程式 $\Delta f = g$ の解 f は常に次を満たす。

$$f(x) - f(y) \in \mathbb{Q} \quad \text{for all } x, y \in V \tag{4.5}$$

証明： V の各元の値を成分として f, g をベクトルで表示し、 Δ を行列表示したものを $Af = g$ とすると、仮定から A の成分、 g の成分はいずれも有理数である。(4.3)よりImage Δ の次元は (V の元の数) $- 1$ であるから、上の式から左基本変形(「線型代数」で用いられるもの、講義中に説明する予定)と列の入れ替えを繰り返すことにより

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \bar{v} \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \tilde{f} = \left(\begin{array}{c} \bar{g} \\ \hline 0 \end{array} \right)$$

となる。 (\tilde{f}) は、 A の変形に応じて f の成分の順序を入れ替えたもの。) ここで、基本変形は有理数の四則演算で行えるから、 \bar{v}, \bar{g} の取る値は有理数である。これにより、解の一つとして ${}^t(\bar{g} \mid 0)$ (t は転置行列)を取ることができ、命題4.1より2つの解の差が定数関数であるから、一般の解は、

$$\tilde{f} = \left(\begin{array}{c} \bar{g} \\ \hline 0 \end{array} \right) - \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{array} \right)$$

(α は任意の実数)となる。(従って、上の \bar{v} の成分はすべて -1 であることがわかる。) よって、(4.5)が示された。 ■

応用：デーンの定理

次に、1903年にデーネン (M. Dehn) によって証明された次の問題を考える。

定理 4.3 K を縦の長さ a 、横の長さ b の長方形とする。 K が、縦横の比が有理数であるような有限個の長方形に分割されるならば、 a, b の比は有理数 (つまり $a/b \in \mathbb{Q}$) である。特に、 K が有限個の正方形に分割されれば a, b の比は有理数である。

分割された小長方形は、縦横の比が有理数という条件がついているだけでそれぞれの長さは無理数でも構わない。分割の際小長方形の配置は多様にありうるので、上の事実は全く自明なことではない。この問いは一見整数論的に見えるが、実は電気回路の話を使って鮮やかに証明ができる (なお、デーネン自身による証明は電気回路を用いたものではない)。この証明を私は、東北大学の砂田利一教授に教えていただいた ([2]には、この問題について詳しく述べてあるので参照して欲しい)。以下では、砂田教授による証明をここでの設定に焼き直した証明を行う。

証明： 相似変換により、 $a = 1$ と考えてよい。まず、分割された有限個の長方形から有限グラフを以下のように作り出す。有限分割された長方形を、その左辺がより左にあるもの (左辺が同じ位置のものについては上辺がより上にあるもの) から順に(1), (2), (3), \dots , (m)と番号を打つ。次に、各小長方形の縦辺に、左から順に1, 2, 3, \dots , n と番号を打つ (横が同じ位置にある辺は、まとめて一つの辺と考える)。そして、 $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ を頂点、 $B = \{(1), (2), (3), \dots, (m)\}$ をボンドとする有限グラフを考える (このグラフは明らかに連結である)。

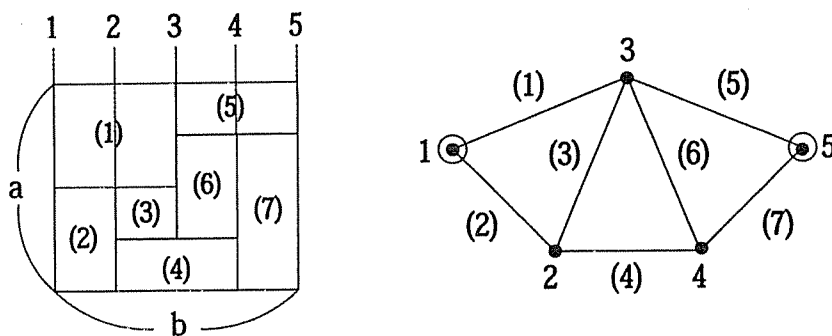


図 4.1 長方形の図 生成された有限グラフ

このグラフを電気回路と考えるため、各ボンド(i)にコンダクタンスとして
 (小長方形(i)の縦の長さ) / (小長方形(i)の横の長さ)

を与える。仮定からこの値は有理数である。

さて、このようにして作られた電気回路 (V, C) に対して (C_{ij} は $i, j \in V$ を結ぶボンドのコンダクタンスの和を表す)、 $f \in \ell(V)$ を $f(i) = (\text{線分1から線分}i\text{までの距離})$ と定義すると、 $f(1) = 0, f(n) = b$ である。さらに、 $\{i, j\} \in B$ に対して

$$C_{ij}(f(j) - f(i)) = \text{sgn}(i, j) \cdot (\{i, j\} \text{ に対応する小長方形の縦の長さの和})$$

(但し $\text{sgn}(i, j) = 1$ if $j > i$, $\text{sgn}(i, j) = -1$ if $j < i$ と定める) となるから、これを用いると、 $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ のとき

$$\begin{aligned} \Delta f(i) &= \frac{1}{C_i} \sum_{j \in V} C_{ij}(f(j) - f(i)) \\ &= \frac{1}{C_i} \{ (i \text{ を左辺とする小長方形の縦辺の長さの和}) \\ &\quad - (i \text{ を右辺とする小長方形の縦辺の長さの和}) \} = 0 \end{aligned}$$

(但し $C_i = \sum_j C_{ij}$) となり、さらに

$$\Delta f(1) = 1/C_1, \quad \Delta f(n) = -1/C_n$$

となる。つまり f は

$$g(x) = \begin{cases} 1/C_1 & x = 1, \\ -1/C_n & x = n, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

としたときの $\Delta f = g$ の解である ($(g, 1)_C = C_1/C_1 - C_n/C_n = 0$ であるから、このポアソン方程式の解は定数の違いを除いて唯一である)。今、 C_{ij} はすべて有理数であり g の取る値も有理数であるから、命題4.2よりすべての $i, j \in V$ に対して $f(i) - f(j) \in \mathbb{Q}$ 、特に $f(n) - f(1) = b \in \mathbb{Q}$ である。 ■

5 有効抵抗と脱出確率、レイリーの定理

いつものように電気回路 (V, C) が与えられているとする。 $a, b \in V$ を取り、この回路が a と b の2点を端点とする1つの抵抗であると思ったとき、その抵抗値はいくらになるであろうか？この値を表すのが有効抵抗である。

定義 5.1 a, b 間に電圧を加え $v(a) = 1, v(b) = 0$ としたとき、 $R(a, b) = 1/i_a$ ($i_a = \sum_x i_{ax}$ は電源から a への流入電流量) を a, b 間の有効抵抗 (effective resistance) という。

以下では a に1ボルト、 b を接地したときの x での電位を $v^1(x)$ 、 a への総流入電流量を i_a^1 と書くことにする。

命題 5.2 f を $f(a) = 1, f(b) = 0$ となる V 上の任意のポテンシャルとすると、

$$R(a, b)^{-1} \leq \mathcal{E}_C(f, f) \quad (5.1)$$

が成り立つ。さらに、等号が成立するのは $f = v^1$ のときに限られる。

証明: 先の命題 1.4より、 $\mathcal{E}_C(f, f)$ が最小値をとるのは $f = v^1$ のときである (しかもそのときに限られる)。従って、 $R(a, b)^{-1} = \mathcal{E}_C(v^1, v^1)$ を示せばよい。式変形を行うと、

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_C(v^1, v^1) &= -(v^1, \Delta v^1)_C = - \sum_{x \in \{a, b\}} v^1(x) \Delta v^1(x) C_x = -\Delta v^1(a) C_a \\ &= -\frac{1}{C_a} \sum_{y \in V} (v^1(y) - v^1(a)) C_{ay} C_a = - \sum_y (-i_{ay}^1) = i_a^1 \end{aligned}$$

となる。ここで初めの等式で命題1.3を用い、5番目の等式ではオームの法則を用いた。 $R(a, b) = 1/i_a^1$ であるから、命題が示された。 ■

では、この有効抵抗の確率論的意味を考えてみよう。天下りの的ではあるが、次のような脱出確率を考える。

$$P_{\text{esc}}(a, b) = P^a(\tau_b < \min\{n \geq 1 : X_n = a\})$$

言葉で表すと、「 a から出る粒子が、 a に戻る前に b にたどり着く確率」である。esc は escape の略で、脱出口 b から脱出するというイメージを持ってもらうとよい。

命題 5.3

$$P_{\text{esc}}(a, b) = \frac{1}{C_a R(a, b)}$$

証明: 簡単な式変形から

$$i_a^1 = \sum_{y \in V} i_{ay}^1 = \sum_y (v^1(a) - v^1(y)) P_{ay} C_a = C_a (1 - \sum_y P_{ay} v^1(y))$$

となる。ここで、命題2.1より $v^1(y)$ は y から出た粒子が b に着く前に a に着く確率であり、従って $\sum_y P_{ay} v^1(y)$ は a から出た粒子が b に着く前に a に戻る確率を表す。よって上式の右辺の値は $C_a P_{\text{esc}}(a, b)$ に等しいことが分かり、命題が証明された。 ■

この命題から、有効抵抗は脱出確率と a でのコンダクタンスの積の逆数であることがわかった。なお、有効抵抗において a, b の代わりにそれぞれ有限個の点の集合を考えても、同様の定義をすることができる。

問 5.1 図2.2で a, b の有効抵抗を求めよ。また、 a から出る粒子が、 a に戻る前に b にたどり着く確率を求めよ。

問 5.2 図5.1において、それぞれの抵抗を R_1, R_2 とすると、直列つなぎでは a, b 間の有効抵抗が $R_1 + R_2$ 、並列つなぎでは a, b 間の有効抵抗が $1/(1/R_1 + 1/R_2) = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ となることを示せ。(中学でも習った事実である。)

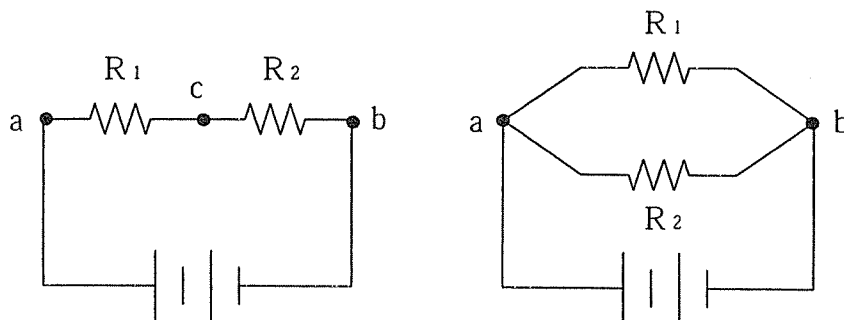


図 5.1 直列つなぎ 並列つなぎ

さて、ある電気回路の抵抗の一部を切り取ると、回路内の2点の有効抵抗はどうなるだろうか？本来電気が通れていたところが通れなくなるのだから、抵抗値は大きくなるはずである。では、2点をショートさせるとどうであろうか？本来抵抗がかかっていたところがフリーパスになるのだから抵抗値は小さくなるはずである。このような直感を定理にしたのが、次のレイリー (Rayleigh) の定理である。自明な定理のように思えるが、後に見ていくようにこの定理から全く自明ではない定理が導かれていく。

定理 5.4 (レイリーの単調性定理) 有限グラフ (V, B) の上に $(V, C), (V, C')$ という2つの電気回路が組まれているとする。このとき、任意の $\{x, y\} \in B$ について $R_{xy} \leq R'_{xy}$ であれば、任意の $a, b \in V$ に対して $R_C(a, b) \leq R_{C'}(a, b)$ である。

証明： v を、 (V, C) について $V' = \{a, b\}$, $v(a) = 1$, $v(b) = 0$ としたときの電位とし、 v' を (V, C') について同様に決めた電位とすると、命題 5.2より

$$\begin{aligned} R_C(a, b)^{-1} &= \frac{1}{2} \sum_{x, y} (v(x) - v(y))^2 / R_{xy} \geq \frac{1}{2} \sum_{x, y} (v(x) - v(y))^2 / R'_{xy} \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{x, y} (v'(x) - v'(y))^2 / R'_{xy} = R_{C'}(a, b)^{-1} \end{aligned}$$

但し、第2段の初めの不等式で、 (V, C') においては v' がエネルギー消費量の最小値を取るという命題1.4の事実を使っている。よって命題が示された。 ■

証明を見ると分かるが、この定理は2点間の有効抵抗だけでなく、 V 内の2つの部分集合間の有効抵抗についても成り立つ。定理5.4より、本節の初めに書いた事実が示される。

系 5.5 (ショート則) 電気回路のいくつかの点をショートさせると、回路の任意の2点間の有効抵抗は減少する。

(カット則) 電気回路のいくつかのボンドを切る(カットする) と、回路の任意の2点間の有効抵抗は増加する。

証明: 2点をショートさせるとは2点間の抵抗値を0にすることであり、抵抗値が下がるので定理5.4から有効抵抗は減少する。また、2点間のボンドをカットするとは、その部分の抵抗を ∞ にすることであり、抵抗値が上がるので定理5.4から有効抵抗は増加する。 ■

以後この系は、ショート則、カット則という名で何度か引用することになる。

次の系は、この事実を対応するマルコフ連鎖の脱出確率を用いて述べたものである。こうなると、一見自明ではなくなる。

系 5.6 有限グラフ (V, B) の上に $(V, C), (V, C')$ という2つの電気回路が組みれているとする。このとき、任意の $\{x, y\} \in B$ について $R_{xy} \leq R'_{xy}$ が成り立ち、さらに $a \in V$ につながるボンドについては常に $R_{az} = R'_{az}$ が成り立つならば、 a と異なる任意の $b \in V$ に対して $P'_{esc}(a, b) \leq P_{esc}(a, b)$ である。

証明: 任意の $z \in V$ について $C_{az} = C'_{az}$, 従って $C_a = C'_a$ だから、定理5.4と命題5.3より示される。 ■

問 5.3 (V, B) 上の2つの電気回路 $(V, C), (V, C')$ について、任意の $\{x, y\} \in B$ について $R_{xy} \leq R'_{xy}$ が成り立っても $(R_{az} = R'_{az}$ が成り立たなければ)、 $P'_{esc}(a, b) > P_{esc}(a, b)$ となることがある。このような例を挙げよ。

6 無限グラフ上の電気回路と、対応するマルコフ連鎖の再帰性

この節からは、無限グラフを考える。すなわち、 (V, B) は V の元の数が無限個(正確には可算無限個)であるような連結なグラフとする。我々はさらに、

$$\sup_{x \in V} (x \text{ から出るボンドの数}) < \infty$$

を仮定する(このことをボンドの次数(degree)が有界であるという)。このグラフ上の電気回路、対応するマルコフ連鎖を、1, 2節と同様に定義する。2節同様、 X_n で n 秒後の粒子の位置を表し、 P^x は x から出発する粒子についての確率を表すものとする。

定義 6.1 $P^x(\min\{n \geq 1 : X_n = x\} < \infty) = 1$ のとき、このマルコフ連鎖は (x において) 再帰的 (recurrent) であるという。

$P^x(\min\{n \geq 1 : X_n = x\} < \infty) < 1$ のとき、このマルコフ連鎖は (x において) 非再帰的 (transient) であるという。

連結なグラフ (V, B) においては、電気回路に対応するマルコフ連鎖が再帰的であるか否かは、初期点 $x \in V$ の取り方によらずに定まることが知られている。また、このマルコフ連鎖が再帰的であるとき、 $P^x(\{\text{粒子が無限回}x\text{に戻る}\}) = 1$ がすべての x で成り立つことも知られている。

マルコフ連鎖が再帰的か非再帰的かを調べる問題をマルコフ連鎖の型問題 (type problem) といひ、古くからいろいろと調べられてきた。我々は電気回路に対応するマルコフ連鎖の型問題を次節で取り扱うが、その前に本節でいくつかの準備をしておこう。まずは、無限グラフの有限近似について述べる。無限グラフ (V, B) に対して、

$$(V_1, B_1) \subset (V_2, B_2) \subset \cdots \subset (V, B)$$

となる連結な有限グラフの列で、 $n \rightarrow \infty$ のとき $V_n \rightarrow V, B_n \rightarrow B$ となるものを (V, B) の有限グラフ近似列という。

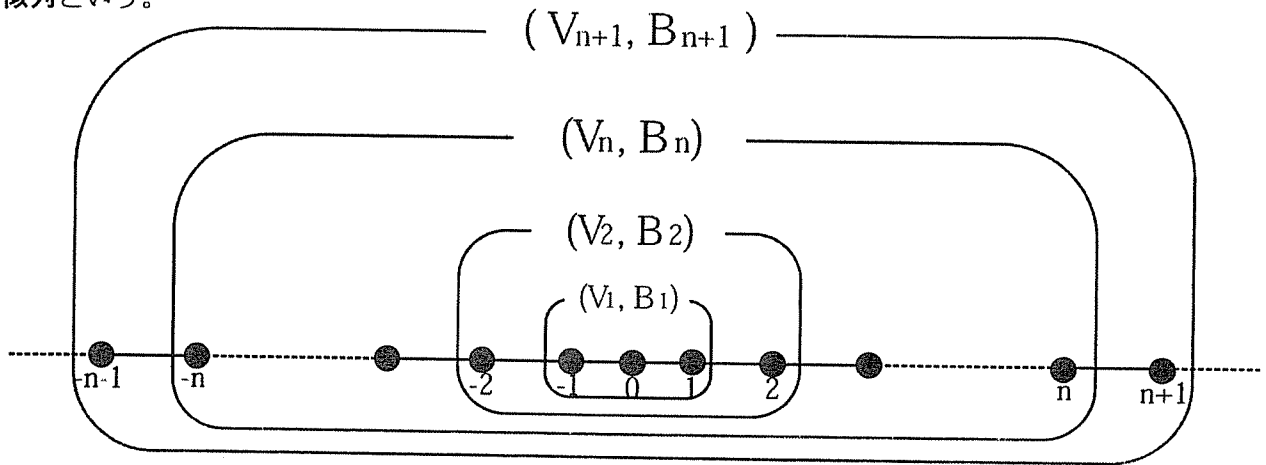


図 6.1 有限グラフ近似列の例

このとき $\partial V_n = \{x \in V_n : \{x, y\} \in B \text{ で } \{x, y\} \notin B_n \text{ なるものが存在する}\}$ とおくと、 $x \in V_n \setminus \partial V_n$ に対して $R_{(n)}(x, \partial V_n), P_{\text{esc}}^{(n)}(x, \partial V_n)$ が定義され ((V_n, B_n) に関する値という意味で、 (n) を付けた)、命題 5.3 と同様にして

$$P_{\text{esc}}^{(n)}(x, \partial V_n) = 1 / \{C_x R_{(n)}(x, \partial V_n)\} \quad (6.1)$$

となる。 $x \in V$ に対して $x \in V_n \setminus \partial V_n$ となるような十分大きな n をとろう。 $R_{(n+1)}(x, \partial V_{n+1})$ において、 V_{n+1} のうち ∂V_n およびその外をショートさせると $R_{(n)}(x, \partial V_n)$ を得るので、系 5.5 より $R_{(n)}(x, \partial V_n) \leq R_{(n+1)}(x, \partial V_{n+1})$ となる。従って $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{(n)}(x, \partial V_n)$ が無限大を込めると存在するの

で、その値を $R_{\text{eff}}(x)$ と書く (effはeffectiveの略)。(6.1)より $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\text{esc}}^{(n)}(x, \partial V_n)$ の存在も分かるので、その値を $P_{\text{esc}}(x)$ と書く。

$R_{\text{eff}}(x)$ や $P_{\text{esc}}(x)$ の値は、実は有限グラフ近似列の取り方によらない。実際、 $\{(V_n, B_n)\}, \{(V'_n, B'_n)\}$ を2つの有限グラフ近似列とすると、各 k に対して $n(k)$ が存在して

$$(V_k, B_k) \subset (V'_{n(k)}, B'_{n(k)})$$

となる。 k を $x \in V_k \setminus \partial V_k$ となるようにとると、ショート則より $R_{(k)}(x, \partial V_k) \leq R'_{(n(k))}(x, \partial V'_{n(k)})$ であり、 $k \rightarrow \infty$ とすることにより $\{(V_n, B_n)\}$ に沿った極限は $\{(V'_n, B'_n)\}$ に沿った極限以下であることがわかる。 $\{(V_n, B_n)\}$ と $\{(V'_n, B'_n)\}$ の立場を入れ換えて議論すると逆方向の不等号が出せ、結局2つの極限は等しいことが分かる。有効抵抗の極限が等しいから、脱出確率の極限も等しい。

命題 6.2 $P^x(\min\{n \geq 1 : X_n = x\} < \infty) = 1$ であるための必要十分条件は、 $P_{\text{esc}}(x) = 0$ である。

証明： $P^x(\min\{n \geq 1 : X_n = x\} < \infty) = 1$ は

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^x(\min\{n \geq 1 : X_n = x\} < k) = 1 \quad (6.2)$$

と同値であるから、これと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\text{esc}}^{(n)}(x, \partial V_n) = 0 \quad (6.3)$$

が同値であることを示せばよい。まず(6.2)が成り立つとき、 k を大きく取ることにより

$$P^x(\min\{n \geq 1 : X_n = x\} < k) [= a_k \text{ とおく}] \quad (6.4)$$

はいくらでも1に近くとれる。そこで、 $n(k)$ として x から $\partial V_{n(k)}$ に至るまでにボンドを必ず k 個以上通らないといけないようなものを取る (k に応じてこのような $n(k)$ を取るのは可能である)。(6.4)の左辺の事象が起きるとき、 k 秒後までに x に粒子が戻っているのであるから、結局 $P_{\text{esc}}^{(n(k))}(x, \partial V_{n(k)}) < 1 - a_k$ となり、(6.3)が示された。逆に(6.3)が成り立つとき、 k を大きく取ると $P_{\text{esc}}^{(k)}(x, \partial V_k) [= b_k \text{ とおく}]$ はいくらでも0に近くとれる。よって、粒子が ∂V_k に着く前に x に戻る確率は $1 - b_k$ 以上となり、従って $P^x(\min\{n \geq 1 : X_n = x\} < \infty) > 1 - b_k$ となる。 $1 - b_k$ はいくらでも1に近づけることができるから、(6.2)が示された。 ■

この命題と $P^x(\min\{n \geq 1 : X_n = x\} < \infty)$ が1であるか否かは x によらないという事実から、 $P_{\text{esc}}(x)$ が0であるか否かは x によらないことが分かる。また(6.1)より $R_{\text{eff}}(x)$ が無限であるか否かについても x によらないことが分かる。そこで、これらの値が0か否か(無限か否か)についての議論の場合、単に $P_{\text{esc}}, R_{\text{eff}}$ と書くことにすると、次の事実が示されたことになる。

$$\text{マルコフ連鎖が再帰的} \Leftrightarrow P_{\text{esc}} = 0 \Leftrightarrow R_{\text{eff}} = \infty \quad (6.5)$$

7 再帰性についてのポーヤの問題

d 次元ユークリッド空間の格子点(各成分がすべて整数である点)全体を頂点の集合とし、これらの点のうち距離が1のものを結んだ線分をボンドの集合とする無限グラフを考える(以下ではこのグラフを単に \mathbf{Z}^d と書く)。1921年の論文でポーヤ(Pólya)は、 \mathbf{Z}^d におけるシンプランダムウォーク(各点からボンドでつながった点への推移確率がいずれも $1/(2d)$ であるもの)がいつ再帰的であり、いつ非再帰的であるかという問題に取り組んだ。

定理 7.1 (ポーヤの定理) \mathbf{Z}^d 上のシンプランダムウォークは $d = 1, 2$ のとき再帰的であり、 $d \geq 3$ のとき非再帰的である。

なお、ポーヤの論文では、再帰的の定義が「粒子が確率1で V のすべての元を通る」となっている。ポーヤの意味での再帰性と定義6.1の意味での再帰性は同値であることが知られている。

この節では、上の定理に2通りの証明を与える。まずは、より直接的な証明から。 m を原点から出発した粒子が原点を通る回数の平均とし、 u_n を時刻 n で粒子が原点にいる確率とすると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = m = \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - P_{\text{esc}}(0))^{k-1} P_{\text{esc}}(0) = 1/P_{\text{esc}}(0)$$

となるから、前節の(6.5)と合わせると、再帰的であるための条件は $m = \infty$ であることがわかる。そこで u_n を計算しよう。 n が奇数のときこの値は0になる(奇数回で元の点に戻ることはできない!)ので、 u_{2n} を計算するとよい。肩慣らしに $d = 1$ の場合を計算すると、

$$u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} {}_{2n}C_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!}$$

となる。1回の推移確率が $1/2$ であるから $1/2^{2n}$ は $2n$ 秒後までの粒子の軌跡それぞれのもつ確率であり、原点に戻るには $2n$ 回のうち n 回ほど負の方向に動かないといけなないので、その場合の数をかけたのである。ここで $n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$ ($f_n \sim g_n$ とは $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n/g_n = 1$ となること) という公式が知られている(スターリングの公式という)ので、これを用いて上の式を計算すると、 $u_{2n} \sim 1/\sqrt{\pi n}$ となる。従って $m = \sum_n u_{2n} \asymp \sum_n 1/\sqrt{\pi n} = \infty$ となり、このランダムウォークは再帰的である。

次に $d = 2$ の場合を見る。今度は1回の推移確率が $1/4$ であるから $2n$ 秒後までの粒子の軌跡それぞれのもつ確率は $1/4^{2n}$ であり、原点に戻るには $2n$ 回のうち右に k 回動くなら、左に k 回、上下にそれぞれ $n - k$ 回動かないといけない ($0 \leq k \leq n$) ので、

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{k! k! (n-k)! (n-k)!} \\ &= \frac{1}{4^{2n}} {}_{2n}C_n \sum_{k=0}^n {}_n C_k {}_n C_{n-k} = \left(\frac{1}{2^{2n}} {}_{2n}C_n \right)^2 \sim \frac{1}{\pi n} \end{aligned}$$

となり、 $m \asymp \sum_n 1/(\pi n) = \infty$ を得るので、これも再帰的である。では $d = 3$ はどうであろうか？今度は、 x, y 軸の正の方向にそれぞれ j, k 回動くとする、 $2n$ 回で原点に戻るには負の方向にも同じ回数動く必要があり、また z 軸方向は正、負ともに $n - j - k$ 回動かなくてはならない。従って、

$$u_{2n} = \frac{1}{6^{2n}} \sum_{\substack{0 \leq j, k \\ j+k \leq n}} \frac{(2n)!}{j!j!k!k!(n-j-k)!(n-j-k)!}$$

となる。今度は多少面倒なので計算は略すが([3]などを参照のこと)、整理すると、ある定数 M を使って $u_{2n} \leq M/n^{3/2}$ となる。したがって $m \leq \sum_n M/n^{3/2} < \infty$ となり、今度は非再帰的になると分かる。 $d = 3$ で非再帰的であるから、より「戻りにくい」 $d \geq 4$ でも非再帰的である(この議論は、次の電気回路を用いた証明で厳密なものとなる)。 \mathbf{Z}^d の再帰性、非再帰性では、 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ の収束発散 ($s > 1$ のとき収束、 $s \leq 1$ のとき発散) が鍵になっていることに注意して欲しい。

ランダムウォークは、しばしば「酔っばらい」に例えられるが、この結果から、酔っばらった人は地上ではほっておいてもそのうち戻ってくるが、ビルや宇宙空間(!?) など立体的なところでは、ほっておくとどこかに行ってしまうて戻ってこないかもしれない、ということになる。(現実には、地上でもどこかで寝てしまったり車に跳ねられたりする恐れがあるので、酔っ払った友人はほったらかしにせず、ちゃんと介抱してあげましょう。)

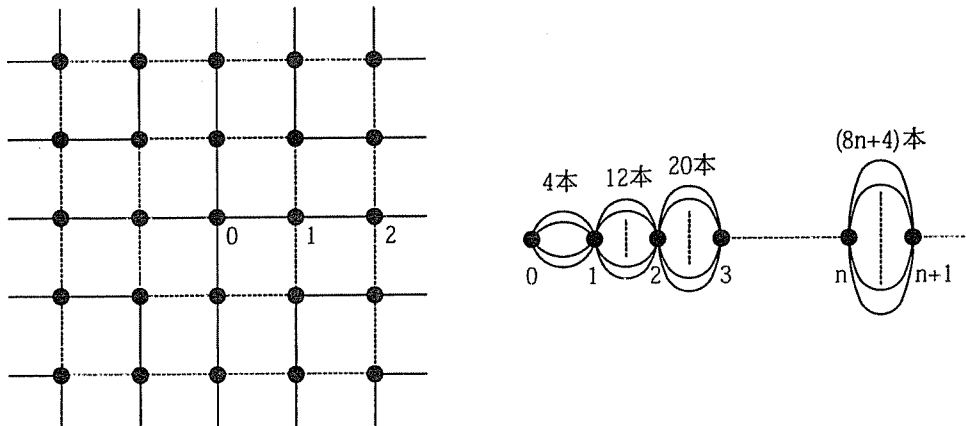


図 7.1 \mathbf{Z}^2 の図 ショートさせた図

さてそれでは、電気回路を使った型問題の別解を紹介しよう。まず $d = 2$ の場合を考える。 \mathbf{Z}^2 の図7.1の破線部分をそれぞれショートしてやり、図7.1 のような電気回路 (V_2, B_2) を作る。 n から $n + 1$ までには $4(2n + 1)$ 本のボンダがあるからこの2点間の抵抗値は $1/(8n + 4)$ 。よって前節で定義したこの回路の0から ∞ への有効抵抗は

$$R_{\text{eff}}^{V_2}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{8k + 4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{8k + 4} = \infty$$

となり、ショート則より $R_{\text{eff}}^{V_2}(0) \leq R_{\text{eff}}^{Z^2}(0)$ であるから Z^2 の有効抵抗も無限大。従って(6.5)より、この回路に対応する Z^2 のシンプルランダムウォークは再帰的である。 Z^1 は Z^2 のボンドの一部をカットして作られるから、カット則より有効抵抗は Z^2 のそれより大きく、やはり無限大である。従って Z^1 のシンプルランダムウォークも再帰的である。

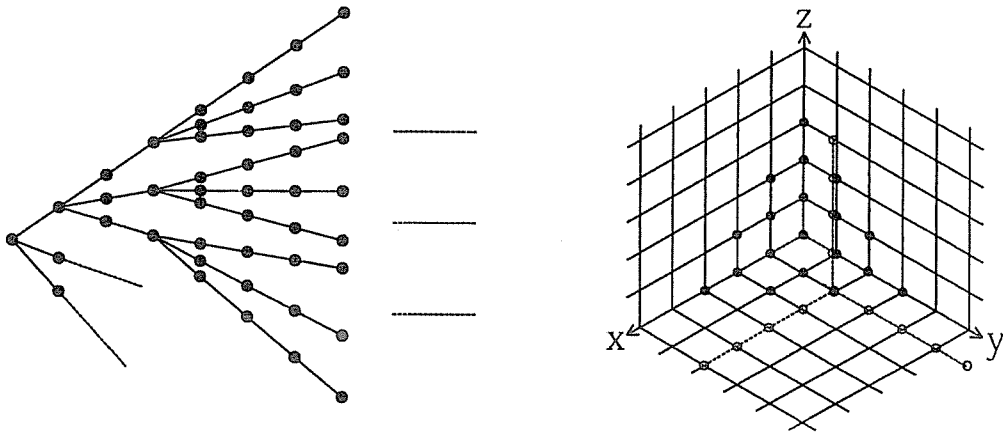


図 7.2

T_3 の図

T_3 を Z^3 にはめ込んだ図

次に Z^3 を考えよう。まず、天下り的ではあるが図7.2のような電気回路 (T_3, B_3) を考える。これは、原点から3つのボンドが出てそれぞれが3つのボンドに分かれ2ステップ延びた後、再びそれぞれの頂点から3つのボンドに分かれ 2^2 ステップ延びる、ということを繰り返した無限グラフの各ボンドに抵抗値1を与えた回路である。この無限グラフは、同じ形の枝が原点からボンドで結ばれることなく伸びているから、この回路の0から ∞ への有効抵抗を計算する際、エネルギーが最小になる電位は、原点からの距離が等しい頂点では同じ値をとる。従ってそれらの頂点をショートさせても、エネルギーに変化はない、よって有効抵抗も変わらない。 $\sum_{i=0}^n 2^i \leq j < \sum_{i=0}^{n+1} 2^i$ のとき、原点からの距離が j の頂点から $j+1$ の頂点へのボンドは 3^{n+1} 本あるから、これらの頂点間の抵抗値は $1/3^{n+1}$ 。抵抗値がこの値である抵抗が 2^n 本直列に並び、それが $n=0$ から ∞ まで続いているから、この回路の0から ∞ への有効抵抗は

$$R_{\text{eff}}^{T_3}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n 2^k / 3^{k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \times \frac{1 - (2/3)^{n+1}}{1 - 2/3} = 1$$

となり、対応するマルコフ連鎖は非再帰的である。さて、この回路を Z^3 に図7.2のようにはめ込もう。 n 回目の枝分かれが起こる点の位置は $x + y + z = 2^n - 1$ 上にあり、各点からボンドは軸の正方向にのびるから、はめ込んだボンド同士は重なり合わない。よって、はめ込んだ電気回路を (T'_3, B'_3) とすると、これは (T_3, B_3) からいくつかの頂点をショートさせたものとなるから、有効抵抗は T_3 のそれより小さい。一方、この回路 (T'_3, B'_3) は Z^3 からボンドをカットしてでき上がるものであるから、有効抵抗は Z^3 のそれより大きい。

よって $R_{\text{eff}}^{\mathbf{Z}^3}(0) \leq R_{\text{eff}}^{T_3}(0) \leq 1$ となり、有効抵抗が有限になるから (6.5) よりこの回路に対応する \mathbf{Z}^3 のシンプルランダムウォークは非再帰的である。 $d \geq 4$ の \mathbf{Z}^d については、 \mathbf{Z}^d のボンドの一部をカットして \mathbf{Z}^3 のグラフを作ることができるから、カット則より有効抵抗は \mathbf{Z}^3 の方が大きい。つまり \mathbf{Z}^d の有効抵抗値も有限である。従って \mathbf{Z}^d ($d \geq 4$) のシンプルランダムウォークも非再帰的である。

8 結び

本講座では、電気回路を題材として、(離散) 調和解析、(離散) 確率過程論と呼ばれる理論の入門的内容を取り扱った。電気回路のもつエネルギーが対応するランダムウォークの再帰性となつながら、さらには差分作用素のポアソン方程式を通じて、一見何の関わりもないように見える図形の分割の問題(デーンの定理)にもつながっているというところに、数学のおもしろさ、奥の深さの一端を垣間見ていただければ何よりである。

最後に講座の内容に密接に関係した内容を扱った本 ([1],[2]) と、日本語で書かれた確率論の入門書をいくつか ([3],[4],[5],[6])、参考文献として挙げておく。本講座の内容に興味を持たれた方は、是非参照して頂きたい。

References

- [1] P.G. Doyle and J.L. Snell, Random walks and electrical networks, Carus Monograph, Math. Assoc. of America, Washington DC, 1984
- [2] 砂田利一, 分割の幾何学 -デーンによる2つの定理-, 日本評論社, 2000
- [3] フェラー (W. Feller) 著, 河田龍夫監訳, 確率論とその応用I, II (上・下), 紀伊国屋書店, 1960-1970
- [4] 森真・藤田岳彦, 確率・統計入門 -数理ファイナンスへの適用, 講談社, 1999
- [5] 西尾真喜子, 確率論, 実教出版, 1978
- [6] 志賀徳造, ルベーク積分から確率論, 共立出版, 2000

電気回路とランダムウォーク：訂正

3 ページ 5 行目： $0 < i < N \rightarrow 1 < i < N$

9 ページ 図 3. 1：図の下部の境界の 2 点（+1 を与えている点）にも黒丸を打つ。

15 ページ 2 行目：本節の初めに書いた \rightarrow 前述した

17 ページ 下から 10 行目：

$$P_{\text{esc}}^{(n(k))}(x, \partial V_{n(k)}) < 1 - a_k \rightarrow P_{\text{esc}}^{(n(k))}(x, \partial V_{n(k)}) \leq 1 - a_k$$

17 ページ 下から 7 行目：

$$P^x(\min\{n \geq 1 : X_n = x\} < \infty) > 1 - b_k \\ \rightarrow P^x(\min\{n \geq 1 : X_n = x\} < \infty) \geq 1 - b_k$$

18 ページ 13 行目の式：

正確にいうと、この式の 2 番目と 3 番目の等号は $P_{\text{esc}}(0) > 0$ のときにしか成立しないが、 $m = 1/P_{\text{esc}}(0)$ は $P_{\text{esc}}(0) = 0$ のときにも成り立つことを示すことができるのである。

§3 (3.3) の証明

$f_{l+1} - f_l$ は V' 上0なので、(3.3)を書き直すと、

$$|f_l^{(k)}(x) - f_{l-1}^{(k)}(x)| \leq \alpha \max_{y \in V} |f_l^{(0)}(y) - f_{l-1}^{(0)}(y)| \text{ for all } x \in V \setminus V' \quad (0.1)$$

となる。以下(0.1)を示す。まず、(3.2)を変形すると、

$$f_l^{(i)}(x) - f_{l-1}^{(i)}(x) = \begin{cases} f_l^{(i-1)}(x) - f_{l-1}^{(i-1)}(x) & \text{if } x \neq x_i \\ \sum_{y \in V \setminus V'} P_{x_i y} (f_l^{(i-1)}(y) - f_{l-1}^{(i-1)}(y)) & \text{if } x = x_i \end{cases}$$

となる。これを用いると、 $x_i \in V \setminus V'$ について

$$\begin{aligned} |f_l^{(k)}(x_i) - f_{l-1}^{(k)}(x_i)| &= |f_l^{(i)}(x_i) - f_{l-1}^{(i)}(x_i)| \\ &\leq \left(\sum_{y \in V \setminus V'} P_{x_i y} \right) |f_l^{(i-1)}(y) - f_{l-1}^{(i-1)}(y)| \quad (0.2) \end{aligned}$$

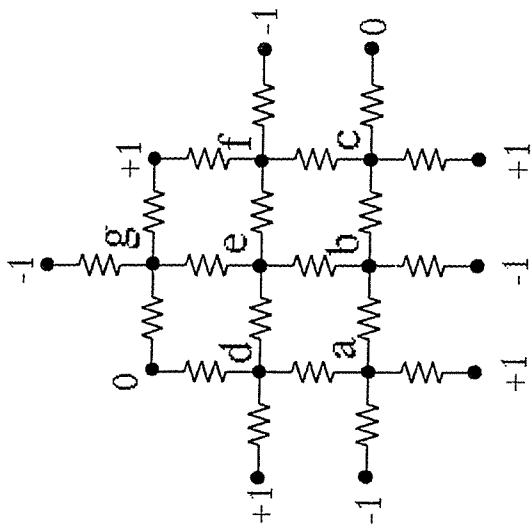
を得る。 $V'_1 = \{x \in V \setminus V' : x \text{は} V' \text{の点とボンドでつながる}\}$ とおくと、 $x_i \in V'_1$ については $\sum_{y \in V \setminus V'} P_{x_i y} < 1$ であるから、(0.2)より(0.1)が成り立つ (α に当たるのは $\alpha_1 = \max_{x_i \in V'_1} (\sum_{y \in V \setminus V'} P_{x_i y}) < 1$ である)。同様にして $V'_2 = \{x \in V \setminus V' \cup V'_1 : x \text{は} V'_1 \text{の点とボンドでつながる}\}$ とおくと、 $x_i \in V'_2$ については $\sum_{y \in V \setminus (V' \cup V'_1)} P_{x_i y} < 1$ であるから、

$$(0.2) \leq \left(\sum_{y \in V \setminus (V' \cup V'_1)} P_{x_i y} \right) |f_l^{(i-1)}(y) - f_{l-1}^{(i-1)}(y)| + \left(\sum_{y \in V'_1} P_{x_i y} \right) |f_l^{(i-1)}(y) - f_{l-1}^{(i-1)}(y)|$$

($y \in V'$ においては $f_l^{(i-1)}(y) - f_{l-1}^{(i-1)}(y) = 0$ であることを用いた) となり、 V'_1 についての結果を合わせると(0.1)が成り立つ (α に当たるのは $\alpha_2 = \max_{x_i \in V'_2} \{ \sum_{y \in V \setminus (V' \cup V'_1)} P_{x_i y} + \sum_{y \in V'_1} P_{x_i y} \alpha_1 \} < 1$ である)。 V の元の数有限であるから、以下同様の議論を繰り返すことにより、すべての $x \in V \setminus V'$ について(0.1)が成立することが示される。

問3. 1

Mathematica を用いて計算した結果
 (モンテカルロについては、試行する
 ごとに値が変わってくる)



| | 真の値 | モンテカルロ (1000回) | モンテカルロ (5000回) | モンテカルロ (10000回) | カオスサイデル (5回) | カオスサイデル (10回) | カオスサイデル (15回) |
|---|----------|-------------------|-------------------|--------------------|-----------------|------------------|------------------|
| a | 0.02162 | -0.029 | 0.007 | 0.0219 | 0.02000 | 0.02161 | 0.02162 |
| b | -0.17905 | -0.192 | -0.1852 | -0.1744 | -0.18055 | -0.17907 | -0.17905 |
| c | 0.22162 | 0.241 | 0.2002 | 0.2096 | 0.22098 | 0.22162 | 0.22162 |
| d | 0.26554 | 0.259 | 0.248 | 0.2601 | 0.26445 | 0.26553 | 0.26554 |
| e | 0.04054 | 0.046 | 0.0354 | 0.0434 | 0.03945 | 0.04053 | 0.04054 |
| f | 0.06554 | 0.109 | 0.0652 | 0.059 | 0.06511 | 0.06554 | 0.06554 |
| g | 0.01014 | 0.019 | 0.0152 | 0.009 | 0.00986 | 0.01013 | 0.01014 |

トムソンの原理について

まずフローの定義をする。

定義 0.1 V' を V の部分集合とする。 $V \times V$ 上の関数 j が次の3条件を満たすとき、 j を V' を境界とするフロー という。

$$\begin{aligned} i) \quad & j_{xy} = -j_{yx} \quad ii) \quad \sum_{y \in V} j_{xy} = 0 \quad \text{for } x \in V \setminus V' \\ iii) \quad & j_{xy} = 0 \quad \text{if } \{x, y\} \notin B \end{aligned}$$

$ii)$ はキルヒホッフの法則に当たるものである。 j_{xy} は x から y に流れる電流量を表すと考えるとよい(その値が負であるとき、電流は逆方向に流れていると解釈する)。フローに対して、 $J_x = \sum_{y \in V} j_{xy}$ (x への総流入電流量に当たる)とおくと、 $\sum_{x \in V'} J_x = \sum_{x \in V} J_x = 0$ となる。つまり、 V' (あるいは V)全体で見るとフローの総和は0になる。実際、 $ii)$ より $x \in V \setminus V'$ については $J_x = 0$ であるから初めの等号が成立し、

$$\sum_{x \in V} J_x = \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} j_{xy} = \frac{1}{2} \sum_{x, y \in V} (j_{xy} + j_{yx}) = 0$$

(最後の等式で $i)$ を用いた) より結論を得る。

さて、フローが与えられたとき、回路の消費するエネルギーを

$$E_C(j, j) = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} j_{xy}^2 R_{xy}$$

で定義する。 $E = IV = I^2 R$ であったから、これも中学で習ったエネルギーに合致する。

命題 0.2 (トムソンの原理) V' 上の関数 \bar{I} で $\sum_{a \in V'} \bar{I}(a) = 0$ を満たすものが与えられたとする($\bar{I}(a)$ は a への総流入電流量を表す)。このとき V' を境界とするフローで以下の条件を満たすものがただ一つ存在する(これを i とおく)。

$$i) \quad \sum_{y \in V} i_{ay} = \bar{I}(a) \quad \text{for all } a \in V'$$

$$ii) \quad V \text{上のポテンシャル } f \text{ が存在して } i_{xy} = (f(x) - f(y))/R_{xy} \quad \text{for all } x, y \in V$$

さらに、

$$\inf\{E_C(j, j) : j \text{ は } V' \text{ を境界とするフローで } i) \text{ を満たす}\} = E_C(i, i)$$

が成り立ち、上の下限を取る関数は i に限られる。

トムソンの原理を標語的に言うと、「エネルギー消費量が最小となるようにフローを決めると、それはあるポテンシャル(電位)からオームの法則によって定まる電流である」ということである。

2つのグラフの上のマルコフ連鎖がともに再帰的あるいはともに非再帰的であるとき、2つのマルコフ連鎖は**同じ型**であるという。

命題 7.2 (V, B) 上に2つの電気回路 (V, C) , (V, C') が与えられているとする。

正の数 C_1, C_2 が存在して、任意の $\{x, y\} \in B$ について

$$C_1 C_{xy} \leq C'_{xy} \leq C_2 C_{xy} \quad (7.1)$$

となるとき、 (V, C) , (V, C') に対応するマルコフ連鎖は同じ型である。

証明： 各 $\{x, y\} \in B$ に対して $U_{xy} = C_1 C_{xy}$, $\bar{U}_{xy} = C_2 C_{xy}$ として新たな電気回路 (V, U) , (V, \bar{U}) を作る。すると、「 (V, U) に対応するマルコフ連鎖が非再帰的」 \Rightarrow 「 $R_{\text{eff}}^U < \infty$ 」((6.5)より) \Rightarrow 「 $R_{\text{eff}}^{C'} \leq R_{\text{eff}}^U < \infty$ 」((7.1)、定理5.4より) \Rightarrow 「 (V, C') に対応するマルコフ連鎖も非再帰的」((6.5)より)。

全く同様にして、「 (V, C') に対応するマルコフ連鎖が非再帰的」 \Rightarrow 「 (V, \bar{U}) に対応するマルコフ連鎖が非再帰的」が示せる。ところが、 $(V, C), (V, U), (V, \bar{U})$ に対応するマルコフ連鎖は全く同じものであるから、命題の主張が示せた。

無限グラフ (V, B) に対して B の各元に抵抗1を乗せて作った電気回路に対応するマルコフ連鎖のことを、シンプルランダムウォークと呼ぶことにする。

系 7.3 電気回路 (V, C) に対して、正の数 C_1, C_2 が存在して

$$C_1 \leq C_{xy} \leq C_2 \quad (7.2)$$

が任意の $\{x, y\} \in B$ で成立するとき、 (V, C) に対応するマルコフ連鎖は (V, B) 上のシンプルランダムウォークと同じ型である。