数 学 入 門 公 開 講 座

平成１３年８月６日（月）から平成１３年８月１０日（金）まで

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1．電気回路とランダムウォーク（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助教授　熊谷　　隆

皆さんの中には、高校の物理でオームの法則・キルヒホッフの法則といった、電気回路についての法則を経験則として学んだ人も多いと思います。この講座では、これらの法則が離散調和解析と呼ばれる数学を用いてどのように表現されるかを学び、電気回路に対応するランダムウォーク（マルコフ連鎖）について考察します。グラフの上に電気回路を構成してそのポテンシャル論的な性質を学ぶとともに、電気回路の性質が、対応するランダムウォークの性質にどのように反映するかを調べ、これらを用いた応用にも触れる予定です。

2．流体力学と流体数学（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・教　授　岡本　　久

わが国の大学の数学教室では流体力学を講義することは少ないが、ヨーロッパの大学では数学教室で流体力学を教えることも多い。イギリスなどでは応用数学のかなりの部分を流体力学周辺で占めていることもある。歴史的に見ても、B. Riemann, H. Poincare, H. Weyl, A. N. Kolmogorov など、その人の主要な業績からは外れるけれども重要な流体力学の論文を書いてきた数学者は多い。

本講義の目的は、流体力学が数学の問題の宝庫であることを、具体例を通じて感じとっていただくことである。簡単な微分方程式は使うけれども、内容の大部分はグラフや流れの画像等を使って理解できるようにする予定である。

3．超弦理論の数学（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助　手　髙橋　篤史

物質や空間の基本構成要素が「点（素粒子）」ではなく1次元の空間的な広がりを持った「弦」であると考えることから、超弦理論は始まりました。現在では、一般相対性理論と量子論の究極的統一理論、つまり万物の理論の最有力候補として、理論物理学の表舞台で活躍しています。

数学と理論物理学は互いに刺激を与えながら発展してきましたが、超弦理論はこれまで以上に数学の世界に非常に大きな影響を与え続けています。それは、群論・表現論・保型形式・数論・代数幾何・シンプレクティック幾何……と広範囲にわたりますが、それも「弦」の持つ1次元の空間的自由度が理由です。

この講座では、超弦理論の数学的側面について、入門的解説および最新の成果の紹介をします。とくに、「空間とは何か」という幾何学の基本的問題に対する超弦理論からのアプローチについて触れたいと思います。

時　間　割

時間＼日	8月6日(月)	7日(火)	8日(水)	9日(木)	10日(金)
10：30～11：45	熊谷	熊谷	熊谷	熊谷	熊谷
11：45～13：00	休憩				
13：00～14：15	岡本	岡本	岡本	岡本	岡本
14：15～14：45	休憩				
14：45～16：00	髙橋篤	髙橋篤	髙橋篤	髙橋篤	髙橋篤

超 弦 理 論 の 数 学

京都大学数理解析研究所・助　手　　髙 橋 篤 史

2001, AUGUST 6, 7, 8, 9, 10,　14:45～16:00

超弦理論の数学

髙橋 篤史

目 次

1 弦の量子力学 **2**

1.1 調和振動子の量子化 2

1.2 弦の量子化 5

1.3 BRST コホモロジーと No Ghost Theorem 8

1.4 D-brane 10

2 弦の場の理論と幾何学 **12**

2.1 弦の相互作用と A_∞-圏 12

2.2 A_∞-圏の幾何学的構成 15

3 おわりに **19**

はじめに

この講座の目的は, 超弦理論にはじめて触れる方にも, 高度な予備知識なしに超弦理論の持つ数学の豊かさを感じて頂くことです. そのため, この予稿を読むための予備知識としては, 初歩の線形代数および微積分程度で十分であるように配慮したつもりです. 計算はほとんど省略してありますが, 実際に手を動かして計算されることをお勧めします. とくに1.3節は代数の計算だけでも非常に興味深い対象です.

各節は次のように関連しています.

$$\begin{array}{ccccc} 1.1 & \longrightarrow & 1.2 & \longrightarrow & 1.3 \\ & & & \searrow & & \searrow \\ & & & & 1.4 & \longrightarrow & 2.1 & \longrightarrow & 2.2 \end{array}$$

1　弦の量子力学

1.1　調和振動子の量子化

弦の量子化の前に, 基礎となる調和振動子の量子化について簡単に触れておきたいと思います. まずは言葉の準備もかねた古典力学の復習から始めたいと思います.

作用と呼ばれる量 S が与えられることで, 物理系は決まります. ここでは, **Lagrangian** と呼ばれる q と $\dot{q}$ の関数 $L(q, \dot{q})$ によって

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t))dt, \qquad \dot{q}(t) := \frac{dq}{dt}(t)$$

と与えられているとします. 最小作用の原理により,

$$\frac{\delta S}{\delta q(t)} = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0$$

がこの系の運動方程式となります. このとき運動量と **Hamiltonian** をそれぞれ

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad H(q, p) := p \cdot \dot{q} - L$$

で定義すると, 運動方程式は

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

と等価になります. 一般の p, q の関数 $f(p, q)$ に対しては

$$\begin{aligned} \dot{f} =& \frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dt} \\ =& \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p}(-\frac{\partial H}{\partial q}) \end{aligned}$$

ですから, **Poisson** 括弧積と呼ばれる積

$$\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}$$

を導入すると,

$$\dot{f} = \{H, f\} \tag{1}$$

が成り立つことがわかります. とくに, 注目すべき点は Poisson 括弧積に関して, **Jacobi の恒等式**

$$\{f,\{g,h\}\} = \{\{f,g\},h\} + \{g,\{f,h\}\} \tag{2}$$

が成り立つことです.

正準量子化とは, 大体次の操作のことです.

(i) **対応原理**:p,q といった力学変数を, ある非可換代数 $\mathcal{O}$ の元 P,Q とみなします.
(ii) $\mathcal{O}$ では Poisson の括弧積 $\{\cdot,\cdot\}$ を Lie の括弧積 $i[\cdot,\cdot]$, ($[A,B] := AB - BA$) に置き換えた関係式が成り立つとします. とくに式(1)は

$$\frac{d}{dt}f(P(t),Q(t)) = i[H,f], \quad \textbf{Heisenberg の運動方程式} \tag{3}$$

となります.
(iii) あるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を考え, $\mathcal{O}$ の $\mathcal{H}$ 上の作用 (ユニタリー表現 $\rho : \mathcal{O} \to End(\mathcal{H})$) を考えます.
(iv) $\mathcal{H}$ の元 v を物理的状態と考え, $\mathcal{O}$ の元 a で $\rho(a)$ が $\mathcal{H}$ 上のエルミート作用素となるものを, 観測可能な量と思います.
(v) **量子論の確率解釈**:実際に観測される物理量は $\rho(a)$ の固有値だと考え, 固有ベクトルのノルムが観測される確率であると考えます.

とくに, Q と P の交換関係

$$[Q,P] = i \tag{4}$$

から, 位置と運動量の同時固有ベクトルを得ることが不可能なことがわかります. つまりこの二つの物理量の間に**不確定性関係**があることが結論されます.

弦理論にも応用できる調和振動子を例にとって, 具体的に正準量子化について説明したいと思います. まずラグランジアンを

$$L(q,\dot{q}) := \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}q^2$$

で与えます. このとき簡単な計算で, 古典的運動方程式が

$$\ddot{q} = -q$$

で与えられ, 解は三角関数の一次結合で表されることがわかります. またこの系のエネルギーは $H = p^2/2 + q^2/2$ で与えられ, 古典的には任意のエネルギーをもった解を構成できることに注意しておきましょう.

さて, 今度はこの系を量子化することを考えましょう. 対応原理によって p, q を代数の元 P, Q に置き換えます. さらに簡単のために

$$\begin{cases} a^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(P + iQ), & \text{生成演算子} \\ a := \frac{1}{\sqrt{2}}(P - iQ), & \text{消滅演算子} \end{cases}$$

を導入します. すると正準交換関係(4) の要請から

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0 \tag{5}$$

で, $\mathcal{O}$ は 2 つの元 $a, a^\dagger$ で生成され, 関係式(5) を満たす代数を考えればよいことがわかります.

次に $\mathcal{H}$ を考えましょう. とくに**真空**と呼ばれる元 $\mathcal{H}$ の元 $|0\rangle \neq 0$ で, $a|0\rangle = 0$, $a^\dagger|0\rangle \neq 0$ となるものが存在するとします. $\mathcal{H}$ が $\mathcal{O}$ の表現として既約であること, つまり任意の $\mathcal{H}$ の元が $|0\rangle$ に $\mathcal{O}$ の元を作用させて得られること, を仮定すると

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{C}(a^\dagger)^n |0\rangle$$

となります. また, $\mathcal{H}$ 上のエルミート内積 I を 2 つの条件

$$\begin{cases} I(av, w) = I(v, aw),\ I(a^\dagger v, w) = I(v, a^\dagger w), & \mathcal{O}\text{-不変性} \\ I(|0\rangle, |0\rangle) = 1, & \text{正規化} \end{cases} \tag{6}$$

でただ一つ定義することができます. 上で与えた内積の $\mathcal{O}$-不変性より,

$$\langle 0|a^m (a^\dagger)^n|0\rangle := I((a^\dagger)^m |0\rangle, (a^\dagger)^n |0\rangle)$$

という記号法を通常用います. 今後とも $\mathcal{O}$-不変性を持った内積のみを考えるので, この記号法を断りなく使うことにします. 古典的な Hamiltonian は

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$$

です. P, Q は互いに可換ではないために, 対応原理だけでは量子論的 Hamiltonian を決めることができません. つまり真空エネルギーと呼ばれる定数 E_0 の分だけ不定性を残した,

$$H(a^\dagger, a) = a^\dagger a + E_0,$$

として, 量子論的 Hamiltonian は定義されます. したがって

$$H(a^\dagger)^n |0\rangle = (n + E_0) \cdot (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad H|0\rangle = E_0 |0\rangle$$

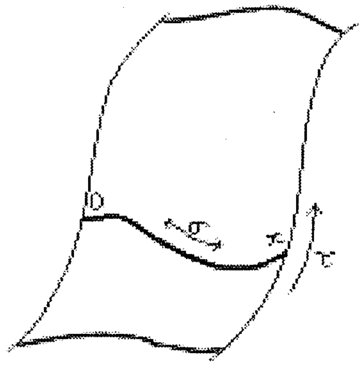

図 1: 開弦の運動

を満たします.

$a^\dagger(a)$ はエネルギー 1 の粒子を 1 個生成 (消滅) させることに対応し, $(a^\dagger)^n|0\rangle$ はエネルギー $n+E_0$ を持つ n-粒子の状態と考えることができます. 物理的には非常に自然に, 最初に仮定した真空の存在について説明できます. 真空とはエネルギーが最小の状態であると考えられます. したがって $|0\rangle$ からさらに粒子を消滅させると, エネルギーは 1 小さく, すなわち

$$\begin{aligned} H(a|0\rangle) =& ([H,a]+aH)|0\rangle \\ =& (-a+aH)|0\rangle \\ =& (E_0-1)a|0\rangle \end{aligned}$$

となります. すると真空のエネルギーの最小性から, $a|0\rangle=0$ になる, という議論です.

量子化された結果, 系が持ちうるエネルギーは離散化されてしまい, 任意の値を取れなくなってしまったことに注意してください. これは古典論と量子論の決定的な差の一つの現れです. また E_0 の値によっては, 負エネルギーの状態が現れることもあります. 相対性理論の要請から, すべての粒子は非負のエネルギーをもつと考えるので, 通常は真空のエネルギー E_0 を 0 に正規化します. ところが, 超弦理論では真空エネルギー E_0 も重要な意味を持ち, 実際負エネルギーをもったタキオンと呼ばれる粒子が登場し, 重要な役割を担うことになります.

1.2 弦の量子化

相互作用のない, 自由な弦の量子化を考えましょう. 話を簡単にするため, D-次元のミンコフスキー空間を運動しているとします (図 1). ミンコフスキー空間の座標系 $X^\mu, \mu=0,1,\ldots,D-1$ で, 計量 $\eta_{\mu\nu}$ が $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(-1,+1,\ldots,+1)$ で与えられているとします. まずここでも古典的な作用積

分を与えることからはじめます. 弦の長さに関する変数を $0 \leq \sigma \leq \pi$, 弦の固有時間を τ で表すとき, 作用は

$$S[X^\mu(\sigma,\tau)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^\pi d\sigma \sum_{\mu,\nu=0}^{D-1} \eta_{\mu\nu}\left(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu - \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X^\nu\right),$$

$$\partial_\sigma X^\mu := \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}, \quad \partial_\tau X^\mu := \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$$

で与えられます. 古典的な運動方程式は, $S[X^\mu(\sigma,\tau)]$ を $X^\mu(\sigma,\tau)$ で変分をとることで与えられます. 計算は演習問題にすることにして, ここでは結果だけ述べます.

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2)X^\mu(\sigma,\tau) = 0, \quad \mu = 0,1,\ldots,D-1, \quad \text{波動方程式} \tag{7}$$

さらに, 弦が境界 $0,\pi$ を持つことにより, 境界条件

$$\delta X^\mu \partial_\sigma X^\nu|_{\sigma=0,\pi} = 0 \tag{8}$$

が導かれます. とくに式(8) は, 各 $\mu = 0,1,\ldots,D-1$ に対して次のように分類されます.

$$\begin{cases} \partial_\sigma X^\mu|_{\sigma=0} = \partial_\sigma X^\mu|_{\sigma=\pi} = 0, & \text{Neumann-Neumann 境界条件} \\ X^\mu|_{\sigma=0} = \text{定数},\ X^\mu|_{\sigma=\pi} = \text{定数}, & \text{Dirichlet-Dirichlet 境界条件} \\ \partial_\sigma X^\mu|_{\sigma=0} = 0,\ X^\mu|_{\sigma=\pi} = \text{定数}, & \text{Neumann-Dirichlet 境界条件} \\ X^\mu|_{\sigma=0} = \text{定数},\ \partial_\sigma X^\mu|_{\sigma=\pi} = 0. & \text{Dirichlet-Neumann 境界条件} \end{cases} \tag{9}$$

まず最も簡単な場合, すべての座標に関して Neumann-Neumann 境界条件が課されている場合を考えることにしましょう. 式(7) の古典解は

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X_L^\mu(\tau+\sigma) + X_R^\mu(\tau-\sigma)$$

$$X_L^\mu(\tau+\sigma) := x_L^\mu + \frac{1}{2}p_L^\mu(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{m\neq 0}\frac{\alpha_m^\mu}{m}e^{-im(\tau+\sigma)}$$

$$X_R^\mu(\tau-\sigma) := x_R^\mu + \frac{1}{2}p_R^\mu(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{m\neq 0}\frac{\tilde{\alpha}_m^\mu}{m}e^{-im(\tau-\sigma)}$$

で与えられます. Neumann-Neumann 境界条件 $\partial_\sigma X^\mu|_{\sigma=0} = \partial_\sigma X^\mu|_{\sigma=\pi} = 0$ より

$$p_L^\mu = p_R^\mu, \quad \alpha_m^\mu = \tilde{\alpha}_m^\mu, \quad m \in \mathbb{Z}$$

が従います. よって $x^\mu := x_L^\mu + x_R^\mu$, $p^\mu := (p_L^\mu + p_R^\mu)/2$ とするとき

$$X^\mu(\sigma,\tau) = x^\mu + p^\mu\tau + i\sum_{m\neq 0}\frac{\alpha_m^\mu}{m}e^{-im\tau}\cos(m\sigma)$$

となります.

いよいよ正準量子化を実行しましょう. 調和振動子のときと異なるのは, 今回は σ でパラメーター付けられた連続無限個の力学変数 $X^\mu(\sigma)$ を考えるという点だけです. よって定義にしたがって共役な運動量が

$$P_\mu(\sigma,\tau) := \frac{\delta S}{\delta \partial_\tau X^\mu} = \frac{1}{\pi}\eta_{\mu\nu}\partial_\tau X^\nu$$

と求められ,

$$[X^\mu(\sigma,\tau), P_\nu(\sigma',\tau)] = i\delta^\nu_\mu \delta(\sigma-\sigma') \tag{10}$$

$$\delta(\sigma-\sigma') := \frac{1}{\pi}\left(1+2\sum_{m\geq 1}\cos(m\sigma)\cos(m\sigma')\right)$$

が正準交換関係となります. 調和振動子のときと同様に, 関係式(10) を α^μ_m 達の交換関係に帰着しましょう. これも計算は演習問題にして, 結果だけ述べることにします.

$$[x^\mu, \alpha^\nu_0] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [\alpha^\mu_m, \alpha^\nu_n] = m\delta_{n+m,0}\eta^{\mu\nu}, \quad m\in\mathbb{Z} \tag{11}$$

が成り立ちます. ここで $\alpha^\nu_0 := p^\nu$ としました.

さてこのときの物理的状態の空間はどのようなものでしょうか. 調和振動子の時を思い出すと, α^μ_m のうち, $m<0$ を生成演算子, $m>0$ を消滅演算子と考え,

$$\alpha^\mu_m \left|0\right\rangle_{NN} = 0,\ m\geq 0,\quad \mu=0,1,\ldots,D$$

となる真空が考えられます. 多少異なるのは α^μ_0 の存在です. これに共役な弦の重心座標 x^μ を真空に作用させて, 新しい状態を作ることができます. とくに運動量 $k^\mu\mathbb{R}^D$ を持った状態を次のようにして作ることができます.

$$\left|k\right\rangle_{NN} := e^{i\eta_{\mu\nu}k^\mu x^\nu}\left|0\right\rangle_{NN}$$

$$\alpha^\mu_0\left|k\right\rangle_{NN} = k^\mu\left|k\right\rangle_{NN}$$

であることがすぐにわかります. すると

$$\mathcal{H}_{NN} = \bigoplus \mathbb{C}\alpha^{\mu_1}_{m_1}\alpha^{\mu_2}_{m_2}\ldots\alpha^{\mu_l}_{m_l}\left|k\right\rangle_{NN}$$

と表される空間が物理的状態の空間の候補となります. ここで $\alpha^{\mu_1}_{m_1}\alpha^{\mu_2}_{m_2}\ldots\alpha^{\mu_l}_{m_l}\left|k\right\rangle_{NN}$ は, ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^D$ 内を動く運動量 k^μ の l 階のテンソル粒子を表現しています. 弦理論の特徴の一つは, 1つの弦の運動を記述することで, 無限個の粒子の運動が記述されているということにあります.

内積を $\mathcal{H}_{NN}$ 上に定義する必要がありますが, これが一番重要な問題です. 結論から言うと, $\mathcal{H}_{NN}$ には不変(正定値)エルミート内積は入りません. 具体的に考えてみましょう. 調和振動子のときと同様に, $\langle 0|0\rangle_{NN}=1$ と正規化することにします. すると $m<0$ に対して

$$\langle 0|a^{\mu}_{-m}a^{\mu}_{m}|0\rangle_{NN}=\langle 0|[a^{\mu}_{-m},a^{\mu}_{m}]+a^{\mu}_{m}a^{\mu}_{-m}|0\rangle_{NN}=-\eta^{\mu\mu}m,$$

となるので, $a^{\mu}_{m}\,|0\rangle_{NN}$ のノルムは $\mu=1,\ldots,D$ に対しては正, $\mu=0$ に対しては負となります. このままでは非常に困った事態を引き起こします. というのも量子論の確率解釈の立場からは, ノルムは物理量の観測される確率であり, それは必ず正であることを望んでいるからです. つまり, 意味のある理論を構成するためには, $\mathcal{H}$ の中からうまく正ノルムを持つ部分空間を取り出す必要があるのです.

弦理論はこの問題に関してすばらしい解決法を与えていて, 時空の次元まで決定してしまいます. それはコホモロジーを用いるもので, 後で紹介する A_∞-構造とも密接に関係します.

1.3 BRST コホモロジーと No Ghost Theorem

弦の作用を与えたとき, 話を簡単にするために弦が時空を掃く面の座標および計量は固定して議論してきましたが, 特定の座標によった議論というのは, 数学的にも物理的にも望ましいものではありません. 話を簡単にするために省略しましたが, 元の系は一般座標変換および共形変換という巨大な対称性を持っています. 対称性があると, 対応して**保存量**があります. この場合それはエネルギー運動量テンソルと呼ばれる量で, $X^{\mu}(\sigma,\tau)$ のときと同様に, フーリエ展開の係数を計算すると.

$$L_n:=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\eta_{\mu\nu}\alpha^{\mu}_{n-m}\alpha^{\nu}_{m},\quad n\neq 0, \tag{12}$$

$$L_0:=\sum_{m\geq 1}\eta_{\mu\nu}\alpha^{\mu}_{-m}\alpha^{\nu}_{m}+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\alpha^{\mu}_{0}\alpha^{\nu}_{o}-a,\quad a\in\mathbb{R} \tag{13}$$

となります. L_0 は Hamiltonian に対応していて, a は真空エネルギーです. L_m たちは次の交換関係を満たすことが多少長い計算の結果わかります.

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{D}{12}(n^3-n)\delta_{m+n,0}$$

この関係を満たす代数のことを **Virasoro 代数**と呼びます. たとえば, 円周 S^1 の微分同相写像全体のなす群に対する Lie 代数を考えると, 上の式で $D=0$ としたものが得られます.

ゲージ対称性を持った古典系の量子化の際には, 一度その対称性を壊す必要があります. しかし, その際に Faddeev-Popov の ghost と呼ばれる代数および対応するヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{gh}$ を導入することで, 量子論的なゲージ対称性を回復することができます. それは ghost の代数を用いて, 量子論的なゲージ対称性の生成子である BRST 電荷と呼ばれる $\mathcal{H}_{NN} \otimes \mathcal{H}_{gh}$ 上の作用素 Q で, $Q^2 = 0$ となるものを作ることで行われます.

今考えている開いた弦の場合には, ghost の代数は, 反交換子 $\{x, y\} := xy + yx$ に対して

$$\{c_m, b_n\} = \delta_{m+n,0}, \quad \{c_m, c_n\} = \{b_m, b_n\} = 0, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

を満たす c_m, b_n で生成される代数です. $c_m, m \leq 0$ および $b_n, n < 0$ を生成演算子, $c_m, m > 0$ および $b_n, n \geq 0$ を消滅演算子と思って, いつものとおりに $\mathcal{H}_{gh}$ を作ります. BRST 電荷は

$$Q := \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_{-n} c_n - \frac{1}{2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (m-n) : c_m c_n b_{-m-n} :$$

と書けます. ここで $:\cdot:$ は生成演算子を左側に書き, 消滅演算子を右側に書くという規則の事とします. このとき次のことが知られています.

定理 1.1 (No Ghost Theorem).

$$Q^2 = 0 \quad \overset{\text{同値}}{\Leftrightarrow} \quad D = 26, \ a = 1.$$

さらに, この条件が満たされるとき, Q のコホモロジーの空間

$$H(\mathcal{H}_{NN} \otimes \mathcal{H}_{gh}, Q) := \mathrm{Ker}\ Q \,/ \mathrm{Im}\ Q$$

には正定値の内積が入る.

直感的には, Ker Q を考えることで負のノルムを持つ空間を切り落として, その後 0 ノルムを持つ空間を無視することで, 正のノルムを持つ空間を構成できるということです. Q で消される状態のみを考えるということは, 量子ゲージ不変なものだけを考えることを意味しています. そして Im Q で商をとるということは, ゲージ同値な状態を同一視することに対応しています.

とくに状態 $\alpha^{\mu_1}_{m_1} \dots \alpha^{\mu_l}_{m_l} \left|k\right\rangle_{NN} \otimes \left|0\right\rangle_{gh}$ が正定値のノルムを持つとすると,

$$\frac{1}{2} k^\mu k_\mu + (m_1 + \cdots + m_l) - 1 = 0$$

を満たす必要があることが導かれます. このことから粒子が持ちうる質量 $M = -k^\mu k_\mu$ に制限がつくことになります. 振動 (スピン) が小さい粒子を多少あげると,

$$\begin{array}{ll} \left|k\right\rangle, \ M = -2, & \text{タキオン} \\ \alpha_1^\mu \left|k\right\rangle, \ M = 0, & \text{光子} \end{array} \tag{14}$$

があります.

後で重要になる概念として, **弦の場**というものがあります. それは弦を生成したり消滅させたりすることを可能にする「場」であり, 今までは**弦の1体問題**についてしか扱えなかったのに対して, 弦の場の理論は**弦の多体問題**を議論することができようになります. 弦理論を無限個の点粒子を扱う理論だという見方をすることにすれば, 弦の場とは, (今の場合 $\mathbb{R}^D$ 上の) 各点でのファイバーが $\mathcal{H}_{NN}$ となる無限次元ベクトル束の切断である, と思うことができます. 具体的には,

$$\Phi[X^\mu(\sigma)] := \phi(x)\,|0\rangle + A_\mu(x)\alpha_1^\mu\,|0\rangle + \ldots, \quad x \text{ は弦 } X^\mu(\sigma) \text{ の重心座標}$$

という展開で弦の場 $\Phi[X^\mu(\sigma)]$ を定義することが可能です.

これまでの議論からわかる, また数学との関連で最も重要なことは, No Ghost Theorem から

$$Q\Phi[X^\mu(\sigma)] = 0 \tag{15}$$

という, 自由な弦の場の理論の運動方程式が与えられるということです. 相互作用がある場合の弦の場の理論は, 後で数学的な定式化とともに述べることにします.

1.4 D-brane

すべての座標に対して Dirichlet-Dirichlet 境界条件を課した場合について考えましょう. 解の一般型自体は前と同じですが, Dirichlet-Dirichlet 境界条件 $X^\mu|_{\sigma=0} = 0, X^\mu|_{\sigma=\pi} = c^\mu$ になっているために,

$$p_L^\mu = -p_R^\mu, \quad \alpha_m^\mu = -\tilde{\alpha}_m^\mu, \quad m \in \mathbb{Z},$$

が従います. よってとくに

$$X^\mu(\sigma,\tau) = \frac{c^\mu}{\pi}\sigma + \sum_{m\neq 0}\frac{\alpha_m^\mu}{m}e^{-im\tau}\sin(m\sigma)$$

となります. 注意すべきなのは p^μ が現れないことです. このことがどこに影響するかというと, 量子化の際にヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{DD}$ が

$$\mathcal{H}_{DD} = \bigoplus \mathbb{C}\alpha_{m_1}^{\mu_1}\alpha_{m_2}^{\mu_2}\ldots\alpha_{m_l}^{\mu_l}\,|0\rangle_{DD}$$

と表される, つまり α_0^μ がそもそも 0 であるため, 運動量を持った状態が現れないということです.

一見このことは物理的にふさわしくないと思われますが, 実はそうではありません. 逆に弦の端が固定されている面, この場合 $x^\mu = 0$ および $x^\mu = c^\mu$ で表される $\mathbb{R}^D$ の超平面が物理的に非常に興味深い性質をもっていることがわかるのです.

定義 1.1. 必要なら $\mathbb{R}^D$ の適当な座標変換をした後, 開いた弦 $X^\mu(\sigma,\tau)$ が

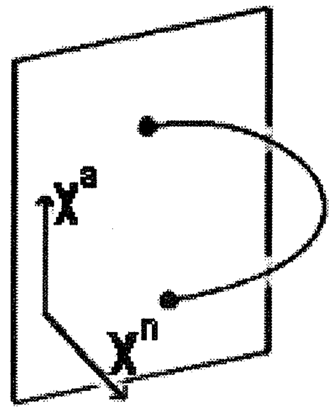

図 2: D-brane

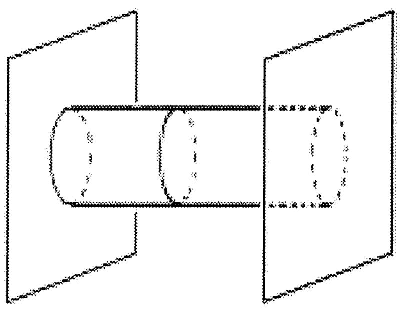

図 3: D-brane は閉弦を生成・消滅します

(i) $X^a(\sigma,\tau)$, $a=0,\dots,p$ に対して Neumann-Neumann 境界条件,
(ii) $X^n(\sigma,\tau)$, $n=p+1,\dots,D-1$ に対して Dirichlet-Dirichlet 境界条件 $X^n|_{\sigma=0,\pi}=0$,

を満たすとき, $\mathbb{R}^D$ の $p+1$ 次元超平面 $\{X^n=0|n=p+1,\dots,D-1\}$ のことを **Dp-brane** と呼ぶ.

たとえば見る角度をを 90 度変えると, いかにも D-brane が弦を生成したり消滅させたりする力学的な対象に見えてきます (図 3). 実際その考え方が正しいことが知られていて, とくに弦理論の非摂動的側面を調べるときに使われます.

数学的にも応用が利く内容を加えておきましょう. N 種類の開いた弦が Dp-brane に端を持っているとします. 以前と同様に, ただし $k^n=0, n=p+1,\dots,D-1$ であることを考慮すると,

$$\begin{aligned}&|k\rangle_{ij},\ k^ak_a=2,\ i,j=1,\dots,N, \quad \text{タキオン}\\&\alpha_1^a|k\rangle_{ij},\ k^ak_a=0,\ a=0,\dots,p,\ i,j=1,\dots,N, \quad \text{ゲージ粒子}\\&\alpha_1^n|k\rangle_{ij},\ k^ak_a=0,\ n=p+1,\dots,D-1,\ i,j=1,\dots,N, \quad \text{スカラー粒子 (質量 0)}\end{aligned} \tag{16}$$

といった粒子が現れることがわかります.

数学的にはゲージ粒子というのは, ベクトル束の接続のことです. また, スカラー粒子はベクトル束が乗っている超平面の変形パラメーターに対応しています. つまり Dp-brane とは, p 次元部分空間の上の階数 N のベクトル束とそれの D 次元空間内での変形パラメーターの組のことです. タキオンの役割, およびより一般的な状況に通用する言い換えがあるのですが, 少し専門的な言葉遣いが必要になるのでここでは省略します.

2 弦の場の理論と幾何学

2.1 弦の相互作用と A_∞-圏

これまでは自由な弦のみ考えてきましたが, 今度は相互作用も含めて考えることにしましょう. n 本の弦が飛んできて 1 本の弦になる, というような相互作用を数学で表現するとどうなるでしょうか. 天下りですが, A_∞-圏と呼ばれる数学的対象を考えましょう.

定義 2.1. A_∞-圏 $\mathcal{A}$ とは次の条件で定まるものからなる.

(i) **対象**と呼ばれるものの類 $Ob(\mathcal{A})$.
(ii) 任意の 2 つの対象 A, B に対して, 整数 $\mathbb{Z}$ で次数付けられた $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ が対応する. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ の元は**射**と呼ばれる.
(iii) **射の合成則**:$A_i \in Ob(\mathcal{A}), i = 1, \ldots, k+1, k \geq 0$ に対して, 次数 $+1$ の $\mathbb{C}$-多重線形写像

$$m_k : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_2, A_3) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_k, A_{k+1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_{k+1}),$$

であって, 任意の $a_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_i, A_{i+1})$ に対して, $\widetilde{a_i} := \deg a_i$ とするとき, 各 $s \geq 0$ に対して

$$\sum_{p+r=s+1} \sum_{q=1}^{p} (-1)^{\widetilde{a_1}+\cdots+\widetilde{a_{q-1}}} m_p(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{q-1} \otimes m_r(a_q \otimes \cdots \otimes a_{q+r-1}) \otimes a_{q+r} \otimes \cdots \otimes a_s) = 0. \quad (17)$$

一見非常にわかりづらい定義ですが, 弦理論の立場から見ると非常に自然です. まず $Ob(\mathcal{A})$ としては, 理論に現れる brane すべてをとることにします. つまり $A \in Ob(\mathcal{A})$ のことを brane だと思います. このように見ると射 $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2)$ というのは, 2 枚の braneA_1, A_2 に端を持った弦の場 a を考えていることにほかなりません (図 4).

合成則(17) は相互作用達の関係式とみなすことができます. まず積 m_s に対して, s 個の弦が集まってきて 1 個の弦となるような, 弦の相互作用を対応させることにします (図 5). とくに m_1 は BRST 電荷 Q に対応しています. これは等角写像で $s+1$ 点つき円板にすることができます (図 6)

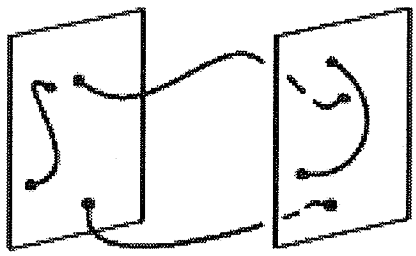

図 4: 2 枚の D-brane の間とその間を飛ぶ弦

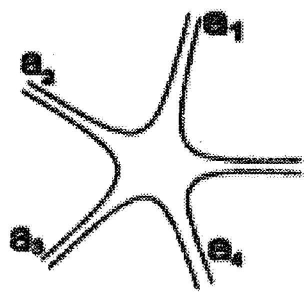

図 5: $m_4(a_1, a_2, a_3, a_4)$ に対応する相互作用

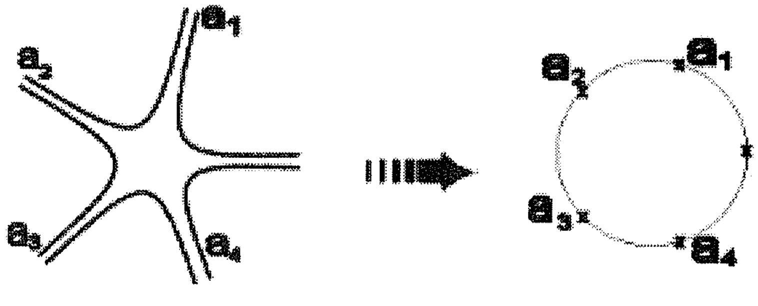

図 6: 共形変換で点付き円板になる

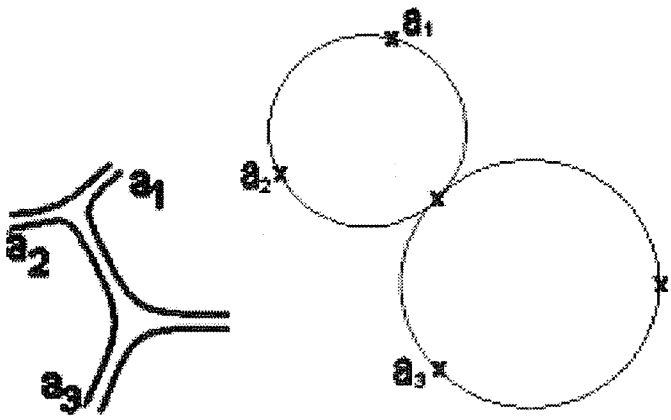

図 7: $s=3, r=2$ のときの極限の例

(Riemann による重要な結果です. 興味のある方は関数論の教科書を参考にしつつ, 具体例を自分で考えてみてください). ここで問題になるのは, $s+1$ 点のうち r 点が一斉に「1つの点に近づく」ときの振る舞いについてです. 極限として (図 7) に対応するものを考えるのが直感的にはよさそうです. 実際, s 点つき円板の**モジュライ空間のコンパクト化**を考える際に, Hausdorf 性の観点から, それがふさわしいものであることがわかります. このことは非常に重要なのですが, 残念ながら省略します. 各極限に対応する相互作用

$$(-1)^{\widetilde{a_1}+\cdots+\widetilde{a_{q-1}}} m_p(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{q-1} \otimes m_r(a_q \otimes \cdots \otimes a_{q+r-1}) \otimes a_{q+r} \otimes \cdots \otimes a_s)$$

の総和が 0 となることが, 合成則(17) の意味しているところです. これは物理的には**交叉対称性**と呼ばれる, 弦理論で最も重要かつ基礎的な対称性の一つです.

注意. 標準的な用語法では, 定義で $m_0(1)=0$ を満たすものを A_∞-圏と呼んでいます. $m_0(1)$ は $m_1^2=0$ に対する**障害** (obstruction) になっているので, この項を消すことが非常に重要となります. 実際, 弦理論においては $m_0(1)$ は tadpole グラフの寄与と呼ばれるもので, 通常 0 であることを要求します.

前に与えた自由な弦の場の方程式(15) との関係を少し議論しましょう. 話を簡単にするためと前に与えた状況を再現するために, $\mathcal{A}$ の対象が 1 つの元 A からなるとします. 与えられた A_∞-構造 m_k を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A)$ の元 α で変形することを考えます. (図 8) のようなもの全体で, 新たな積構造を作ることを考えましょう. 正確には,

$$\widetilde{m}_k(a_1,\ldots,a_k) := \sum_{l\geq k} m_l(e^\alpha \otimes a_1 \otimes e^\alpha \otimes a_2 \otimes e^\alpha \otimes \cdots \otimes e^\alpha \otimes a_k \otimes e^\alpha), \tag{18}$$

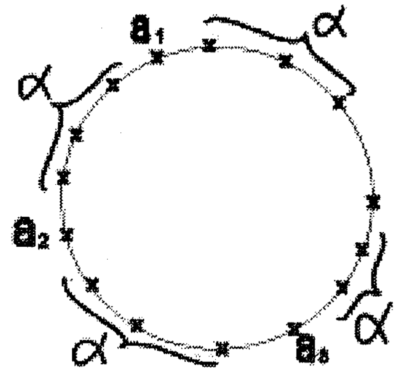

図 8: 変形された積構造 $\widetilde{m}_3(a_1, a_2, a_3)$

で定義されるものを考えます. ここで

$$e^{\alpha} := 1 + \alpha + \alpha \otimes \alpha + \alpha \otimes \alpha \otimes \alpha + \dots$$

として, $m_l(*)$ の $*$ の部分がちょうど l 個の場合以外は 0 とすることにします. 具体的に計算すると, $\widetilde{m}_k$ が A_∞-構造を定めることがわかります.

ここで重要なことは, たとえ $m_0 = 0$ であっても $\widetilde{m_0}$ は一般には 0 ではないということです. つまり,

$$\widetilde{m}_0(1) = \sum_{k \geq 0} m_k(e^{\alpha}) = m_0(1) + m_1(\alpha) + m_2(\alpha \otimes \alpha) + m_3(\alpha \otimes \alpha \otimes \alpha) + \cdots = 0 \qquad (19)$$

は $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$ に対する自明でない方程式を与えます. これが相互作用のある場合の弦の場の方程式です. この方程式(19) は Batalin-Vilkovsky の Master Equation と呼ばれている重要な方程式で, 数学のさまざまな局面に現れています.

とくに前に考えた場合は, 相互作用がなかった $(m_k = 0, k \neq 1)$ ので, 上の方程式は単に $m_1(x) = 0$ を与えます. つまり m_1 と BRST コホモロジー作用素を同一視することで, 方程式(15) が得られます.

2.2 A_∞-圏の幾何学的構成

これから A_∞-圏というものが, これまでの「空間」を自然に拡張したもののように見えるという話をします.

まず, n 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ を導入します.

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} / \sim, \quad (z_0, \dots, z_n) \sim (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n),\ \lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$$

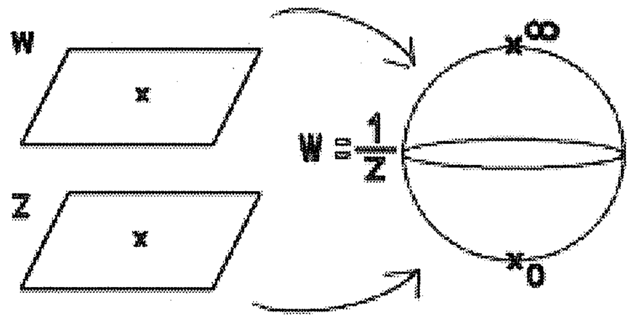

図 9: $\mathbb{P}^1$ は 2 枚の複素平面の張り合わせ

で定義します. ここでは詳しく説明できませんが, $\mathbb{P}^n$ に対して次数つき環 $R := \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ を対応させることができます. ここで次数は $\deg z_i = 1, i = 0, \ldots, n$ です. この次数付けは, $\mathbb{P}^n$ の定義で λ の作用があり, なおかつ各変数に対して 1 乗で作用していることに対応しています. このとき環 R から射影空間を再構成することができます. つまり環 R の斉次素イデアル I(λ 作用で不変なイデアル) であって $I_0 := (z_0, \ldots, z_n)R$ を含まないものを全て考えることで, $\mathbb{P}^n$ は構成されます. とくに点 $[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n$ に対応するイデアルは $x_i z_j - x_j z_i, i, j = 0, \ldots, n$ で生成される素イデアルです.

また, $\mathbb{P}^n$ は $n+1$ 枚の n 次元複素平面 $\mathbb{C}^n$ を張り合わせて作ることができます (図 9). 今は代数的構造を問題にしていますから, $\mathbb{C}^n$ 上の関数としては n 変数の多項式を考えます. つまり $\mathbb{C}^n$ 上の関数環は $\mathbb{C}$ 上の n 変数多項式環であると考えます. この場合も素イデアル達を全て考えることで $\mathbb{C}^n$ を再構成することができます. R から**局所化**という手続きを行うことにより, 張り合わさっている $\mathbb{C}^n$ 達を見ることができます. 局所化についてはここで定義しませんが, ちょうど整数から有理数を作る手続きの一般化のことで, 分母を導入することに対応しています. 今の場合は分母に許すものとして z_i をとります. 具体的にはまず環 $R[1/z_i]$ (一般の斉次元は $(z_0^{a_0} \ldots z_n^{a_n})/z_i^k$ の形) を考えてこれの次数 0 部分だけ取り出すと, 次のものが得られます.

$$R_i := \mathbb{C}\left[\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right], \quad i = 0, \ldots, n.$$

R_i は n 変数多項式環になっていることがわかります. つまり環 R から, $n+1$ 枚の $\mathbb{C}^n$ が得られ, 張り合わせという幾何学的な構造が再現されたわけです.

注意. 空間から関数の環を得るという手続きの逆を考え, 関数の環が先にあって, 各関数が定義される場が空間であると考えるのが, Grothendieck による**スキーム論**の精神です. スキームの言葉を使うと, ここでの説明は非常に明快に述べることができます.

環 R から出発すると次に R-加群を考えるのが自然です. 以後紙面の節約のため, R-加群という

言葉で有限個の斉次元で生成されている次数付き R-加群を意味することにします. ここで次のような対象を考えましょう.

定義 2.2. $M^i, i \in \mathbb{Z}$ を R-加群とします. このとき R-加群の準同型写像 $d^i : M^i \to M^{i+1}, i \in \mathbb{Z}$ で $d^{i+1} \circ d^i = 0$ を満たすとき,

$$\cdots \xrightarrow{d^{i-2}} M^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} M^i \xrightarrow{d^i} M^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

を R-加群の複体と呼び, $(M^\bullet, d)$ と書きます. とくに d のことを**境界作用素**と呼びます.

$$H^i(M^\bullet, d) := \mathrm{Ker}\ d^i \,/\mathrm{Im}\ d^{i-1}\ , \quad i \in \mathbb{Z}$$

のことを複体 $(M^\bullet, d)$ の i 次のコホモロジーと呼びます.

注意. $R(m)$ で R の次数を $-m$ ずらしたもの ($R(m)_d := R_{m+d}$, R_d は R の次数 d 部分) を表すことにし, 以下では M_i たちは全て $\bigoplus_m R(l_m)$ と書かれているとします. これは $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束に対応する R-加群です. また単に複体という言葉で, 有界な複体 ($M_i = 0, |i| >> 0$) を意味することにします. つまり, ベクトル束達のなす有界な複体をこれから調べていきます.

2つの複体 $(M^\bullet, d_M)$ と $(N^\bullet, d_N)$ が与えられたとき,

$$\mathcal{H}om^i(M^\bullet, N^\bullet) := \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(M^k, N^{k+i}), \quad i \in \mathbb{Z},$$

$$(\partial^i f)^k := d_N^{i+k} f^k + (-1)^{i+1} f^{k+1} d_M^k,\ k \in \mathbb{Z}, \quad f = \{f^l\}_{l \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{H}om^i(M^\bullet, N^\bullet)$$

で R-加群の複体 $(\mathcal{H}om^\bullet(M^\bullet, N^\bullet), \partial)$ を定義します.

一方 R-加群 M に対して, $\mathbb{C}$-ベクトル空間の複体を次のようにして構成することができます. M_f を加群 $M \otimes_R R[\frac{1}{f}]$ の次数 0 部分とするとき, $\Gamma^k M$, $k = 0, 1, \ldots, n$ を,

$$\Gamma^k M := \prod_{i_0, \ldots, i_k \in \{0,1,\ldots,n\}} M_{z_{i_0} \cdots z_{i_k}},$$

で定めることにします. このとき $g \in \Gamma^k M$ に対して

$$(\delta^k g)_{i_0, \ldots, i_{k+1}} := \sum_{l=0}^{k+1} (-1)^l g_{i_0, \ldots, i_{l-1}, i_{l+1}, \ldots, i_k}$$

とおくことにより, 複体 $(\Gamma^\bullet M, \delta)$ が定まります.

複体 $(\mathcal{H}om^\bullet(M^\bullet, N^\bullet), \partial)$ に対し, 各 $\mathcal{H}om^i(M^\bullet, N^\bullet), i \in \mathbb{Z}$ に上の議論を適用することで, 2重複体 $(\Gamma^\bullet \mathcal{H}om^\bullet(M^\bullet, N^\bullet), \partial, \delta)$

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "\partial^{j-1}"'] & {} \arrow[d, "\partial^{j-1}"'] & \\
{} \arrow[r, "\delta^{i-1}"] & \Gamma^i \mathcal{H}om^j(M^\bullet, N^\bullet) \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d, "\partial^j"'] & \Gamma^{i+1} \mathcal{H}om^j(M^\bullet, N^\bullet) \arrow[r, "\delta^{i+1}"] \arrow[d, "\partial^j"'] & {} \\
{} \arrow[r, "\delta^{i-1}"] & \Gamma^i \mathcal{H}om^{j+1}(M^\bullet, N^\bullet) \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d, "\partial^{j+1}"'] & \Gamma^{i+1} \mathcal{H}om^{j+1}(M^\bullet, N^\bullet) \arrow[r, "\delta^{i+1}"] \arrow[d, "\partial^{j+1}"'] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd} \tag{20}$$

が定まります. これの全複体 $(\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, N^\bullet), d)$ を

$$\mathrm{Hom}^k(M^\bullet, N^\bullet) := \bigoplus_{k=i+j} \Gamma^i \mathcal{H}om^j(M^\bullet, N^\bullet), \quad d^k = \delta^i + \partial^j$$

とすることで定義することができます. これで準備は整いました.

R-加群の複体 $(M^\bullet, d_M)$, $(N^\bullet, d_N)), \ldots$ を対象とし, $\mathrm{Hom}((M^\bullet, d_M), (N^\bullet, d_N))$ を射の集合とするような圏を考え, これを $D_\infty(\mathbb{P}^n)$ と書くことにします. ただし $\mathbb{Z}$ 次数付けは, $a \in \mathrm{Hom}^i(M^\bullet, N^\bullet)$ の元は次数 $i-1$ を持つということで定義することにします. また, 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の中で斉次多項式たちの共通零点として表される非特異な代数多様体 X に対しても同様の方法で $D_\infty(X)$ を定義することができます.

注意. これまでの記述は, 話を簡単にするために環と加群の言葉で層のコホモロジー理論のある部分を言い直したものです. 次の少々込み入った議論は省略することにしました.

(i) 射影空間の場合には, 連接層と次数付き有限生成加群の間に完全な1対1対応があるわけではないので, 注意すべきところがあります. 実際には, 異なる次数付き有限生成加群から同じ連接層を作る自由度が多少残っているので, それを消す必要があります.
(ii) 連接層の局所自由分解を取ることで, $\mathcal{H}om$ の面倒な議論を省略しました.
(iii) 複体のホモトピー同値の取り扱いを省略しました.

考えたい対象をより正確に述べることにします. $D_\infty(X)$ は X 上の連接層の有界複体 $\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet, \ldots$ を対象とし, $\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)$(チェック複体を考える) を射の集合とするような圏です. 0次コホモロジーをとることで, 通常の X 上の連接層の導来圏 $D(X)$ が得られることがわかります.

このとき次のことが成り立ちます.

定理 2.1. $D_\infty(X)$ は, $m_0(1) = 0$, $m_k = 0, k \geq 3$ であるような A_∞-圏の構造をもつ.

とくに m_1 は複体 $(\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, N^\bullet), d)$ の境界作用素 d で, m_2 は複体の合成に対応します. $D_\infty(X)$ と同じ対象を持つが射の集合がそのコホモロジー $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^i((\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, N^\bullet), d))$ で与えられる圏 $D'_\infty(X)$ も考えることができます. すると

定理 2.2. $D'_\infty(X)$にも, $m_0 = m_1 = 0$であるようなA_∞-圏の構造が入る. さらに$D_\infty(X)$と$D'_\infty(X)$はA_∞-圏として「ホモトピー同値」である.

注意. 上の「ホモトピー同値」ということの定義はここでは述べられません. しかしながら, Xの幾何学的データから複数のA_∞-圏を構成することができるが, それらが本質的に同じものを与える, と理解してください.

これまでは射影空間$\mathbb{P}^n$からA_∞-圏$D_\infty(\mathbb{P}^n)$を構成してきましたが, 逆に$D_\infty(\mathbb{P}^n)$から射影空間を再構成できることが知られています. それは圏の対象からうまく「点」や特別なベクトル束を構成することで行われます. 正確ではありませんが, 結局

$$\text{空間} \Longleftrightarrow \text{関数環} \Longleftrightarrow A_\infty\text{-圏}$$

という図式を得ることになります.

3 おわりに

触れることができませんでしたが, シンプレクティック幾何学の世界では, 深谷圏と呼ばれるA_∞-圏が構成されています (むしろA_∞-圏の概念はそこで導入されました). 沢山の異なる構成法が存在していますが, それらがたまたま「同値」になることがあります. このことを物理では**弦双対性**と呼んでいます. 現在, 数学で活発に研究されている**ミラー対称性**も弦双対性の一つで, まったく異なる2つの空間を結び付けます. A_∞-圏は弦の相互作用を記述しているわけなので, それが「同値」であるということは, たとえ「空間」としてまったく異なったものが実現されたとしても, 物理としては等価であることを意味しています. これは一般相対性原理や多様体における座標の張り合わせの概念, に非常によく似ています. そしてこのことは, 多様体に変わる「新しい空間概念」の存在を示唆している気がします.

A_∞-圏は, 弦がどこかの空間の中を運動している様子の記述というより, その相互作用のみを抽象化したものでした. つまりA_∞-圏から空間を構成するということは, 弦の運動によって空間が存在する, ということを意味します. これは超弦理論の当初の目的, 一般相対性理論と量子論の究極的統一, という観点からすると非常にありがたいことです. つまり通常は空間がどのようなメカニズムで作られたのか説明することができませんが, この方法ではそれができるのです.