数 学 入 門 公 開 講 座

平成１４年８月５日（月）から平成１４年８月８日（木）まで

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1. 自己言及の論理と計算（5時間）

京都大学数理解析研究所・助教授　長谷川 真人

自分自身について述べることの難しさと面白さは、日常誰でも経験することだと思います。

この講座では、数理論理学と計算機科学の密接な関係を示す好例として、自己言及から生じる様々なパラドックスなどの数理論理学における問題、また自分自身を呼び出すような再帰的なプログラムやデータ構造に関する問題などについて、統一的な視点から考察します。

2. 積分の周期について（5時間）

京都大学数理解析研究所・教　授　齋藤　恭司

円周率$\pi=3,141592\cdots$（以下無限に続く）は円周の長さとして、積分

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

で与えられます。πの様に超越的な数が右辺の様に、高々根号の入る積分で表示されるのは非常に面白いと思います。積分を不定積分にすると

$$\sin^{-1}(t)=\int^t\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

三角函数の逆函数（2πはその周期）となります。ガウスは更に、不定積分

$$\int^t\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

を考察して、複素変数の2重の周期函数（楕円函数の特別な場合）を得ました。この講義では積分の周期、又その高次元化等について考えてみたいと思います。

3. トーリックの世界（5時間）

京都大学数理解析研究所・助　手　藤野　修

ユークリッド空間内の有限個のベクトルで張られた凸体を錐と呼びます。錐の集まりである扇が今回のお話の主人公です。扇から自然にトーリック多様体という代数多様体が構成できます。トーリック多様体の視点を導入することにより代数幾何の理論を扇の研究に用いることが出来ます。

一方、森理論は高次元代数幾何学の中心であり、現在も活発に研究されている大変難しい分野です。一般の代数多様体の世界ではまだまだ完成には程遠い状態です。しかしトーリック多様体の世界では森理論は扇の分割という非常に素朴な話になります。

講義では多面体や扇の分割という素朴なお話を題材にし、皆さんを広大なトーリック幾何学の世界の入口まで案内したいです。

時　間　割

日 ＼ 時間	8月5日（月）	6日（火）	7日（水）	8日（木）
10:30～11:45	長谷川	長谷川	長谷川	長谷川
11:45～13:00	休　憩			
13:00～14:15	齋藤恭	齋藤恭	齋藤恭	齋藤恭
14:15～14:45	休　憩			
14:45～16:00	藤野	藤野	藤野	藤野

積分の周期について

京都大学数理解析研究所・教　授　　齋　藤　恭　司

2002, AUGUST 5, 6, 7, 8,　13:00～14:15

原始保型形式

小田忠雄教授の還暦にあたり、尊敬と感謝をもって捧げる.

Primitive Automorphic Forms

齋藤 恭司

●訳：著者

Abstract

円周率 $\pi = 3,141592\cdots$（以下無限に続く）は円周の長さとして、積分

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

で与えられます。π の様に超越的な数が右辺の様に、高々根号の入る積分で表示されるのは非常に面白いと思います。積分を不定積分にすると

$$\sin^{-1}(t) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

三角函数の逆函数 (2π はその周期) となります。ガウスは更に、不定積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

を考察して、複素変数の 2 重の周期函数（楕円函数の特別な場合）を得ました。この講義では積分の周期、又その高次元化等について考えてみたいと思います。

---

*本稿は、シュプリンガー社の企画『数学の最先端　21 世紀への挑戦』vol.1 "Mathematics Unlimited 2001 and Beyond"　編集：B. エンギスト・W. シュミット　日本語版監修：砂田利一 に掲載されたものの一部を、同社の了解を得て再録したものです。

数理物理学と数学，特にその幾何学の領域において，非可換構造や高次のコホモロジーの役割をもっと要求する，目覚ましい相互作用が起きているように見える．そこに登場する鏡像対称と呼ばれる双対性を説明するには，空間概念の革命的拡張が必要となろう．私自身は，その全体像を語る立場にはないが，その 1 つの側である複素幾何学，もっと具体的には消滅サイクル上の積分の周期の研究を通して自らかかわりあった特別な部分に限って書いてみる．もっとも，できていることはなく，問題提起になってしまったが．

大きな数学の問題を攻撃するに当たり，2 通りの方法が考えられる:

1) 元の問題が自然かつ当然に見えてくるような問題の一般化を行い，新しい一般的理論の枠組や言語を発展させること，または
2) 元の問題の特別な，そして意味ある (と思われる) 切り口を深く調べ，それに対し，精密かつ面白い解答を与えること．

この論説で私が採用するのは第 2 の方法の試みである．1 つには，それにより，問題のある側面を理解する理論の原型が与えられることを期待するからであるが，他方，それ自体のもつ面白さにもよる．数学の世界は一般的な理論のみでなく，興味ある個別の存在からも成り立っている (Siegel). 2 つのアプローチは相互に影響しながら 1 つの大きな流れを形成していくのであろう．

第 I 部　原始形式

1．動機

私は，算術的本性と超越的本性が密接に結び合っているような数学的対象にひかれてきた．それらのものに対するある直感的な感覚はあるが，それを何であるか定義するのは難しい．そこで，いくつか典型的な例を見てみよう．

最初の例は超越数 π および e である．あるいは同じ内容であるが，三角函数及び指数函数といってもよい．それらは確かに超越的ではあるが，いろいろな算術的特性，たとえば加法性，をもっている．更なる例としては，楕円

* 当論説は翻訳に当たり，英語版では説明不足であった部分を補い，新たにいくつか問題を書き加えた．年来抱いてきた問題意識を出版する機会を与えてくれた当企画に感謝するものです．

積分とかかわるような函数：即ち，楕円函数 $\wp$ や楕円保型函数 j，保型形式 $E_4, E_6, \Delta, \ldots$ などがある．

これらの例は何百年もの歴史をもつような古典的なものであるが，将来に渡っても新鮮な魅力をもち続けると思う．それどころか，経験からすると，たとえばモンスター群から楕円保型函数に映った月影 (moonshine，ここでは McKay の観察に始まり，Thompson や Conway-Norton が予想し Borcherds が解決するに到ったモンスター群の表現にかかわる一連の数学を指す [Bo]，本文 I.2 定理 2 参照) のように，これらの函数が将来再度新しく美しい数学を生み出すことを期待することもおかしなこととは思えない．

これらの函数の例は，2 次ないし 3 次曲線の弧の長さを表す積分に由来をもつ．このことは代数的な対象を積分をすることにより興味ある超越的対象が得られるのではないか，またそのような道をたどって新しい数学に到達できないかというアイデア又は期待を引き起こす (しかし，ことほど左様に簡単でない．たとえば，なぜ π のベキがゼータ函数の整数値に現れるのか．なぜ 3 次曲線であるところの楕円曲線が月影と関係するのか $\cdots$ 等々．素朴に考えると数えきれぬほどの問いが湧いてくる)．

曲線の弧長の積分の研究の高い種数へのある自然な発展としては，すでに 19 世紀に確立したアーベル積分の理論及びテータ函数によるヤコビの逆問題への解がある．今世紀のホッジ構造の理論はその高次元多様体への発展といえる．実際，現在高次元の (Siegel) 保型形式や混合ホッジ構造などの研究は大きく発展してきているし，数学の中でも重要性を増してきている．にもかかわらず，私は，ある種の当惑感をも抱いてきた．元来知りたかったのは，種数 $g\ (>1)$ の曲線上の積分の周期 ($\fallingdotseq$ ヤコビ多様体) 全体のなす $3g-3$ 次元の周期領域上の函数であったにもかかわらず，Siegel モジュラー函数やテータ零値などの函数はそれよりはるかに大きい $g(g+1)/2$ 次元の種数 g のアーベル多様体全体のなす空間上に定義されている．定義域を制限しなければ周期領域上の函数にならないが，制限した函数は零になってしまうかもしれない．いつ零になるのか決定するのは重要な課題であるが，必ずしもよくわからない．それならいっそのことできることなら，楕円積分のとき成功したように，曲線上の積分の周期全体のなす空間上で直接に (保型) 函数を構成してみたい．自然な問題には自然な解答があるはずであろう (はたして，このよう

な問題意識がどの位，妥当なものであるかいまだ自信がないが).

当論説の第I部では，このような考えにより導かれた楕円積分論の別の一般化である原始形式とその積分の説明をする．

2. 楕円積分

後に説明することの原型として，古典的な Weierstraß形での楕円積分論の復習をしよう．$P(z,\underline{g}) := 4z^3 - g_2z - g_3$ を 2 次元のパラメータ g_2, g_3 をもつ複素変数 z の 3 次多項式とし，$\Delta := 27g_3^2 - g_2^3$ をその判別式とする．このとき，第 1 種及び第 2 種の楕円積分はそれぞれ次式で与えられる．

$$I_1(g_2, g_3) = \oint_\gamma P^{-1/2}dz \quad \text{および} \quad I_2(g_2, g_3) := \oint_\gamma P^{-1/2}zdz \qquad (1.1)$$

積分路 γ は各固定したパラメータ $\underline{g}$ に対し方程式 $F(w,z,\underline{g}) := w^2 - P(z,\underline{g}) = 0$ で $\mathbb{C}^2$ 内に定まる複素曲線 $E_{\underline{g}}$ (楕円曲線と呼ばれ，$\Delta(\underline{g}) \neq 0$ の時穴あき実 2 次元トーラスと同相) に含まれる閉じた道 $\gamma(\underline{g})$ （サイクル，$\underline{g}$ に連続に依存) をとる．積分値はパラメータ $\underline{g}$ の多価正則函数となり，次の全微分方程式を満たすことは積分表示式の形式的な計算でわかる．

$$\begin{bmatrix} dI_1 \\ dI_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12}d\log\Delta & \omega \\ -\frac{1}{12}g_2\omega & \frac{1}{12}d\log\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad (1.2)$$

ここで，係数の $d\log\Delta$ 及び $\omega = \frac{-3g_2dg_3+(9/2)g_3dg_2}{\Delta}$ は $\Delta = 0$ に対数極[1] をもつようなパラメータ空間 $S = \mathbb{C}^2 = \{(g_2, g_3) | g_2, g_3 \in \mathbb{C}\}$ 上の 1-微分形式全体のなす加群の基底となっている．それらと双対基底となる対数的ベクトル場 $E := \frac{1}{3}g_2\frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{1}{2}g_3\frac{\partial}{\partial g_3}$ (オイラーベクトル場) 及び $X := 6g_3\frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{1}{3}g_2^2\frac{\partial}{\partial g_3}$ を用いると，(1.2) より第 2 種積分は第 1 種積分の対数微分で表され

$$I_2 = XI_1. \qquad (1.3)$$

これを用いて (1.2) において I_2 を消去すると，I_1 の満たす 2 階の方程式系

[1] 対数極とは，一変数の微分形式 $d\log x = dx/x$ のある高次元化である ([S2]).

$$\left(X^2 + \frac{1}{12}g_2\right)u = 0, \ \left(E + \frac{1}{12}\right)u = 0 \tag{1.4}$$

が得られる．この方程式系は，ガウス・ルジャンドルのいわゆる超幾何微分方程式と同値なものである (ここでは I_1 を未知函数 u に置き換えた).

方程式系 (1.4) の一次独立な 2 つの解 $\omega_1(\underline{g})$, $\omega_2(\underline{g})$ は 1 次独立なサイクル $\gamma_i(\underline{g})$ $(i=1,2)$ 上の第 1 種積分 $\omega_i(\underline{g}) = \oint_{\gamma_i(\underline{g})} p^{-\frac{1}{2}}dz$ により得られる．$\gamma_i(\underline{g})$ のことを消滅サイクルと呼ぶ．なぜなら，パラメータ $\underline{g}$ を 0 に動かすと曲線 $E_{\underline{g}}$ はカスプ $E_0 = \{w^2 = z^3\}$ に退化し，それに伴ってサイクル $\gamma_i(\underline{g})$ は 1 点につぶれてしまうからである．一次独立な解を並べて得られる写像：
$\underline{g} \in S \backslash D \mapsto (\omega_1(\underline{g}), \omega_2(\underline{g})) \in \tilde{\mathbb{H}} := \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2 \mid Im(\omega_1\bar{\omega}_2 - \omega_2\bar{\omega}_1) > 0\}$
を周期写像と呼ぼう．ここで，$D := \{\underline{g} \in S = \mathbb{C}^2 : \Delta(\underline{g}) = 0\}$ はディスクリミナントと呼ばれる超曲面であり (点 $\underline{g} \in D$ においては $E_{\underline{g},reg}$ は $\mathbb{C}$ または $\mathbb{C}^\times$ に退化してしまう), $\tilde{\mathbb{H}}$ はある非退化楕円曲線のある一次独立な周期の組 (ω_1, ω_2) の全体からなる集合であり，周期領域と呼ばれる．周期写像は局所的双正則写像となることも，ガウス・ルジャンドル方程式より容易にわかる．ここで，周期写像の逆写像を考えることにより，古典的な次の定理 (たとえば [Si, cha.1] を見よ，後半は [Bo] 参照) を得る．

定理 1. 周期写像の逆写像 $\tilde{\mathbb{H}} \to S \backslash D$ は 1 価であり，その座標成分 $\frac{1}{60}g_2$ 及び $\frac{1}{140}g_3$ はそれぞれ次の **Eisenstein** 級数 $E_4 = \sum'_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^4}$ 及び $E_6 = \sum'_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^6}$ で与えられる．判別式への代入 $\Delta(60E_4, 140E_6)$ はカスプ形式と呼ばれる周期領域の有理境界点 $= \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}\}$ で値が零となる保型形式のなすイデアルの生成元を与える．

定理 2. $\omega_1^4 E_4$ 及び $\omega_1^6 E_6$ は $q := \exp(2\pi\sqrt{-1}\omega_2/\omega_1)$ の非負ベキの級数(フーリエ級数) に展開でき，その係数は初等整数論的に記述できる．また，楕円曲線 $E_{\underline{g}}$ の絶対不変量と呼ばれる $j := -1728g_2^3/\Delta$ のフーリエ展開の係数は，モンスター群の既約表現の次元の正整数線型結合である非負整数で与えられる (モンスター群の月影と呼ばれている).

このように，三次多項式という代数的な対象から出発して，楕円モジュラー形式やカスプ形式と呼ばれる超越的なものや，モンスター群の月影という思

いもよらぬものに到達した[2]. 繰り返しになるが, 以上の話の要約を与えよう.

1) 任意の楕円積分 (特に, 第2種積分) は, 第1種積分を微分することにより得られた. このような, 第1種積分の性質を**原始性**と呼ぼう.
2) パラメータ $\underline{g}=(g_2,g_3)$ の次元2は, γ_1 と γ_2 で生成された消滅サイクルのなす加群のランク2と一致した. よって, 周期写像の定義領域であるパラメータ空間 S と値域である周期領域 $\tilde{\mathbb{H}}$ とは同次元となり, 更にそれは局所双正則であった. この性質を**同次元的**と呼ぼう.
3) Eisenstein 級数 E_4 と E_6 は, 周期写像の逆写像の成分を記述する保型形式として周期 $(\omega_1,\omega_2)\in\dot{\tilde{\mathbb{H}}}$ とパラメータ $(g_2,g_3)\in S$ とを結びつけた. 特に, 周期領域の有理境界点とパラメータ空間内のディスクリミナント D とが対応する.
4) このようにして得られた保型形式や保型函数を $q=\exp(2\pi\sqrt{-1}\omega_2/\omega_1)$ でフーリエ展開するとその係数は, 月影という新たな数学的意味をもった.

3. 原始形式とその周期積分

前節で見た楕円曲線のワイエルストラス族 $F(z,w,\underline{g})=0$ を, 本節ではカスプ特異点 $F(z,w,0)=w^2-z^3$ のパラメータ $\underline{g}$ による普遍開折[3] と解釈する. 楕円曲線族に代わって, 特異点とその普遍開折に着目し, 楕円積分の一般化を考えてみる. 説明が煩雑になるのは気にせずに読み進めてほしい.

まず, 出発点として複素 $n+1$ 変数 $\underline{x}$ の多項式 $f(\underline{x})$ であって, その零面 $X_0:=\{\underline{x}\in\mathbb{C}^{n+1}|f(\underline{x})=0\}$ のなす超曲面は原点 $\underline{x}=0$ に孤立した特異点をもつものを考える (以下, その特異点の周辺のみで考察を行う. いちいちそのことを断らない). $F(\underline{x},\underline{g})=f(\underline{x})+g_1\varphi_1(\underline{x})+\cdots+g_\mu\varphi_\mu(\underline{x})$ をパラメータ $\underline{g}=(g_1,\ldots,g_\mu)\in S:=\mathbb{C}^\mu$ によるその普遍開折 [3] とする. 方程式

---

[2] 同様のプロセス (注 5. iii 参照) を二次多項式に適用すると, 逆写像として指数函数を得る.

[3] 元の多項式 $f(\underline{x})$ にパラメータ $\underline{g}$ を係数とする $\underline{x}$ に関して低次の項を加えて "変型" した $F(\underline{x},\underline{g})$ を開折という. 更に, 他の任意の開折 $G(\underline{x},\underline{h})$ に対して写像 $\underline{g}=\varphi(\underline{h})$ があって, $G(\underline{x},\underline{h})=F(\underline{x},\varphi(\underline{h}))$ と (原点 $x=0$ の近傍で) 表せるとき, $F(\underline{x},\underline{g})$ を普遍開折という. 詳しくは [T] 及び II.6 を見よ.

$F(\underline{x}, \underline{g}) = 0$ は各 $\underline{g} \in S$ ごとに複素 n 次元超曲面 $X_{\underline{g}}$ を定める (時には超曲面の族 $\pi : X := \{(\underline{x}, \underline{g}) \in \mathbb{C}^n \times S | F(\underline{x}, \underline{g}) = 0\} \to S$ のことをも X_0 の普遍開折という). f に比して φ_i の次数が低いので位相的には $X_{\bar{g}}$ は無限遠方では X_0 と変わらないが, 有界の領域では X_0 が変形する. つまり, $\underline{g}$ に応じて X_0 の特異点が滑らかになったり, やさしい特異点に分解する. 例えば, ワイエルストラス族でいうと, 元のカスプ特異点 E_0 が, 滑らかな楕円曲線 $E_{\underline{g}}$ や高々二重点しか持たない有理曲線に変形した様なものである.

集合 $D := \{\underline{g} \in S |\ X_{\underline{g}}$ は特異点をもつ $\}$ はディスクリミナントと呼ばれ, $F(\underline{x}, \underline{g})$ の判別式 $\Delta(\underline{g})$ の零面で与えられる. ここで, $\underline{g} \in S \setminus D$ に対する滑らかな曲面 $X_{\underline{g}}$ 内のサイクル ($\in H_n(X_{\underline{g}}, \mathbb{Z})$) でパラメータ $\underline{g}$ を連続的に 0 に特殊化したとき, X_0 の孤立特異点に潰れるものが消滅サイクルである. $X_{\underline{g}}$ に含まれる消滅サイクルの全体 ($H_n(X_{\underline{g}}, \mathbb{Z})$ の部分加群) は点 $\underline{g}$ によらない加群 Q となり, $S \setminus D$ 上の局所系となる. 一方, $X_{\underline{g}}(\underline{g} \in S \setminus D)$ 上の n 次閉微分形式 $\zeta_{\underline{g}}$ に対し, 積分 : $\gamma \in Q \mapsto \int_\gamma \zeta_{\underline{g}} \in \mathbb{C}$ は, Q 上の線型形式を与える. 更に詳しく, ド・ラムの双対定理によると, $X_{\underline{g}}$ 上のある n 次閉微分形式の (適当な同値類の) なす $\mathbb{C}$-ベクトル空間で $Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ の双対空間となるものがあることがわかる. それをひとまず $Q^*_{\mathbb{C},\underline{g}}$ と書こう.

ここで注目すべきことに, 消滅サイクルのなす加群 Q のランクは普遍開折のパラメータ $(\underline{g}) = (g_1, \ldots, g_\mu)$ の次元 μ と等しい ([Mi]). そこで, X 上の n 次微分形式 ζ に対する一見突飛とも見える次のような要請を考えよう.

原始性 : ζ をパラメータ $\underline{g}$ による共変微分したもの ([O-K], 大雑把に言って微分形式 ζ の係数を $\underline{g}$ で微分したもの) $\nabla_{\frac{\partial}{\partial g_i}} \zeta\, (i = 1, \ldots, \mu)$ を曲面 $X_{\underline{g}}$ に制限したものたちは, ド・ラムコホモロジー類群 $Q^*_{\mathbb{C},\underline{g}}$ を張る.

つまり, ζ はド・ラムコホモロジー類群 $Q^*_{\mathbb{C},\underline{g}}$ の "原始母函数" あるいは "ポテンシャル" みたいなものである. はたして, このような虫のよい ζ は存在するのであろうか. 詳しく説明しないが, 実はこの要請は ζ のある意味での "漸近展開" の初項 $\neq 0$ という条件であり, それを満たすものは残りの無限項の自由度をもって存在するのである. 更にこの時, その "漸近展開" のすべての項が互いに直交することを要請する無限個の双線形条件が存在する. **原始形式**とはこの要請を満たす X 上の微分形式のことである ([S2]).

この論説ではその双線形方程式系の詳細に立ち入らないが, 次節以下原始

形式のいくつかの例とそれらのもたらす帰結について述べてみる [4].

まず，このようにして定まった 1 個の原始形式 ζ を n 次元消滅サイクルのなす加群 Q の基底 $\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$ 上の積分した値の組 $(\oint_{\gamma_j(\underline{g})} \zeta)_{j=1,\ldots,\mu}$ により得られる写像を原始周期写像 [5] と呼ぼう．それは $S \setminus D$ から $\mathbb{C}^\mu = \mathrm{Hom}(Q, \mathbb{C})$ の中へ局所的に双正則となる多価写像となる (なぜなら，写像のヤコビ行列 $(\frac{\partial}{\partial g_i} \oint_{\gamma_j(\underline{g})} \zeta)_{ij=1,\ldots,\mu} = (\oint_{\gamma_j(\underline{g})} \nabla_{g_i} \zeta)_{ij=1\cdots\mu}$ は定義より非退化だから)．すなわち，原始周期写像は第 1 種楕円積分のもっていた (1) 原始性や (2) 同次元性を保持している．では，逆写像の大域的記述を求める (3) はどうであろうか．

残念ながら，後出のいくつかの例 (次節及び II 6. 参照) を除いて現在のところ原始形式は原点の近傍に局所的に存在することしか知られていない ([SaM])．そこで，まず少々漠然とした素朴な意味での逆問題を問うことから始める．

■**問題** 適当なよい設定の下に (その意味条件を明らかにすることも含め)

1. よい原始形式の大域的な存在を示し，そのよい表示式を与えよ．
2. 上記の原始形式に対する周期写像に対し，周期領域及び Eisenstein 級数の概念を一般化することにより，逆写像の大域的記述を与えよ．
3. 判別式の平方根 $\sqrt{\Delta}$ は周期領域上の反不変式 (半整数重みの保型形式) の生成元を与えるか？判別式 Δ は適当な意味での (後出) 原始保型形式環の中でカスプ形式全体のなすイデアルの生成元を与えるか？

---

[4] 原始形式の満足すべき双線形方程式系は，相対ド・ラムコホモロジー群上定義される剰余類双線形形式により記述される．その方程式系は，原始形式のパラメータ $\underline{g}$ による共変微分のホッジ分解成分が純次元的であることを要求している ([Mat],[O],[S2],[SaM] 参照)．その帰結として，原始形式の積分の満たすべき全微分方程式や Gauß-Legendre 方程式 (4) の類似を得る．

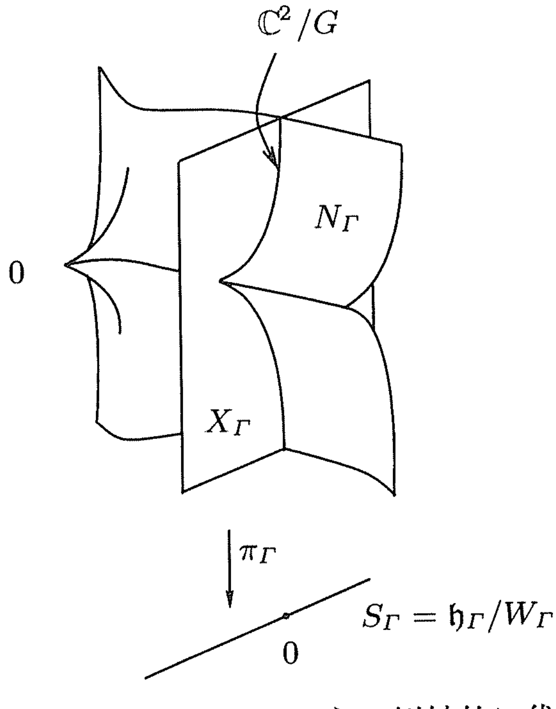
[5] この周期写像の説明は，次の 3 点で不正確である ([S2])．(i) 原始形式全体のなすモジュライの中で有理点と呼ばれる原始形式でないと，その積分は S 上大域的に意味ある周期写像を定義しない，(ii) 消滅サイクルの次元を可想的に 0 次元または 1 次元とする操作 (次の 4 節の後半参照) をしないと“よい”周期写像にならない，(iii) モノドロミー作用により固定される消滅サイクルが存在する場合 (それは，消滅サイクルの加群 Q 上定義された内積 I が退化することと同値) 周期写像は周期積分のみならず一般化されたガウス - ルジャンドル方程式系の 1 次独立な解の系により与えねばならない．更には，(iv) 周期積分を局所的消滅サイクルのみでなく，大域的なサイクル上行った方がよい例 (むしろその方が一般的現象か？) がある：(a) Seiberg-Witten 積分 [Ta2]，(b) 14 個の例外的 1 - モジュラー特異点の周期写像 (本稿 II.9, (ii))．

4. A_l, D_l 及び E_l 型の例

この節では，問題 1 が 2 通りの表示式により解答される例をとり上げる．それは原始形式，半単純リー環及び可積分系の間の密接な関係を示している．

Γ を A_l, D_l または E_l 型のルート系のディンキン図型とし (II7.1 の図，以下ルート系，リー環に関連する事項については [B], [Mats] を参照)，$\mathfrak{g}_\Gamma, \mathfrak{h}_\Gamma$ 及び W_Γ を対応する単純リー環とそのカルタン部分代数及びワイル群とする．$\mathfrak{g}_\Gamma$ の随伴リー群の作用による商写像を $\pi_\Gamma : \mathfrak{g}_\Gamma \to \mathfrak{g}_\Gamma // G_\Gamma \simeq \mathfrak{h}_\Gamma / W_\Gamma =: S_\Gamma$ とする (ここで $\mathfrak{g}_\Gamma // G_\Gamma$ と $\mathfrak{h}_\Gamma / W_\Gamma$ の同一視はシュバレイの定理と呼ばれる [ibd])．写像 π_Γ による原点の逆像 N_Γ は $\mathfrak{g}_\Gamma$ のベキ零元全体のなすベキ零 “多様体” で原点 0 を中心に高次元の有理特異点を大量に含んでいる．随伴商写像 π_Γ は以下のようにベキ零多様体 N_Γ の普遍開折みたいなものである．

McKay 対応 [Mc] として，$SU(2)$ の有限部分群 G の共役同値類に対し，ある A_l, D_l または E_l 型のディンキン図型 Γ を与える対応が知られている．幾何学的には，この対応は次のようにも実現される．G が自然に $\mathbb{C}^2$ 作用しているので商特異点 $\mathbb{C}^2/G$ を考える．するとそれが次の様に，対応する Γ-型のリー環のベキ零多様体 N_Γ の生成的な特異点となる．すなわち，N_Γ と横断的に 2 次元で交わる一般の位置にある $\mathfrak{g}_\Gamma$ のアフィン部分空間 X_Γ を考えると，その交叉 $X_\Gamma \cap N_\Gamma$ は $\mathbb{C}^2/G$ と同型となり (概念図参照)，商写像 π_Γ の制限 $\pi_\Gamma | X_\Gamma : X_\Gamma \to S_\Gamma$ は $\mathbb{C}^2/G$ の普遍開折となる (Brieskorn [Br1])．



これらの $\mathbb{C}^2/G$ の普遍開折に対する原始形式は，以下のように例外的に代数的に求まる．まず，$F(\underline{x}, g)$ を $\mathbb{C}^2/G$ の普遍開折を与える擬斉次多項式とする (II.3, 6 参照)．すると，ポアンカレ剰余形式 $\mathrm{Res}[d\underline{x}/F(\underline{x}, \underline{g})]$(II.6.(i) 参照) は原始形式を定める双線形方程式系を満たすことが次数の条件より容易

にわかり，原始形式となる ([S2]). これを原始形式の第 1 表示と呼ぼう．他方，π_Γ の各ファイバー (≒ 随伴群のオービット) ごとにシンプレクティク構造を与える Kostant-Kirillov 形式と呼ばれる 2 次微分形式がある．それらを $\underline{g}$ について一斉にとった $\mathfrak{g}_\Gamma$ 上の微分形式を ζ とおくと，次数の条件から ζ は原始形式の第 1 表示と一致することがわかる．即ち，Kostant-Kirillov 形式は原始形式となる．これを原始形式の第 2 表示と呼ぼう ([Y1])[6].

以上の例では原始形式は大域的に与えられたのであるから，その周期写像とその逆写像がどうなるか見てみる．これまで説明をしなかったが，以下に述べるように，一般に 1 つの原始形式に対し偶次元と奇次元 2 つの周期写像が定義される．偶次元周期写像はこの例では簡単である．商特異点 $\mathbb{C}^2/G$ の消滅サイクルの加群は Γ で生成されるルート束 $Q(\Gamma)(-1)$ と同一視され ([Br])，周期写像は逆写像 $S = \mathfrak{h}/W \to \mathfrak{h}$ で与えられることもわかる．よって，周期写像の逆写像は商写像 $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}/W$ となり，$\sqrt{\Delta}$ は W-反不変多項式の基底となる．前節の問題 2, 3 に対する解答は有限鏡映群に関する結果より初等的に導ける．更にこの周期写像の記述の一つの帰結としてパラメータ空間 $S = \mathfrak{h}/W$ に新たな構造 (= 平坦構造 = フロベニウス多様体構造) が附加されるのであるが，それは次の 5 節で説明する．

次に，奇次元周期写像を説明する．その研究はシンプレクティク幾何ともかかわり，ずっと難しい．逆問題は一般にはいまだ (ほとんど) 解けていない．

対称二次形式による内積をもつ偶数次元の消滅サイクルのなす加群を反対称二次形式による内積をもつ奇数次元の消滅サイクルのなす加群に変換し，またその逆の変換も行う操作 $*S^0$ (= 0 次元の球面との結) であって $(*S^0)^2 = -1$ となるものがある．普遍開折族 $F(\underline{x}, \underline{g}) = 0$ の消滅サイクルの加群 Q に対し $Q * S^0$ を考えるという事は，新たに 1 つ独立変数 z をつけ加えて得られる 1 次元大きい族 $F(\underline{x}, \underline{g}) + z^2 = 0$ の消滅サイクルを考えることと同じといってもよい．このような操作を “仮想的” に行って消滅サイクルの次元を上げたり下げたりして，最終的に興味あるものとして残るのが，仮想的に 0 次元の

[6] 第 2 表示が原始形式の条件である双線形方程式系を満たすことを直接示すのは，興味ある未解決問題である．この例では原始形式は定数倍を除いて上記表示のものが唯一であり，有理的となっている．ここでは π_Γ のファイバの 2 次のド・ラムコホモロジー群のみを考えた．高次のド・ラムコホモロジーは 2 次から積によって生成されるのであろう．

消滅サイクルを積分して得られる偶次元周期写像 (既述) と仮想的に 1 次元の消滅サイクルを積分して得られる奇次元周期写像なのである [S2].

では，有限ルート系のルート束 $Q(\Gamma)$ に対して定まる仮想的 1 次元消滅サイクルのなす加群 $Q(\Gamma) * S^0$ を与える幾何的な曲線の普遍開折族があるだろうか．実はそのような曲線の族 $F(x, y, \underline{g})$ は簡単に書き下せ (それは特異点 $\mathbb{C}^2/G$ の定義方程式が二次の項をもつことによる) その族に対し，先の例で述べた第 1 表示 $\zeta = \mathrm{Res}[dxdy/F(x, y, \underline{g})]$ が原始形式となることもわかる．したがって，その場合の周期積分 $\oint_\gamma \zeta$ で定義された奇次元周期写像は，古典的なアーベル積分を用いて書ける．たとえば，A_l 型のルート系に対応する奇次元周期写像は普遍開折 $y^2 = x^{l+1} + g_2 x^{l-1} + \cdots + g_{l+1}$ に対し定まる超楕円積分 $\int_\gamma dx/y$ で与えられる．これらの場合について，問題 2 への解答である周期領域の形状や逆写像を与えるべき Eisenstein 級数の一般化などについての一連の予想は与えられている ([S7, §7])．しかし，そのことが確認されているのは次の古典的な場合のみである．

すなわち，ランクが 1 及び 2 のルート系 Γ は，それぞれ，A_1 型及び $A_2, B_2 = C_2$，G_2 型となるが ([B])，それに対する奇次元-普遍開折族 $F_\Gamma(x, y, \underline{g})$ はそれぞれ以下に見るような二次曲線または三次曲線の族となっている．

$$
\begin{aligned}
A_1 : &\quad xy = g_2, \\
A_2 : &\quad y^2 = 4x^3 + g_4 x + g_6, \\
B_2\text{-}C_2 : &\quad y^2 = x^4 + g_2 x^2 + g_4 = 0, \\
G_2 : &\quad x^3 + y^3 + g_1 xy + g_3 = 0.
\end{aligned}
$$

すでに見たように，これらの族に対する周期写像の逆写像 (原始保型形式) は，A_1 型では指数函数 A_2 型では楕円 Eisenstein 級数で与えられる．しかし，B_2 型，G_2 型の場合でさえカスプ形式 Δ が (長短 2 種のルートに応じてそれぞれ) どのようなフーリエ展開をもつのかは興味ある未決着問題である．

5. 更なる構造：平坦構造と無限次元リー環

一般の原始形式に対する原始周期写像の設定に戻ろう．以下に，その逆写

像を大域的に設定するのに役立つと思われる構造を 2 つ説明しよう．

■平坦構造： 原始形式の一般理論によると，普遍開折のパラメータ空間 $S = \{(\underline{g})\}$ には平坦構造と呼ばれるある平坦な計量 J と，あるアフィン線形な座標系が (線形変換の任意性を除いて) 入る ([S2])[7]．よって，周期写像に対する逆写像はその斉次座標成分 (平坦座標と呼ぶ) に分解して書けば，1 つ 1 つの成分は周期領域上の函数としてモノドロミー群に対する "保型形式" になる．これらの成分のことを**原始保型形式**と呼ぼう．それらで生成された S 上の多項式函数環を周期領域に引き戻した函数環が，原始保型形式環である．

本稿では平坦構造の一般論には立ち入らないで，4 節の例に対する平坦計量を対応するコクセタ変換 [B] のみを用いて構成してみる [S7]．

まず，普遍開折のパラメータ空間 S_Γ は商空間 $\mathfrak{h}/W = \mathrm{Spec}(S(\mathfrak{h}^*)^W)$ で与えられていたことを思い出そう．ここで，$S(\mathfrak{h}^*)^W$ は $\mathfrak{h}$ 上 W 不変な多項式函数のなす環の事であり，シェバレイによれば代数的に独立な斉次多項式系 $P_1, \ldots, P_l$ ($\deg(P_1) = 2 < \cdots < \deg(P_l) = h$ とおく) で生成される．すると，判別式 $\Delta = (\prod l_\alpha)^2$ (l_α は W の中の鏡映元の鏡映面を定義とする 1 次式) はその生成系を用いて $\Delta = A_0 P_l^l + A_1 P_l^{l-1} + \cdots + A_l$ と表せる (A_i は，全次数が hi となる $P_1, \ldots, P_{l-1}$ の多項式)．

一方，コクセタ変換 $c \in W$ は W の単純鏡映元の積として定義され位数 h をもつが，その著しい性質として 1 の原始 h 乗根 ω に対する固有ベクトル ξ はいかなる鏡映面にも含まれないこと (ξ は W に関し正規という) が知られている [B][8]．すると，最初の $l-1$ 個の不変式については $\deg P_i < h$ なので，$P_i(\xi) = P_i(c\xi) = P_i(\omega\xi) = \omega^{\deg P_i} P_i(\xi)$ より $P_i(\xi) = 0$ がわかる．一方，ξ の正規性により $\Delta(\xi) \neq 0$ なので，$A_0 \neq 0$ かつ $P_l(\xi) \neq 0$

---

[7] 更に詳しく述べると，原始形式 ζ はパラメータ空間の接区間 $T_{S,\underline{g}}$ と普遍開折族のファイバーのド・ラムコホモロジー類群 $Q^*_{\mathbb{C},\underline{g}}$ との同一視を与える．このことより，接空間は 3 つの構造：(可換) 環構造，リー代数構造，平坦計量をもつ事となり，その結果平坦計量はポテンシャルをもつこととなる．このような構造を平坦構造という [S2]．同様な構造は 2 次元のトポロジカル場の理論にも発見され，フロベニウス多様体構造と呼ばれている [Db],[Ma]

[8] 更に，コクセタ変換の固有値を $\exp(2\pi\sqrt{-1}m_i/h)$ ($i = 1, \ldots, l$) として $0 < m_1 < \cdots < m_l < h$ とおいたとき，$m_1, \ldots, m_l$ をベキ指数 (exponent) というが，$\deg P_i = m_i + 1$ ($i = 1, \ldots, l$) なる関係が成り立つこともよく知られている [B].

が出てくる．すなわち，判別式 Δ は P_l に関して l 次のモニック多項式となる．$\mathfrak{h}$ ($\simeq \mathfrak{h}^*$) 上のキリング形式 $I(x,x)$ は $\mathfrak{h}$ の余接空間の内積とみなすことにより $\mathfrak{h}/W$ の余接ベクトル dP_i ($i = 1,\ldots,l$) の内積 $I(dP_i, dP_j) = \sum_{m,n} \frac{\partial P_i}{\partial x_m}\frac{\partial P_j}{\partial x_n} I(x_m, x_n)$ を引き起こす．この内積はディスクリミナントに沿って退化することは $\det(I(dP_i, dP_j))_{ij=1}^{l} = \Delta$ となることよりわかる．そこで，微分 $D := \frac{\partial}{\partial P_l}$(これは，定数倍を除いて一意的に定まる，**原始ベクトル場**と呼ぶ) を用いて $\mathfrak{h}/W$ 上の余接ベクトル間に新たな内積

$$J(dP_i, dP_j) := DI(dP_i, dP_j) \tag{1.5}$$

を定義する．これが求める平坦計量である．すなわち，

i) $\det(J(dP_i, dP_j))_{ij=1}^{l} = A_0 \neq 0$ がわかり，したがって J は非退化，

ii) J は $P_1,\ldots,P_l$ のとり方によらず $\mathfrak{h}/W$ の余接空間の計量として定まる，

iii) J は $\mathfrak{h}/W$ の余接バンドル上の平坦計量である[9].

特に，以上の結果 $\mathfrak{h}/W$ のある座標 $Q_1,\ldots,Q_l$ が存在して，$J(dQ_i, dQ_j)$ は定数となることがわかる．このような座標系のことを**平坦座標系**と呼ぼう．

たとえば，楕円曲線のワイエルストラス族 $F(z,w,\underline{g})$ の座標系 $\underline{g} = (g_2, g_3)$ は A_2 型ルート系の平坦座標系であり，したがって，A_2 型の原始保型形式は Eisenstein 級数 E_4 と E_6 ということになる．(ほかにも，Painleve VI 型方程式のパラメータには H_3 型の平坦構造が入ることも知られている [Db]．)

■無限次元リー環：商特異点 $\mathbb{C}^2/G$ に対し，リー環 $\mathfrak{g}_\Gamma$ を対応させた McKay 対応のように，一般の特異点に対しその普遍開折や原始形式の大域的記述を与えるようなリー環を見つけたい．この計画は，特別な場合については現在進行中である ([S3], [S-T], [S-Y], [S VI], [Sl 1,2], [H-S]).

ここでは，ルート系の概念を一般化するアプローチを解説する．ルート系(歴史的には有限またはアフィンの場合) は元々リー環やリー群，更にはワイル群等の情報がコードされている組合わせ的な対象物である [B]．まず我々

[9] (iii) はキリング形式 I に対するレヴィ・チビタ接続 ∇ が可積分であるということから，J に対するレヴィ・チビタ接続も平坦となることより導かれる [S7]．脚注 5 における同一視により，この ∇ 及び I とガウス・マニン接続及び消滅サイクルの加群上の交叉二次形式と同一視される．その際，計量 J は普遍開折族に対するド・ラムコホモロジー群上定義された剰余内積と同一視される．それらはまた，トポロジカルな場の理論における湯川内積に対応する．

の幾何的目的にかなうようにルート系の公理系を一般化しよう.

対称な双線形形式 I(それをキリング形式と呼ぼう) をもつ実ベクトル空間 F の部分集合 R がルート系であるとは, 次の 5 公理を満たすこととする.

0) 任意の $\alpha \in R$ に対し, $I(\alpha, \alpha) > 0$,

1) R で生成される F の部分加群 $Q(R)$ は, F 内の最大ランクの束となる,

2) 任意の $\alpha, \beta \in R$ に対し, $2I(\alpha, \beta)/I(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$,

3) 任意の $\alpha \in R$ に対し, $w_\alpha(u) := u - I(u, \alpha^\vee)\alpha$ で定まる鏡映変換 w_α は集合 R を保存する,

4) R は互いに直交する部分集合の合併に分解しない (R の既約性).

この公理系は古典的な Killing, Cartan の場合を含んでいる. すなわち, R が有限ルート系となる必要十分条件は二次形式 I が正定値となることである.

さて, 偶数次元の孤立特異点に対し, その普遍開折の超曲面 $X_{\underline{g}}$ の中の原始的消滅サイクル[10] のなす集合 R は, $Q \otimes \mathbb{R}$ とその交叉二次形式 I に関して上記ルート系の公理系を満たす. よって, $\{$ 孤立特異点 $\} \to \{$ ルート系 $\}$ なる対応が定まる. すでに見た McKay 対応はこの特別な場合とも思える. なぜなら特異点 $\mathbb{C}^2/G$ に対応して定まったダイアグラム Γ は有限ルート系 R_Γ の単純基底 ([B]) を与えており, R_Γ は容易に Γ により復元できる. しかし更に重要なことは基底 $\alpha \in \Gamma$ に対する鏡像 w_α の積としてコクセタ変換 c が定まる. すなわち, McKay 対応は上に述べた対応より強く, 特異点に対しある種の基底付きルート系を対応させており, その基底よりコクセタ変換と平坦構造が定まるのである.

実は, 一般の特異点に対応して定まるルート系もこの単純基底によく似た素性の基底 (strongly distinguished basis) をもつ (Brieskorn[Br2, Appendix], Ebeling[E1]) ことが知られている. しかし, 現在の所, それ等の基底の理論的解明にはほど遠い. このことは, 次に述べる第 2 の逆問題[11]を惹起する.

---

[10] ここで, 原始的消滅サイクルとは, 超曲面 $X_{\underline{g}}$ の n 次元ホモロジー群の原始的元 (すなわち, 他のサイクルの倍元とならないもの) であって, $\underline{g}$ を連続的にディスクリミナント D の生成点に動かしたとき潰れてしまうような元のこと ([Br2, Appendix] を見よ) である. ($\underline{g}$ を連続的に原点まで動かすと潰れてしまうような元のことを消滅サイクルと呼んだことを思い出せ).

[11] 原始形式の代数幾何的表示及び群論的表示をそれぞれ第 1 表示及び第 2 表示と呼んだように, 逆問題も第 1 及び第 2 と呼んでみた.

■問題 特異点などの幾何を離れ，抽象的にルート系に対し次のことを問う．

4. 次に述べる性質 (a), (b) をもつ R の部分集合 Γ からなる $Q(R)$ の基底を単純基底と呼ぶことにする．単純基底つきのルート系を分類せよ[12]．特異点の消滅サイクルに由来する単純基底つきルート系を特徴づけよ．
   a) $\alpha \in \Gamma$ に対応する鏡映変換 w_α の適当な順番の積 $c := \prod_{\alpha\in\Gamma} w_\alpha$,（一般コクセタ元と呼ぶことにする）は，有限位数 h である．
   b) 1 の原始 h 乗根に対応する c の固有ベクトル ξ は，W に関し正規である（すなわち，ξ は W のどの鏡映面に含まれない）．
5. 任意の単純基底付のルート系に対し，以下の (i), (ii) 及び (iii) を構成せよ．
   i) R の鏡映で生成された Weyl 群 $W(R)$（一般には無限群）に対し，正則函数による $W(R)$ - 不変式の理論及び商空間 $\tilde{B}\mathfrak{h}/W_R$ 上の平坦構造．
   ii) リー環 $\mathfrak{g}(R)$（一般に無限次元）及びその上への随伴リー群 $G(R)$ の作用及び随伴商写像 $\tilde{B}\mathfrak{g}(R) \to \tilde{B}\mathfrak{h}/W(R)$.[13]
   iii) 随伴商写像に対する Kostant-Kirillov 形式 ζ.
6. 上記の Kostant-Kirillov 形式 ζ（または，その単元倍か？ II.6 の注参照）が原始形式となることを示し，その積分により定まる偶及び奇次元の原始周期写像と，その逆写像成分である原始保型形式の記述を与えよ．

6. 双対な対象は何か？

指数函数や楕円函数が二次曲線や三次曲線の特異点への退化を記述したよ

---

12 もしある一般化されたルート系のここの意味でのコセクタ変換が条件 (a) を弱めて準べキ単（特に，有限位数）であるならば，そのキリング形式 I のヴィットト指数 $(= \mu_0 + \mu_-)$ は偶数でなければならない．このことより，アフィン・ルート系やハイパボリック・ルート系は除外される (II.7 及び 8 参照)．条件 (b) は，I が退化のときは 1 に対する固有ベクトルにする必要がある (II.9 参照)．特異点に由来するルート系の基底については，エベリングの仕事を見よ ([E1])．

13 ここで $\tilde{B}$ は周期領域を定めるための未定義の操作である．特別な場合については，II.9 を参照せよ．楕円特異点については問題 4,5.(i) は楕円ルート系とその不変式論 [S3], [Sat1,2] で解けている．リー環 $\mathfrak{g}(R)$ は頂点作用素を用いて構成できる [S-Y]．しかし，$\mathfrak{g}(R)$ に対する随伴商写像及び原始形式の構成は楕円リー環の場合も含めて今後の研究を待たねばならない．

うに，私には，一般に原始保型形式は空間の何らかの退化を記述する算術的ないし超越的手段のように見える．鏡像対称性の立場から見れば，これはことの一面である複素幾何側しか見ていない．では，原始保型形式は双対モデル側すなわちグロモフ - ウィッテン不変量などのケーラー幾何学側の何を現しているのであろうか．これは楕円積分の場合，すなわち A_2 型の場合でさえ今のところ答えがない (月影もこの件にかかわっているだろうか)．というのは，双対モデルの仮想的次元が分数となってしまい相手が存在しない．現在我々のもっている空間概念はそのような双対性を許すにはせまいのである．

原始保型形式のフーリエ展開とその係数の意味づけも興味ある．元々，原始保型形式は周期写像に対する逆写像の平坦座標成分という複素幾何的意味から出発したものであるが，それを越えて，フーリエ係数に新たな数学的意味づけが可能になるなら，非常に魅力的な研究テーマである [14]．

そもそも指数函数が A_1 型の原始保型形式であったこと及びディスクリミナント D の一般的点 $\underline{g}$ に対応する $X_{\underline{g}}$ は A_1 型の部分ルート系の退化を起こしていることを思い起こせば，フーリエ展開は A_1 型の展開の理論と呼べる．それならば一般に，**与えられた原始保型形式を，ディスクリミナントのもっと退化した境界成分に対し定まる部分ルート系に対応する原始保型形式で展開することが考えられる．** A_1 型ルート系の階数は 1 であるが，次に，階数 2 となる正定値ルート系は $A_2, B_2\text{-}C_2, G_2$ 型のみである．対応する原始保型形式は楕円モジュラー形式で与えられていた (I.4 参照)．また，ディスクリミナントの生成的特異点では $X_{\underline{g}}$ は $A_2, B_2 = C_2$ 又は G_2-型の退化を起こしている．そこで，双対性の 1 つの現れとして次のことを問おう．

■問題

7. 任意の原始保型形式を，$A_2, B_2 = C_2$ または G_2 型の原始保型形式で展開せよ．その展開 (係数) の新たな数学的意味づけを求めよ．

ここでいう，数学的意味づけは現時点ではあまりに茫漠としていてどのような予想を立てるのが適切か想像することもできない．双対モデル側の理解

---

[14] 楕円型平坦不変式の特別な場合について，ヤコビ形式を用いてその具体形が求められている (Satake [Sat 1, 2])．フーリエ係数は非負整数となるが，その意味づけははっきりしない．

には，最初に述べたように，テンソル積とその逆算等を許すような新たな空間概念を必要とするのであろう．それには21世紀の数学の発展を待とう．

参考文献

[Ao] Aoki, Hiroki: Automorphic forms on the expanded symmetric domain of type IV. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **35** (1999) 263–283

[Ar] Arnol'd, Vladimir I.: Critical Points of Smooth Functions. Proc. Internat. Congress Math., Vancouver, 1974, pp. 19

[Bo] Borcherds, Richard: Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbb{R})$ and infinite products. Inventiones Math. **120** (1995) 161–213

[B] Bourbaki, N.: Éléments de mathématique, Fasc. XXXIV, Groupes et algèbres de Lie, Chs. 4–6. Hermann, Paris 1968

[Br1] Brieskorn, Egbert: Singular elements of semi-simple algebraic groups. Proc. Internat. Congress Math. (Nice 1970), vol. 2, 1971, pp. 279–284

[Br2] Brieskorn, Egbert: Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen. Manuscripta Math. **2** 1970 103–161

[Db] Dobrovin, Boris: Geometry of 2D-Topological Field Theory. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1620. (1996), pp. 120–348

[Dl1] Dolgachev, Igor V., Quotient-conical singularities on complex surfaces, Funkcional Anal. i Priložen., Translated in Funct. Anal. Appl., **8** (1974), 160-161.

[Dl2] —, Automorphic forms and quasihomogeneous singularities, Funkcional Anal. i Priložen., **9** (2) (1975), 67-68. Translated in Funct. Anal. Appl., **9** (1975), 149-151.

[Dl3] Dolgachev, Igor: On the link space of a Gorenstein quasihomogeneous surface singularity. Math. Ann. **265** (1983) 529–540

[Dl4] Dolgachev, Igor: Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces. J. Math. Sci. **81** (1986) 2599–2630

[E1] Ebeling, Wolfgang: Quadratische Formen und Monodromiegruppen von Singularitäten. Math. Ann. **255** (1981) 463–498

[E2] Ebeling, Wolfgang: The Poincaré series of a quasihomogeneous surface singularity. Preprint (2000)

[F] Frenkel, Igor B.: Representations of Kac-Moody Algebras and Dual Resonance Models. Lect. Appl. Math. **21** (1985) 325–353

[GSpV] Gonzalez-Springberg and J.-L. Verdier: Construction géométrique de la correspondance de McKay. Ann. Sci. École Norm. Sup. **16** (4) (1983) 409–449

[H-S] Helmke, Stefan and Slodowy, Peter: On Unstable Principal Bundles over Elliptic Curves. Preprint (April 2000)

[Kr] Kronheimer, Peter: The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients. J. Diff. Geom. **29** (1989) 665–683

[L1] Looijenga, Eduard: Root systems and Elliptic Curves. Invent. Math. **38** (1976) 17–32

[L2] Looijenga, Eduard: The Smoothing Components of a Triangle Singularity. I. Proc. of Symposia in Pure Math. **40-2** (1983) 173–183; II. Math. Ann. **269** (1984) 357–387

[Ma] Manin, Yuri: Three constructions of Frobenius manifolds: a comparative study. Asian J. Math.

[Mat] Matsuo, Atsushi: Summary of the Theory of Primitive Forms. In: Topological Field Theory, Primitive Forms and Related Topics, Birkhäuser, Progress in Mathematics, **160** (1998), 337-363

[Mats] Matsuzawa, Jun-ichi: 特異点とルート系： 朝倉書店, 2002.

[Mc] McKay, John: Affine diagrams and character tables. Santa Cruz, 1979

[Mg] Magnus, Wilhelm: Noneuclidean Tesselations and their Groups, Academic Press, NewYork and London, 1974

[Mi] Milnor John: Singular points of complex hypersurfaces. Ann. Math. St. **61**, Princeton, N. J. 1968

[Mu1] Mumford, David: Tata Lectures on Theta II (Jacobian theta functions and Differential equations). Birkhäuser, 1984

[Mu2] Mumford, David: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ.Math.IHES,9(1961)

[O] Oda, Tadao: K. Saito's period map for holomorphic functions with isolated singularities. *Algebraic Geometry, Sendai 1985*. Advanced Studies in Pure Math. **10** (1987) 591–648

[O-K] Oda, Tadao and Katz, Nicholas: On the differentiation of De Rham cohomology classes with respect to parameters, *J. Math. Kyoto Univ.*, 8, 2 (1968), pp. 199-213

[S1] Saito, Kyoji: Einfach Elliptische Singularitäten. Invent. Math. **23** (1974) 289–325

[S2] Saito, Kyoji: Period Mapping Associated to a Primitive form. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983) 1231–1264

[S3] Saito, Kyoji: Extended affine root systems I (Coxeter transformations). Publ. RIMS, Kyoto Univ. **21** (1985) 75–179; II (Flat Invariants). Publ. RIMS, Kyoto Univ. **26** (1991) 75–179; V (Elliptic L-function). Centre de Recherches Mathematiques, CRM Proceedings and Lecture Notes, **30** (2001), 185-222

VI(Integral highest weight modules) in preparation, and VII (Elliptic groups) in preparation

[S4] Saito, Kyoji: Regular systems of weights and associated singularities, Complex Analytic Singularites. Adv. Stud. Pure Math. **8** (1988) 470–526

[S5] Saito, Kyoji: Around the Theory of the Generalized Weight System: Relations with Singularity Theory, the Generalized Weyl Group and Its Invariant Theory, Etc. Amer. Math. Soc. Transl. (2) **183** (1998) 101–143

[S6] Saito, Kyoji: Duality for Regular Systems of Weights. Asian J. Math. **2**, no. 4 (1998) 983–1048

[S7] Saito, Kyoji: Finite Reflection Groups and related Geometry. Lecture Note, RIMS (2000)

[S8] Saito, Kyoji: Algebraic Surfaces for Regular Systems of Weights. Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of Masayoshi NAGATA, pp. 517-614 (1987)

[SaM] Saito, Morihiko: On the structure of Brieskorn lattices. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **39** (1989) 27–72

[Sat1] Satake, Ikuo: Automorphism of the Extended Affine Root System and Modular Property for the Flat Theta Invariants. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **31** (1995) 1–32

[Sat2] Satake, Ikuo: Flat Structure for the simple Elliptic Singularities of type $\tilde{E}_6$. Proceedings of 37th Taniguchi Symposium, Birkhäuser, 1998

[Si] Siegel, Carl Ludwig: Topics in Complex Function Theory, Vols. I, II and III. Wiley, 1969

[Sl1] Slodowy, Peter: Singularitaeten, Kac-Moody-Lie algebren, assozierte Gruppen und Verallgemeinerungen. Habilitationsschrift 1984

[Sl2] Slodowy, Peter: Beyond Kac-Moody algebras and inside. Can. Math. Soc. Proc. **5** (1986) 361–371

[S-T] Saito, Kyoji and Takebayashi, Tadayoshi: Extended affine root systems III (Elliptic Weyl Groups). Publ. RIMS, Kyoto Univ. **33** (1997) 301–329

[S-Y] Saito, Kyoji and Yoshii, Daigo: Extended affine root systems IV (Elliptic Lie Algebras). Publ. RIMS Kyoto Univ. **36** (2000)

[Ta1] Takahashi, Atsushi: K. Saito's Duality for Regular Weight Systems and Duality for Orbifoldized Poincaré Polynomials. Commun. Math. Phys. **205** (1999) 571–586

[Ta2] Takahashi, Atsushi: Seiberg-Witten Differential as a Primitive Form. Progress of Theoretical Physics Supplement **135** (1999) 109–117

[T] Thom, René: Stabilité structurelle et morphogénèse. Bejamin, Reading, Mass.

[Y1] Yamada, Hiroshi: Lie group theoretic construction of period mappings. Math. Z. **220** (1995) 231–255

[Y2] Yamada, Hiroshi: Elliptic Root Systems and Elliptic Artin Group. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **36** (2000)