

# 複素解析と平面図形たち

京都大学数理解析研究所・助手 山ノ井 克 俊

2003, AUGUST 4, 5, 6, 7, 14:45~16:00

# 複素解析と平面図形たち

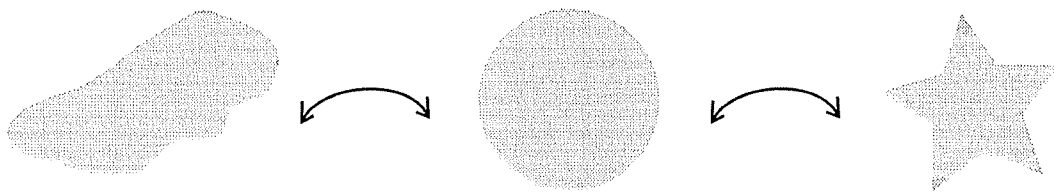
山ノ井 克俊

## 1 はじめに

### 1.1 この講座の粗筋

細かい定義は本論に譲るとして、まず大まかにこの講座の内容を紹介しよう。主題は複素数を変数とする関数の微分積分学だ。実数を変数とする関数の微分積分学と何処が違うのだろうか？ この講座の視点からだと、ずっと幾何学的になる、と答えられるかもしれない。

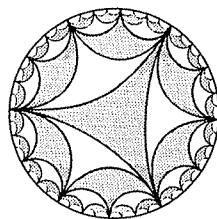
複素数から複素数への関数で、連続微分可能なものを正則関数とよぶ。よく知られているように複素数は複素平面という二次元の平面上の点として幾何学的に表示される。従って、正則関数は複素平面から複素平面への写像とみなすことも出来る。このようにみたとき、幾何学的な意味合いを込めて正則関数を正則写像と言おう。複素平面上に描いた図形たちが正則写像でうつりあうとき、それらを正則同値な図形とよぶ。自然な問題はどのような図形たちが正則同値か？ というものだ。



我々の最初の目標はこの問題に対して有名であり、古典的でもあり、そして今日でも重要な定理であるリーマンの写像定理を論じることだ。この定理の内容を大まかに言うと、穴の空いていない図形たちは正則同値である、というものだ。絵を書いてみると一見あたりまえのような定理であるけれど、そのような(絵を書くという)単純な議論は通用しない、ということ穴が一つだけ空いている図形を通して紹介したい。次にリーマンの写像定理の一つの応用として、ピカールの定理をみる。この定理は複素平面上の正則関数は、定数関数でない限り、高々一つの値を除いてすべての値を取る、というものだ。これは実数関数の世界ではおこらない、複素数関数固有の性質である。さらに時間が許せば、いくつかの発展的な話題にも触れたいと思う。

## 1.2 非ユークリッド幾何学から見ると

以上のような現象の背景を考えていくと、円板上のポアンカレ計量から決まる一つの非ユークリッド幾何学が大切になってくる。よく知られているようにこの幾何学は普通のユークリッド幾何学の平行線公理を変更して現れるモデルだ。つまり、与えられた直線と平行で、与えられた点を通るものが無数にある、という不思議な世界だ。そのような世界では三角形の内角の和は  $180$  度より真に小さくなってしまふ。実際、内角の和が  $0$  度という、おかしな正三角形を一つのタイルとして、非ユークリッド平面をタイル貼りしてしまふことが出来る。



上記、ピカールの定理はこの不思議な現象の帰結として説明できる。つまり、標語的に言うと、複素平面というユークリッド幾何学の世界とポアンカレ円板という非ユークリッド幾何学の世界の対比からピカールの定理が従うのである。リーマンの写像定理の証明で大切な役割をはたす、シュワルツの補題も実はポアンカレ計量と深い関係がある。

## 2 関数論入門：正則関数の局所的な振舞い

### 2.1 複素数

複素数について復習しよう。実数全体の集合を  $\mathbb{R}$  で表すと複素数全体の集合  $\mathbb{C}$  は

$$\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1}; a, b \in \mathbb{R}\}$$

と書ける。ここで  $\sqrt{-1}$  は虚数単位と呼ばれる数で、形式的な記号だと思ってもいい。複素数全体には

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1\sqrt{-1}) + (a_2 + b_2\sqrt{-1}) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{-1} \\ (a_1 + b_1\sqrt{-1}) \times (a_2 + b_2\sqrt{-1}) &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{-1} \end{aligned}$$

等で和、差、積、商が実数のように定義出来る。つまり、虚数単位は  $(\sqrt{-1}) \times (\sqrt{-1}) = -1$  となる“仮想”の数だ。各実数は実数直線という直線の点と 1 対 1 に対応していた。同じように複素数というのは複素平面という平面の点と 1 対 1 に対応する (図 1)。すなわち、複素数  $z = a + b\sqrt{-1}$  には座標が  $(a, b)$  となる平面上の点を対応させる。 $z$  の絶対値を  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  で定義する。これは原点と  $z$  を結ぶ線分の長さだ。また  $z$  の偏角  $\arg z = \theta$  を図 2 のように定義する。偏角は  $2\pi$  の整数倍を除いてしか決まらないことに注意しよう。この不定性が嫌なときは  $0 \leq \theta < 2\pi$  のような条件をつける。 $z$  を  $r$  と  $\theta$  で表すことを極座標表示という。

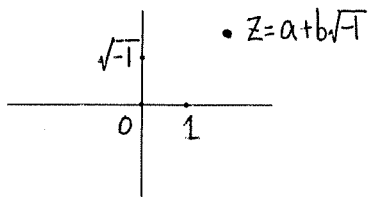


図 1: 複素平面

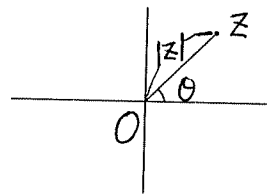


図 2: 極座標表示

二つの複素数  $z_1, z_2$  の和はベクトル (矢印)  $\vec{0z_1}, \vec{0z_2}$  たちの和として表せる (図 3)。また積  $z_1 z_2$  は絶対値  $|z_1 z_2|$  が  $|z_1| |z_2|$  となり、偏角  $\arg z_1 z_2$  が  $\arg z_1 + \arg z_2$  となる数として定まる (図 4)。

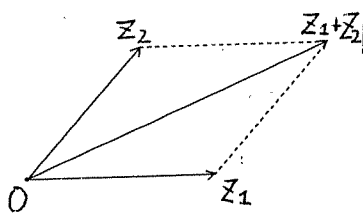


図 3: 和

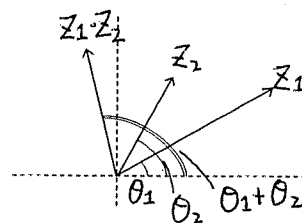


図 4: 積

## 2.2 微分


まず、復習から入ろう。実数直線  $\mathbb{R}$  上の開区間  $I$  を考える。関数  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  が  $I$  の点  $a$  で微分可能であるとは、次の極限が有限な値に収束することだ。

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$I$  のすべての点  $a$  で微分可能なときに、 $f$  は  $I$  で微分可能という。この講義では、 $I$  で微分可能な関数  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  を実微分可能関数と呼ぼう。微分係数  $f'(a)$  の幾何学的な意味は点  $a$  での接線の傾きだ。つまり  $y = f(x)$  は点  $a$  の非常に近くでは、一次式  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$  で非常によく近似されている (図 5、6)。

## 2.3 領域とは?

実微分可能関数の「複素数版」を考えるために、まず実数直線の開区間  $I$  に相当するものを複素平面で考えよう。それが領域だ。一番単純な領域は点  $a \in \mathbb{C}$  を中心とする半径  $r$  の円板の内部

$$\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| < r\} =$$


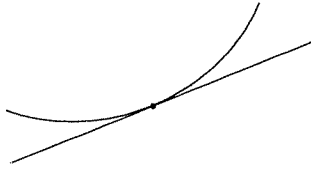


図 5: 微分は接線を与える

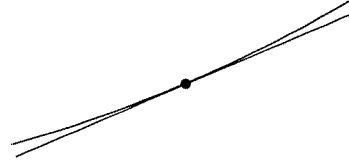


図 6: 拡大すると

だ。  $a = 0$  の場合には簡単に  $\Delta(r) = \Delta(0, r)$  と書くことにする。さらに  $r = 1$  のときには  $\Delta = \Delta(1)$  と省略する。  $\Delta$  のことを原点を中心とする単位円板、あるいは単に単位円板といおう。一般の領域を説明するために、複素平面  $\mathbb{C}$  の部分集合  $\Omega$  を考える。例えば、いくつかの曲線で囲まれた図形をイメージしよう。  $\Omega$  が開集合であるとは、どんな点  $a \in \Omega$  に対しても十分小さい半径  $\epsilon$  を取れば円板  $\Delta(a, \epsilon)$  が  $\Omega$  に含まれることを言う。直観的には  $\Omega$  を囲む曲線が  $\Omega$  に含まれないような集合だ。

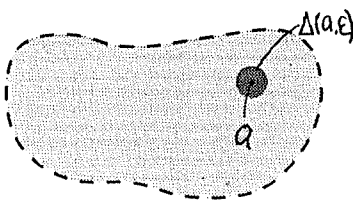


図 7: 開集合の例

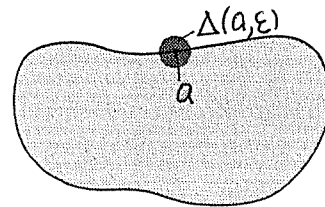


図 8: 開集合でない例

また  $\Omega$  が連結であるとは、任意の  $\Omega$  の二点  $a, b$  を  $\Omega$  内の道で結べるような集合を言う。

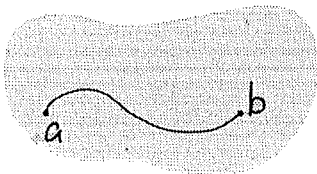


図 9: 連結集合の例

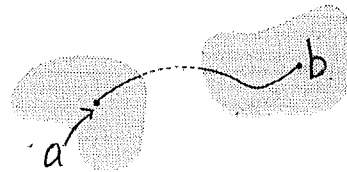


図 10: 連結集合でない例

そして、連結な開集合を領域と呼ぶことにする。

## 2.4 正則関数

複素平面上的の領域  $\Omega$  を考える。関数  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  が  $\Omega$  の点  $a$  で微分可能であるとは、次の極限が有限な値に収束することとする。

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

ここで、引き算や割算は複素数でのものだ。極限は実数の場合と同じく  $z$  を  $a$  に十分近付ければ、 $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$  が有限な複素数値  $f'(a)$  にいくらかでも近付く、という意味である。しかしこの場合、実数の場合と違い、いろいろな方向から  $z$  を  $a$  に近付ける必要がある。

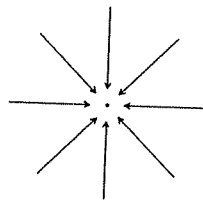


図 11: いろいろな方向から近付く

$\Omega$  のすべての点  $a$  で微分可能なときに、 $f$  は  $\Omega$  で正則と言う。例えば多項式関数はすべて正則関数だ。正則関数  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は、点  $a \in \Omega$  の非常に近くでは一次関数  $w = f'(a)(z - a) + f(a)$  で非常によく近似される。

## 2.5 一次関数 $w = \alpha z$ ( $\alpha \neq 0$ )

そこで一次関数  $w = \alpha z + \beta$  ( $\alpha \neq 0$ ) の挙動を調べよう。平行移動して一次関数  $w = \alpha z$  ( $\alpha \neq 0$ ) の様子を調べたらよい。 $\alpha$  の極座標表示を  $r = |\alpha|$ 、 $\theta = \arg \alpha$  ( $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ ) とすると

$$|w| = |\alpha||z|, \quad \arg w = \arg \alpha + \arg z$$

より、関数  $w = \alpha z$  は  $z$  の長さを  $r$  倍して、角を  $\theta$  だけ回転する変換を表す。特に二つのベクトル  $\vec{0z_1}, \vec{0z_2}$  のなす角が  $\theta'$  ならば  $\vec{0, \alpha z_1}, \vec{0, \alpha z_2}$  のなす角も  $\theta'$  だ。これを関数  $w = \alpha z$  は等角的、ということにする。

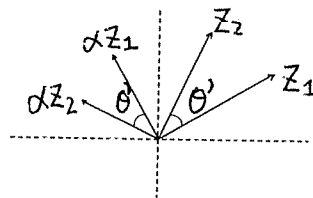


図 12: 等角的

この一次関数の少し違った描像を説明しよう。そのために変数  $z$  を表示する複素平面 ( $z$ -平面) と変数  $w$  を表示する複素平面 ( $w$ -平面) の二枚を用意する。そして、 $z$ -平面を  $w$ -平面の上に、

$w = \alpha z$  となるように持ってくる。このような描像をイメージするとき、 $w$ -平面を  $z$ -平面が覆うので、被覆面と呼ぶことにする。

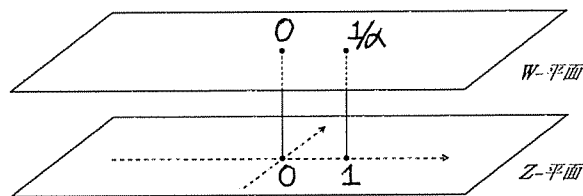


図 13: 被覆面として

また、一次関数  $w = \alpha z$  ( $\alpha \neq 0$ ) には逆関数が存在する。これは計算によっても直ちに分かるし、上の被覆面のイメージからも直観的に明らかだろう。

## 2.6 関数 $w = z^k$ ( $k \geq 2$ )

次に簡単な関数を考えよう。実数の場合と同じく、関数  $f(z) = z^k$  ( $k \geq 2$ ) の導関数は  $f'(z) = kz^{k-1}$  となる。従って  $z \neq 0$  の近くでは  $f'(z) \neq 0$  となって、上で見たように一次関数で  $f(z)$  は近似される。それでは  $z = 0$  の近くではどうだろうか? この場合一次近似では 0 になってしまって情報に乏しい。しかし、具体的な表示をすると、もっとはっきり分かる。いま  $z$  を極座標表示して  $r = |z|$ 、 $\theta = \arg z$  ( $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ ) とする。すると  $w = f(z)$  は  $|w| = |z|^k$ 、 $\arg w = k \arg z$  と極座標表示される。つまり、この関数は長さを  $k$  乗にして、角を  $k$  倍にする。従って二つのベクトル  $\vec{0z_1}, \vec{0z_2}$  のなす角が  $\theta'$  ならば、 $\vec{0f(z_1)}, \vec{0f(z_2)}$  のなす角は  $k\theta'$  になる (図 14)。

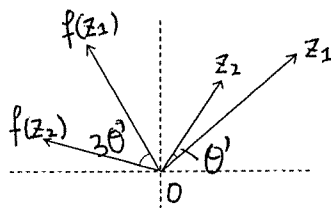


図 14:  $k = 3$  の場合

いま、 $z$ -平面を  $T_l = \{z \in \mathbb{C}; 2\pi l/k < \arg z < 2\pi(l+1)/k\}$  ( $l = 0, \dots, k-1$ ) と  $k$  個の扇型の領域に分割すると、 $w = f(z)$  によって各  $T_l$  が  $w$ -平面の上に写像される (図 16)。

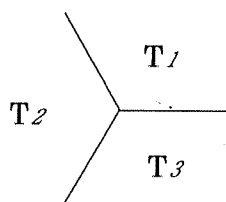


図 15:  $T_l$  たち:  $k = 3$  の場合

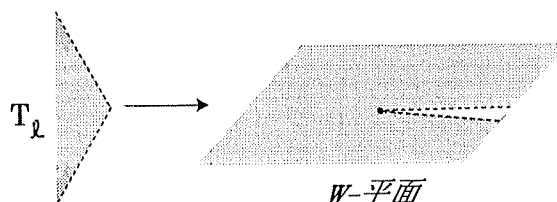


図 16:  $T_l$  の動き

よって、 $z$  が  $z$ -平面を原点のまわりに反時計まわりに一周すると  $w = f(z)$  は  $w$ -平面を反時計まわりに  $k$  週する。このように  $f(z)$  は  $z = 0$  の近傍では等角的ではない。このような点を分岐点と呼ぶ。分岐点は等角関数の特異点だ。

$w = f(z)$  の被覆面としての様子を見てみよう。そのために複素数平面を  $k$  枚用意して  $\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_k$  とする。それぞれの実軸上、正の部分に切り込みを入れる。そして、図 17 のように  $\mathbb{C}_1$  の切り込みの上の部分  $U_1$  下の部分を  $S_1$  とする。



図 17: 切り込み

そして、 $S_1$  を  $U_2$  に貼り合わせて、 $S_2$  と  $U_3$  を貼り合わせて、という操作を続ける。最後に、 $S_k$  と  $U_1$  を貼り合わせる。 $k = 3$  の場合にこの操作を図 18 に表した。

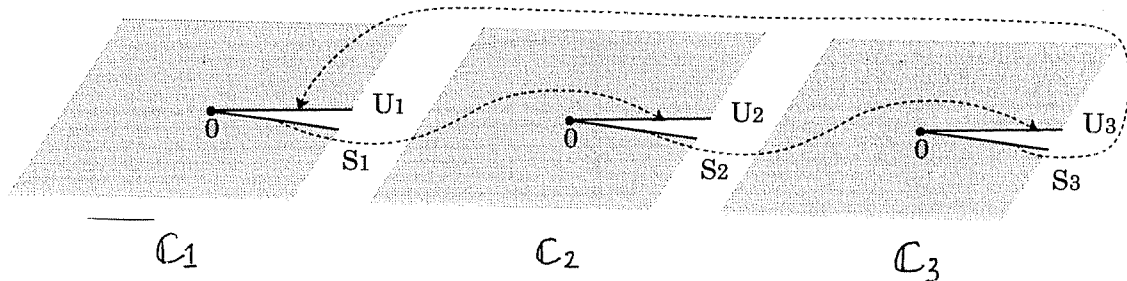


図 18: 貼り合わせ

図 19 は  $w = f(z)$  の被覆面としてのイメージだ。

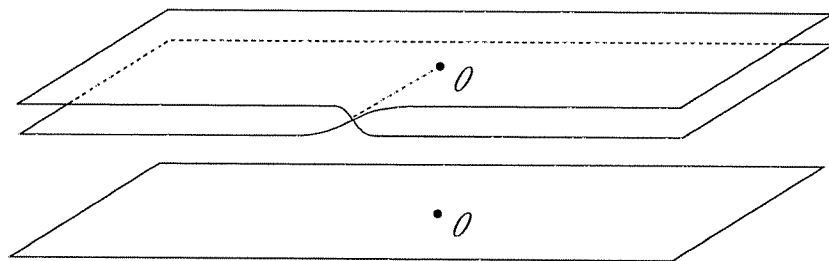


図 19: イメージ:  $k = 2$

また、 $w = f(z)$  には  $w_0 \neq 0$  のまわりで局所的に逆関数が存在する。この意味は、 $w_0$  を中心とする十分小さい半径の円板  $\Delta(w_0, r)$  の上では逆関数  $z = g(w)$ 、すなわち  $f(g(w)) = w$  となる関数が存在する、と言うことだ。しかし、このような関数  $g(w)$  は  $k$  個あることに注意しよう。な



ぜなら、 $w_0$  が (簡単のため) 実軸の上の点でなければ  $g(\Delta(w_0, r)) \subset T_l$  となるような関数が各  $l$  に対して存在するからだ (図 16 参照)。一方  $w_0 = 0$  ならば、 $w_0$  のまわりでは (局所的にも) 逆関数は存在しない。

## 2.7 まとめ—正則関数の局所的な挙動

以上の基本的な関数の挙動から一般の (非定数) 正則写像  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  の局所的な挙動が分かる。すなわち、 $f'(a) \neq 0$  となる点  $a \in \Omega$  の非常に近くでは、関数  $w = f(z)$  は、ほとんど一次関数

$$w = f'(a)(z - a) + f(a)$$

と思える。従って  $w_0 = f(a)$  の近傍で局所的に  $g(w_0) = a$  となる逆関数  $z = g(w)$  が存在する。

一方、 $f'(a) = 0$  となるような分岐点  $a \in \Omega$  の非常に近くでは、 $a$  によって決まる整数  $k \geq 2$  と複素数  $\alpha \neq 0$  があって、関数  $w = f(z)$  は、ほとんど関数

$$w = \alpha(w - a)^k + f(a)$$

と思える。従って上で見たように角を  $k$  倍する写像になっている。このような点  $w_0 = f(a)$  の近傍では逆関数は存在しない。

もはや、 $w = f(z)$  の被覆面としてのイメージを絵にすることは難しいが、頭の中で想像してみてください。

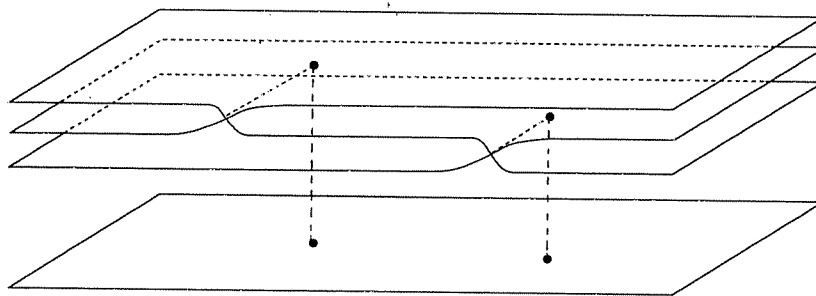


図 20: 被覆面のイメージ

上の  $k$  と  $\alpha$  が何か、について一言。ここでは紙数、時間の都合上、詳しく述べられないのが残念だが、正則関数は実は何回でも微分できることが知られている。(驚くべきことに、もっと強く正則関数はべき級数展開できるのだ!) 一般に  $f(z)$  を  $l$  回微分した関数を  $f^{(l)}(z)$  と書くと、 $k$  は  $f^{(l)}(a) \neq 0$  となる最小の整数として定まり、 $\alpha = f^{(l)}(a)/l!$  となる。

以上で、正則関数の局所的な挙動は分かった。次章からは、正則関数の全体的な挙動に注目してみよう。

### 3 シュワルツの補題とリーマンの写像定理

#### 3.1 円-円対応と最大値の原理

正則写像  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  の局所的な挙動は分岐点であるかどうかで大きく変わることが分かった。しかしながら、点  $a \in \Omega$  が分岐点であってもなくても、 $a$  を中心とする非常に小さい円  $C$  の正則写像  $f(z)$  による像  $f(C)$  は、 $f(a)$  を中心とする非常に小さい円とほとんど同じ形をしている (図 21)。これは関数  $w = z^k$  が点  $0$  を中心とする  $z$ -平面の円を点  $0$  を中心とする  $w$ -平面の円にうつすことから分かる。従って  $0$  と  $f(a)$  を結ぶ直線と  $f(C)$  の交点の遠い方を  $b$  とすると、 $C$  上に  $a'$  が取れて  $b = f(a')$  となる (図 22)。

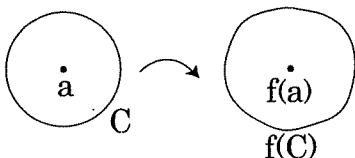


図 21: 円-円対応

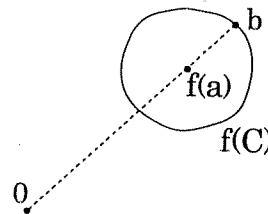


図 22:  $|f(a)| < |f(a')| = |b|$

いま、 $|f(a)| < |b| = |f(a')|$  に注意すると、結論としてどんな  $a \in \Omega$  に対しても  $|f(a)| < |f(a')|$  となる  $a' \in \Omega$  が存在することが言えた。すなわち、関数  $|f(z)|$  は最大値を  $\Omega$  の内部で取らない (最大値の原理)。別の言葉で言えば、関数  $|f(z)|$  の最大値は  $\Omega$  の境界上で取る。簡単に見える事実だが、これはすでに正則関数の全体的な挙動に言及していることに注意。

#### 3.2 シュワルツの補題

領域  $\Omega$  が単位円板  $\Delta$  の場合を考えよう。正則写像  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  を考える。つまり、 $\Delta$  上の正則関数  $f(z)$  が任意の  $z$  に対し  $|f(z)| \in \Delta$  となるとする。さらに  $f(0) = 0$  を仮定する。いま、関数  $g(z) = f(z)/z$  を考えよう。するとこの関数も実は  $\Delta$  上、正則になることが分かる。もし、 $g(z)$  が定数関数でないとする、最大値の原理から  $g(z)$  は  $\Delta$  上で最大値を持たない。よって  $\Delta$  の境界  $\partial\Delta$  (図 23) の上では  $|z| = 1$  となることに注意すると、次の評価を得る。

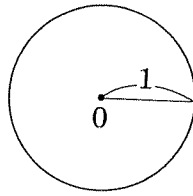
$$|g(z)| < \max_{t \in \partial\Delta} |g(t)| = \max_{t \in \partial\Delta} \left| \frac{f(t)}{t} \right| = \max_{t \in \partial\Delta} |f(t)| \leq 1 \quad (z \in \Delta) \quad (1)$$

ここで、 $|g(z)| = 1$  となる  $z \in \Delta$  が存在すれば、 $g(z)$  は定数関数になることが同時に示された。微分の定義から

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = g(0)$$

となるので、(1) 式で  $z = 0$  と置くと、次のシュワルツの補題が証明出来た。

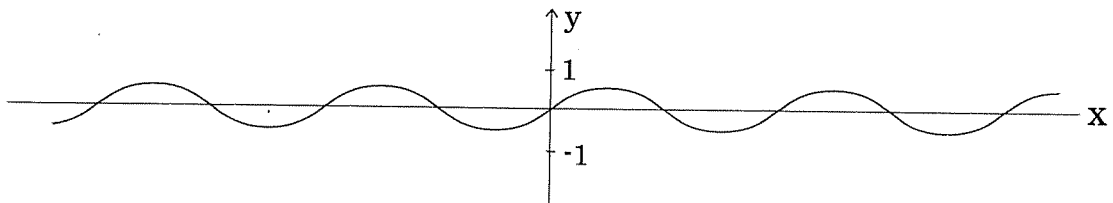
シュワルツの補題:  $|f'(0)| \leq 1$  であって、等号が成立すれば  $f(z) = \alpha z$  ( $|\alpha| \leq 1$ ) となる。

図 23:  $\partial\Delta$ 

この結果は数え切れないほどの応用を持つ大定理であり、様々な拡張が知られている。

### 3.3 リウヴィユの定理

実微分可能関数  $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$  を考えてみよう。この関数は  $\mathbb{R}$  全体で定義されていて、 $|f(x)| < 1$  を満たす。つまり、定数でない写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  を与える。

図 24:  $y = f(x)$ 

このようなことは正則関数の世界でも起こるだろうか？ この問いに否定的に答えるのが次のリウヴィユの定理だ。すなわち、非定数正則写像  $f: \mathbb{C} \rightarrow \Delta$  は存在しない。

シュワルツの補題を使ってこの定理を証明してみよう。そのために、非定数正則写像  $f: \mathbb{C} \rightarrow \Delta$  が存在すると仮定して矛盾を導く。まず  $z_0 \in \mathbb{C}$  を任意に取って固定する。さらに、正の数  $r$  によって決まる関数  $g_r(z) = (f(z_0 + rz) - f(z_0))/2$  を  $\Delta$  上で考える。簡単に分かるように、 $|g_r(z)| < 1$  が成立し、さらに  $g_r(0) = 0$  である。また合成関数の微分から  $g'_r(z) = rf'(z_0 + rz)/2$  に注意しよう。 $g_r(z)$  にシュワルツの補題を使うと

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{g'_r(0)}{r} \right| < \frac{2}{r}$$

となることが分かる。 $r$  は何でもよかったので、 $r \rightarrow \infty$  として  $f'(z_0) = 0$  を得る。 $z_0$  は任意であったから  $f'(z)$  は恒等的に 0 になり、 $f(z)$  は定数関数になる。ところが  $f(z)$  は定数関数でないとは仮定していたから矛盾である。よって証明が完了した。

リウヴィユの定理の一つの帰結として、複素平面  $\mathbb{C}$  と単位円板  $\Delta$  は正則同値でないことが分かる。後にみるように単位円板  $\Delta$  にはポアンカレ計量というものを通して非ユークリッド幾何の構造が入る。複素平面は自然にユークリッド幾何の構造を持っており、二つの世界がリウヴィユの定理から関数論的にはっきりと分かれていることが分かる。また後にピカールの定理というものをみるが、それはリウヴィユの定理の非常に強い拡張だ。

### 3.4 領域の正則同値による分類

二つの領域  $\Omega_1$  と  $\Omega_2$  の間に 1 対 1 上への正則写像  $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  が存在するときに、 $\Omega_1$  と  $\Omega_2$  は正則同値と呼んでいた。正則同値な領域たちは多くの複素解析的な性質を共有している。従ってすべての領域を正則同値なものを同じと見なして、分類することが大切になる。以降しばらく、そのような問題の中で最も基本的な結果であるリーマンの写像定理を見てみよう。この定理が扱うのは単連結領域という特別ではあるけれど、とても基本的な領域だ。定義を述べよう。 $\Omega$  を領域とする、任意の  $\Omega$  内の閉曲線  $\gamma$  を  $\Omega$  内で連続的に変形して一点につぶしてしまえるとき、 $\Omega$  を単連結と呼ぶ。つまり“穴”の空いていない領域のことだ。

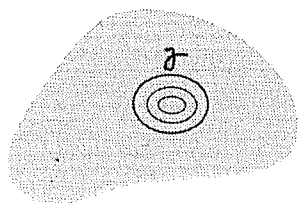


図 25: 単連結領域の例

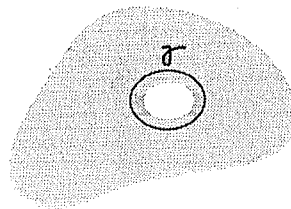


図 26: 単連結領域でない例

単連結とは限らないような領域であっても、その普遍被覆面とよばれる（一種の）領域は単連結になる。そして、普遍被覆面を調べることで元の領域に対しても、多くの性質が分かるのだ。

### 3.5 リーマンの写像定理

まず定理の主張を述べよう。 $\Omega$  を単連結領域であって複素平面全体ではないとする。このとき、 $\Omega$  と単位円板  $\Delta$  は正則同値になる。

定義から複素平面全体は単連結領域である。しかし、リウヴィユの定理から、それは単位円板と正則同値ではない。結局、リーマンの写像定理から、複素平面上の単連結領域上の関数論の問題が、複素平面全体の問題と単位円板上での問題と二つに集約されることが分かる。例えば変数が 2 つ以上の多変数複素解析では、このような領域の標準的なモデルをとることが出来なくなってしまう。そのことが高次元の問題の困難さの原因の一つだ。つまり、リーマンの写像定理というのは、応用上も重要な価値を持つ大定理なのだ。

リーマンは 19 世紀を代表する数学界の巨人で、今日でもリーマン幾何学（アインシュタインの相対性理論で使われた幾何学）、リーマン予想（100 万ドルの賞金が懸かった現代数論の超難問未解決問題）、リーマン面（いろいろな数学に登場する対象）などなど、その名を冠して讃えられる多くの研究を残した。リーマンの写像定理は初期の結果で、彼自身は物理的なアイデアから導いており、厳密な証明は持っていなかったと言われている。しかし、彼のアイデアはヒルベルトによって厳密な数学的基礎付けがなされた。次に、リーマンのものとは異なるが、シュワルツの補題を使う証明方法をスケッチしてみよう。

### 3.6 持ち上げ可能定理

その前に、領域の単連結性に関してもう少し詳しくみてみよう。(単連結とは限らない) 二つの領域  $\Omega_1$  と  $\Omega_2$  の間の正則写像  $\varphi: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  を被覆面とみなそう。 $\varphi$  に分岐点がないとき、 $\varphi$  を不分岐と呼ぶ。また、 $\Omega_2$  上の任意の道  $\gamma$  と  $\varphi(a) \in \gamma$  となる任意の点  $a \in \Omega_1$  に対して、 $a$  を含む  $\Omega_1$  内の道  $\tilde{\gamma}$  が存在して  $\varphi(\tilde{\gamma}) = \gamma$  となるとき、 $\varphi$  を非有界と呼ぶことにする。つまり、 $\Omega_2$  内の道がいつでも奇麗に  $\Omega_1$  に持ち上がる、ということだ。少し複雑な概念だけど、直観的には  $\Omega_2$  の“境界”が  $\Omega_1$  の上に存在しない、ということだ。

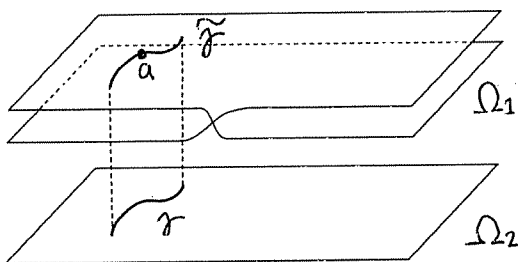


図 27: 非有界な例

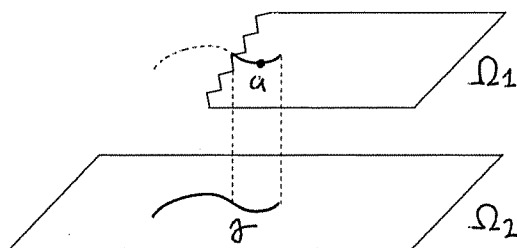


図 28: 非有界でない例

例えば  $\varphi$  が多項式関数ならば正則写像  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  は非有界だ。一方、複素平面上の正則関数  $\varphi$  に対しては、正則写像  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  は非有界とは限らない。そこで障害として現れるのが漸近値と呼ばれるもので、その数に関しては深い研究がある。

さて、実は領域  $\Omega$  が単連結であることと、 $\Omega$  の上の不分岐で非有界な被覆面は自分自身しか存在しない、ということが同値だ。このことの帰結として次の定理が成立する。

すなわち、 $\Omega$  を単連結領域、 $\varphi: D_1 \rightarrow D_2$  を二つの領域  $D_1$ 、 $D_2$  の間の不分岐で非有界な正則写像とする。いま、 $f: \Omega \rightarrow D_2$  を任意の正則写像とすると、 $f(z) = \varphi(\tilde{f}(z))$  となる正則写像  $\tilde{f}: \Omega \rightarrow D_1$  が存在する (図 29)。

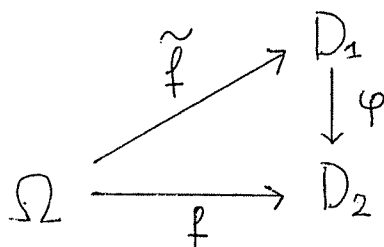


図 29: 持ち上げ可能定理

具体的には、 $\tilde{f}$  は次のように作る。 $\varphi$  が不分岐で非有界なので、各  $f(z) \in D_2$  の近傍で  $\varphi$  の逆関数  $\varphi^{-1}$  が作れることが分かる。合成して各  $z \in \Omega$  の近傍から  $D_1$  への正則写像  $\varphi^{-1}(f(z))$  を作り、 $\Omega$  の単連結性を使って局所的な  $\varphi^{-1}(f(z))$  たちが“貼り合う”ことを確認する。貼り合ってきたものが  $\tilde{f}$  だ。

### 3.7 リーマンの写像定理の証明 (スケッチ)

目標は複素平面全体とは異なる、単連結領域  $\Omega$  から単位円板  $\Delta$  への1対1上への正則写像を見つけることだ。以下、点  $a \in \Omega$  を一つ固定する。

まず、 $\mathfrak{F}$  を以下のような  $\Omega$  上の正則関数  $f$  の集まりとする。

$$\mathfrak{F} = \{f; f(a) = 0, |f(z)| < 1, f \text{ は単射}\}$$

$\mathfrak{F}$  の元は正則写像  $f: \Omega \rightarrow \Delta$  を与えている。最初に大切なことは、 $\mathfrak{F}$  は空集合ではない、ということだ。比較的簡単に分かるけれど、ここでは省略しよう。私たちの問題は、 $\mathfrak{F}$  の中から  $f(\Omega) = \Delta$  となるものを見つけることだ。つまり  $\mathfrak{F}$  の中の関数であって、像  $f(\Omega)$  がもつとも“遠くまで届く”ものが求めたい。直観的にはそれは、“初速”  $|f'(a)|$  が最も大きな関数になるだろう。そこで、そのような関数  $f \in \mathfrak{F}$  を持ってこよう。本当はここで、そのような  $f$  が存在するか? というのは決して自明なことではない。しかし、実は  $\mathfrak{F}$  は正規族、というものになっていて、この  $f$  は存在することが分かるのである (モンテルの定理)。ここでは、 $f$  の存在は認めて先に行こう。

この  $f$  が実際に  $f(\Omega) = \Delta$  を満たすことを見よう。そのために  $f(\Omega) \neq \Delta$  と仮定して、矛盾を導く。いま、点  $\alpha \in \Delta$  を  $\alpha \notin f(\Omega)$  となるようにとる。そして、次のような正則写像  $g: \Delta \rightarrow \Delta$  を考えよう。

1.  $g$  は非有界で、分岐点はただ一つ。その分岐点を  $p \in \Delta$  と置くと、 $g(p) = \alpha$  となる。分岐点以外では  $\Delta$  のちょうど二点が  $g$  で同じ点に行く。
2.  $g(0) = 0$  となる。

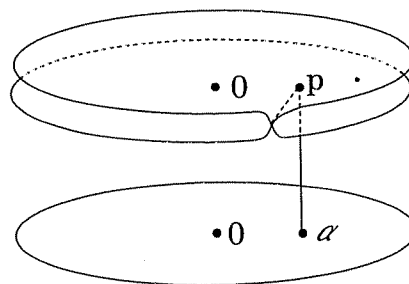


図 30: 被覆面としての  $g$

$g$  の作り方は後ほどコメントするとして、ここでは  $g$  の被覆面の図 30 が  $g_0(z) = z^2$  の被覆面の形とそっくりなことに注意しよう。 $g$  の存在を認めて、証明を完結させよう。

$g$  を  $\Delta - \{p\}$  に制限すると、非有界で不分岐な正則写像  $\Delta - \{p\} \rightarrow \Delta - \{\alpha\}$  が得られる。不分岐であることは上の 1. から、非有界であることは  $g$  がもともと非有界であることから従う。さて、 $f$  は正則写像  $f: \Omega \rightarrow \Delta - \{\alpha\}$  を与えているので、持ち上げ可能定理と上の 2. から、 $\Omega$  上の関数  $F: \Omega \rightarrow \Delta$  であって、 $F(a) = 0$  及び  $g(F(z)) = f(z)$  を満たすものが存在することが分かる。最後の等式の両辺を微分してみよう。すると

$$g'(F(z))F'(z) = f'(z)$$

となる(合成関数の微分)。  $z = a$  を代入して絶対値を取ると  $|g'(0)| \cdot |F'(a)| = |f'(a)|$  となる。ところで、シュワルツの補題から  $|g'(0)| < 1$  となることに注意しよう。よって

$$|f'(a)| < |F'(a)|$$

となる。ところが、  $F \in \mathfrak{F}$  となることがすぐに分かるので、これは矛盾だ。なぜなら  $f$  は  $\mathfrak{F}$  の中で  $|f'(a)|$  が最大のものを選んだのだから。以上でリーマンの写像定理が証明された。

最後に  $g$  の作り方に対してコメントしておこう。まず、関数  $g_0(z) = z^2$  を考える。  $g$  はこの  $g_0$  を変数変換して作る。後ほど詳しく述べるが  $\Delta$  には、非ユークリッド幾何学の構造が入る。普通のユークリッド幾何学には“平行移動”と“回転”のような、図形を合同な図形に移す合同変換がある。特に平行移動という合同変換によって、任意の点は別の任意の点に移すことが出来る。実は、 $\Delta$  上の非ユークリッド幾何学の世界にも合同変換が存在して、任意の点は別の任意の点に移すことが出来るのである。また、合同変換は正則写像になる。  $g_0$  は分岐点が  $z = 0$  であるが、これを上手に合同変換を使って、被覆面の形を変えないように、分岐点の位置を調節して  $g$  を作るのだ。

### 3.8 リーマンの写像定理は簡単か？

証明を長々と述べたが、絵を書いてみると単に領域  $\Omega$  をぐにゃぐにゃと円板  $\Delta$  に移せばよいだけではないのか？ という疑問も湧いてくるかもしれない。この“ぐにゃぐにゃと”というのは連続写像で移り合う、という意味で同相と呼ばれる重要な概念だ。直観的には、例えば  $\Omega$  がゴムで出来ていると想像して、それを伸ばしたり縮めたりして出来る図形が同相な図形だ。もちろん正則同値ならば同相であるけれど、実は逆は成り立たない。例を見てみよう。今、1より大きい実数  $r$  に対して領域  $R(r)$  を

$$R(r) = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z| < r\}$$

で定義する。これを円環とよぶ。このとき、どの二つの  $r_1, r_2$  に対しても  $R(r_1)$  と  $R(r_2)$  は同相になる。しかし、  $R(r_1)$  と  $R(r_2)$  が正則同値なのは  $r_1 = r_2$  のときに限ることが知られている。



図 31: 同相だけど、正則同値ではない

この例からも分かるように、正則同値という概念は微妙なものでリーマンの写像定理は決して簡単な事実ではないのだ。

## 4 単位円板上の非ユークリッド幾何学とピカールの定理

この章では単位円板上のポアンカレ計量から決まる非ユークリッド幾何学、すなわちポアンカレ円板を話題にしよう。平面上の幾何学では“直線”、“長さ”、“面積”そして“角度”といった概念が重要なものになる。ポアンカレ円板では、このうち最初の三つの概念が通常ユークリッド幾何学とは違うものになるが、最後の角度は保たれている。一方、正則関数も分岐点という特殊な点以外では角度を保つ写像だ。この章の最後では、複素解析で活躍するポアンカレ円板の一例としてピカールの定理を見てみよう。

### 4.1 計量とは？

ポアンカレ計量を説明するために、まず計量から説明しよう。最初に、簡単のため実数直線  $\mathbb{R}$  を考えよう。 $\mathbb{R}$  の二点  $a, b \in \mathbb{R}$  の距離は？ と聞かれたら  $|a - b|$  と答えるのが自然だろう。これからこの自然な距離とは違う別の距離を実数直線上に定義する方法を述べよう。いま、 $\rho(x)$  を  $\mathbb{R}$  上で 0 以上の実数に値を持つ関数としよう。そして、 $x \in \mathbb{R}$  の非常に近くでは実数直線が長さ  $\rho(x)$  倍に引き延ばされているとしよう。

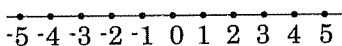


図 32: 普通の実数直線

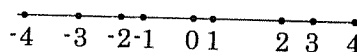


図 33: 計量を入れた時のイメージ

すると、二点  $a, b \in \mathbb{R}$  の距離は

$$\left| \int_a^b \rho(x) dx \right|$$

で測るのが自然であろう。 $\rho(x)$  が恒等的に 1 に等しいような関数のときには、この新しい定義は普通の定義と一致する。このような  $\rho(x)$  を計量と言う（普通は計量の密度関数と呼ぶのかもしれない）。

次に複素平面上の領域  $\Omega$  を考えよう。そして  $\rho(z)$  を  $\Omega$  上で 0 以上の実数に値を持つ関数としよう。いま、点  $z \in \Omega$  の非常に近くの二点  $a, b \in \Omega$  の長さを  $\rho(z)|a - b|$  と約束しよう。つまり、長さが  $\rho(z)$  倍されるわけだ。 $\gamma$  を  $\Omega$  内の道とすると、その長さが次のように決まる。まず、 $\gamma$  上に細かく点  $z_0, z_1, \dots, z_n$  をとる。そして和

$$L_n = \sum_{i=1}^n \rho(z_i) |z_i - z_{i-1}|$$



を考える。最後に  $n$  をどんどん大きくして、 $z_0, \dots, z_n$  を  $\gamma$  上でどんどん細かくなるようにする。

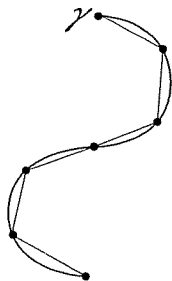


図 34:  $\gamma$  を分割する

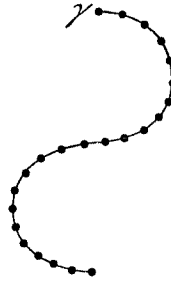


図 35: 分割を細かくしていく

このときの極限で

$$\gamma \text{ の長さ} = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$$

と計量  $\rho(z)$  で測った長さを測るのが自然だろう。

## 4.2 ポアンカレ計量

単位円板  $\Delta$  上に計量

$$\rho(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}$$

を入れよう。この計量をポアンカレ計量といい、ポアンカレ計量を入れて考えるとき、円板  $\Delta$  をポアンカレ円板という。二点  $a, b \in \Delta$  に対して、それらを結ぶ  $\Delta$  内の道のなかでポアンカレ計量で測った長さが最短のものを  $a, b$  を結ぶ双曲線分といい、その長さを二点の双曲距離という。双曲距離は具体的に計算出来て、

$$d(a, b) = \frac{1}{2} \log \frac{1+s}{1-s}, \quad \text{ここで } s = \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right|$$

で与えられる。従って例えば  $a=0$  と固定してもう一方の点  $b$  を円板の境界に近付けて  $|b| \rightarrow 1$  とすると  $d(0, b) \rightarrow \infty$  となる。つまり、原点からみて円板の境界は無限に遠い。

普通の(ユークリッド)直線と同じように、双曲線分をどの一部を取っても双曲線分であるように、どこまでも延長したものを双曲直線と呼ぼう。双曲直線は円周  $\partial\Delta$  に直交する円弧、または  $\Delta$  の直径になることが知られている(図 36)。

## 4.3 ポアンカレ円板と非ユークリッド幾何学

よく知られているように平面上のユークリッド幾何学は五つの公準(公理)から出発して幾何学の定理を厳密に論証していく体系だ。それら公準の中で第五公準と呼ばれるものは、ギリシャ時代から多くの幾何学者の関心をひいてきた。第五公準は、次の平行線公理と同等のものだ。

一点  $P$  を通り、与えられた直線  $l$  と平行な直線は一つしかない。

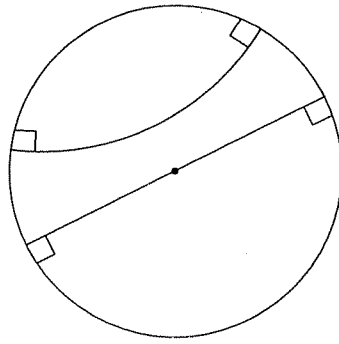


図 36: 双曲直線

「平行」というのは交わらない、という意味である。多くの数学者が第五公準（平行線公理）を他の四つの公準から証明しようと試みた。2千年に及ぶ多くの試みを経て、ついに19世紀になって、この問題は決着した。すなわち、第五公準を他の四つの公準から証明することは不可能である、ということが分かったのだ。実はポアンカレ円板を見ると、そのことが分かる。つまり、ポアンカレ円板上で双曲直線を使った幾何学はユークリッドの第五公準以外の四つの公準をすべて満たしている。しかし、図 37 の通り第五公準は満たさない！

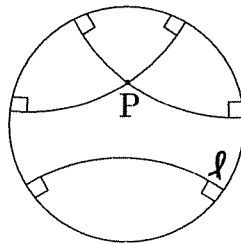


図 37:  $P$  を通り  $l$  と平行な直線たち

このような例が存在する以上、第五公準を他の四つの公準から証明することは不可能である。

#### 4.4 平行線公理の一つの帰結：三角形の内角の和 = 2 直角

実は、第五公準以外の四つの公準から、点  $P$  を通り、与えられた直線  $l$  と平行な直線が存在することは証明できる。さらに、図 38 で向かい合う角  $\alpha$  と  $\beta$  が等しければ二直線  $l$  と  $l'$  は平行であることも証明出来るのである。

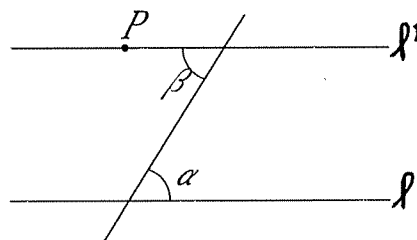


図 38: 向かい合う角

もし、第五公準を認めると、 $l$  と平行で  $P$  を通る平行線は  $l'$  しか存在しないことになり、有名な命題

$l$  と平行で、点  $P$  を通る平行線  $l'$  を書くと、向かい合う角  $\alpha$  と  $\beta$  が等しい

ということが分かる。つまり、平行線公理はこの命題と同値なのだ。さらに、上の命題の帰結として次の有名な定理がある。すなわち、ユークリッド平面上の三角形の内角の和は180度である。証明は図39のように三角形の一頂点を通り、その頂点の対辺と平行な唯一の平行線を補助線にとってなされるのだった。

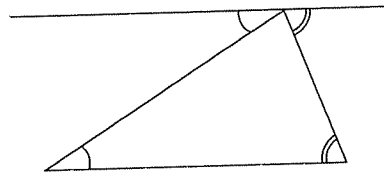


図 39: 三角形の内角の和 = 180 度

まとめると、ポアンカレ円板のような非ユークリッド幾何の世界では三角形の内角の和が180度になることが証明できない。そして実は三角形の内角の和は真に180度よりも小さくなり、三角形の面積が大きくなればなるほど、内角の和は小さくなっていく。その最も極限的な現象として内角の和が0度の“三角形”が存在する。これは三本の平行線によって囲まれた三角形だ。

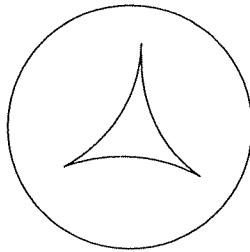


図 40: 内角の和 < 180 度

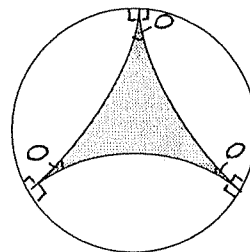


図 41: 内角の和 = 0 度

#### 4.5 ポアンカレ円板のタイル貼り

図41の三角形を  $T$  としよう。この  $T$  を一つの「タイル」として円板  $\Delta$  を(無数の)タイルで敷き詰めることができる。つまり、図43のように、 $T$  と合同な三角形たちを  $\Delta$  上に重ならないように、そして隙間がないように敷き詰めることができるのだ。

図42の三角形たちはユークリッド平面に絵を書いているので合同には見えないが、ポアンカレ円板上では合同なのである。これがポアンカレ計量という新しい計量を導入した結果だ。

#### 4.6 応用—ある写像の構成

リーマンの写像定理と前節のタイル貼り(図43)を利用して、不分岐で非有界な正則写像  $\lambda: \Delta \rightarrow \mathbb{C} - \{0, 1\}$  を構成しよう。

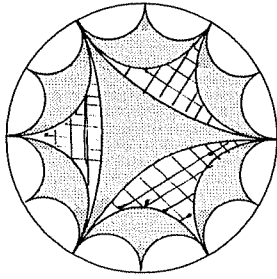


図 42:  $T$  と合同な三角形たち

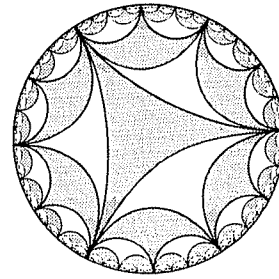


図 43: タイル貼り

まず、複素平面を実軸で二つに分けて、上を  $\mathbb{H}$ 、下を  $\mathbb{H}^-$  と置く。二つの領域の境界線である実軸に  $0$  と  $1$  があり、それによって実軸は  $(-\infty, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(1, \infty)$  という三つの区間に分かれる。

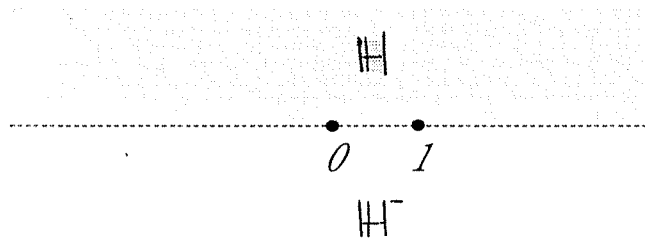


図 44:  $\mathbb{H}$  と  $\mathbb{H}^-$

図 43 の中の各タイルの各頂点に以下のように  $0$ 、 $1$ 、 $\infty$  と名前を付ける。この場合の  $0$ 、 $1$ 、 $\infty$  は純粋に記号だと思ふ。

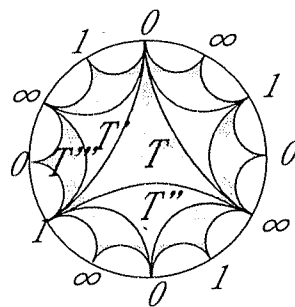


図 45: 記号付け

リーマンの写像定理から、図 41 の三角形  $T$  を  $\mathbb{H}$  にうつす、1対1上への正則写像  $\lambda_T$  が存在する。実はこの写像は  $T$  の辺  $(0, 1)$ 、 $(1, \infty)$ 、 $(\infty, 0)$  をそれぞれ  $\mathbb{H}$  の境界  $(0, 1)$ 、 $(1, \infty)$ 、 $(-\infty, 0)$  に移すように取れる。

さて次に  $T$  と辺  $(0, 1)$  で分けられる三角形を  $T'$  とする (図 45)。リーマンの写像定理から今度は、 $T'$  を  $\mathbb{H}^-$  にうつす、1対1上への正則写像  $\lambda_{T'}$  で同じく  $T'$  の辺  $(0, 1)$ 、 $(1, \infty)$ 、 $(\infty, 0)$  を  $\mathbb{H}^-$  の境界  $(0, 1)$ 、 $(1, \infty)$ 、 $(-\infty, 0)$  に移すようなものが取れる。

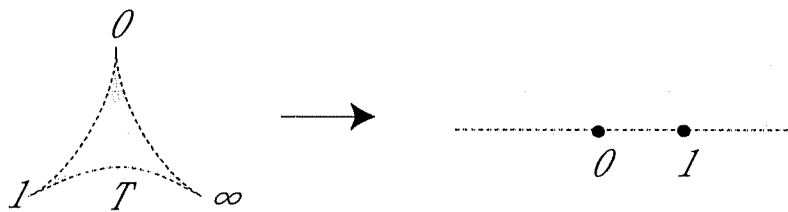


図 46:  $\lambda_T$

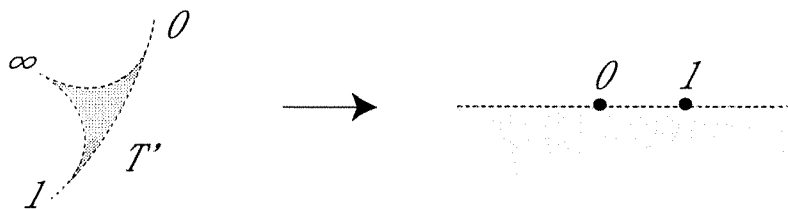


図 47:  $\lambda_{T'}$

同じようにして、 $T$  と辺  $(1, \infty)$  で分けられる三角形  $T''$  に対しても正則写像  $\lambda_{T''} : T'' \rightarrow \mathbb{H}^-$  をとる。また、 $T'$  と辺  $(1, \infty)$  で分けられる三角形  $T'''$  に対しては正則写像  $\lambda_{T'''} : T''' \rightarrow \mathbb{H}$  を作る。このようにして次々と辺で“ひっくり返して”正則写像を作っていく。実はこのとき、隣あう正則写像たちは共通する辺で奇麗に継っている。上の例でいけば、 $\lambda_T$  と  $\lambda_{T'}$  は辺  $(0, 1)$  上で奇麗にはりあう。結局、円板  $\Delta$  から  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  への正則写像

$$\lambda : \Delta \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

が出来た。作り方から、 $\lambda$  は不分岐で非有界だ。

#### 4.7 ピカールの定理

定理の主張： $f(z)$  を複素平面  $\mathbb{C}$  上の正則関数で定数関数ではないものとする。このとき関数  $f(z)$  は高々一つの値を除くすべての値を取る。つまり、 $f(z) = a$  となる  $z$  が存在しないような  $a$  は多くても一つである。

今まで述べてきたことを合わせると簡単に証明できるのでやってみよう。背理法でしめす。すなわち、定数関数でない正則関数  $f(z)$  で二つの値  $a, b$  を取らないものが存在すると仮定して矛盾を導こう。適当に平行移動と縮尺をすることで  $a = 1, b = 0$  と仮定しても一般性を失わない。従って、正則写像  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  が定数関数でないことを仮定する。前節の写像  $\lambda$  を考える。持ち上げ可能定理から、正則写像  $F : \mathbb{C} \rightarrow \Delta$  であって、 $\lambda(F(z)) = f(z)$  となるものが存在する。とくに  $F(z)$  は定数関数ではない。ところがリウヴィユの定理から  $F(z)$  は定数関数になるので矛盾だ。よって、証明が終る。

以上で複素平面上の定数関数でない正則関数は2つ以上の値を除外出来ないことが分かった。この“2”は最良だ。すなわち、正則写像  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  で定数関数でないものが存在する。図48と  $\lambda$  の作り方を参考にして考えてみて下さい。

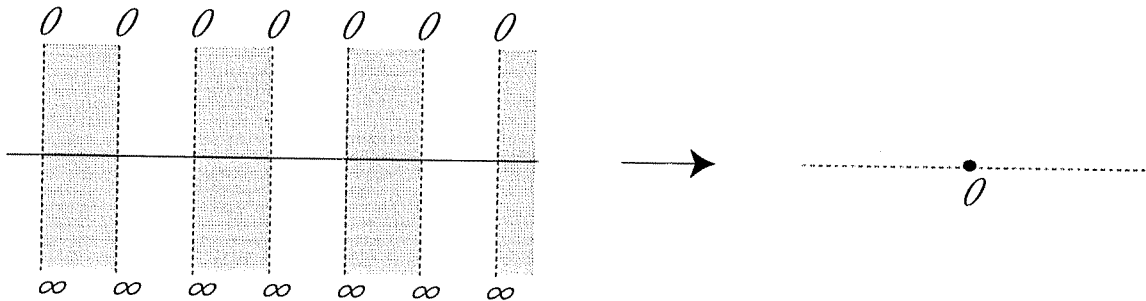


図 48:  $f$  の作り方

#### 4.8 その後の発展について

ピカールの定理には正則写像の値分布論として、多くの発展がある。一例として次のような大変美しい定理を紹介しよう。

アールフォースの三島定理：複素平面上に互いに重ならないように、円板  $D_1, D_2, D_3$  を持つてくる。このとき、任意の非定数正則写像  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  は、 $D_1, D_2, D_3$  のいずれかを単葉に覆う。ここで、 $f$  が円板  $D$  を単葉に覆うとは、ある領域  $\Omega$  が存在して、 $f$  を  $\Omega$  に制限すると、1対1上への正則写像  $f|_{\Omega}: \Omega \rightarrow D$  になることをいう。(問題：この定理からピカールの定理を証明せよ。)

さらに、方程式  $f(z) = a$  が“いくつ”解を持つか？ という、より精密な問題に答えるものとして、ネバリンナ理論がある。これらについては、例えば文献 [3] に詳しい解説がある。

また、最近では値分布論は数論とも深い関係があることが分かってきた(ピカールの定理と  $S$ -単数方程式、ネバリンナの定理とロスの定理、等の対応)。この話題については、近く [4] が出版される予定だ。

(絵：アトリエ viola)

#### 参考文献

- [1] 楠 幸男: 現代の古典 複素解析, 現代数学社 (1992).
- [2] 谷口 雅彦: もう一つの関数論入門, 京都大学学術出版会 (2002).
- [3] 能代 清: 近代関数論, 岩波書店, 1954.
- [4] 野口 潤次郎: 多変数ネヴァンリンナ理論とディオファントス近似, 共立出版, 近刊.
- [5] 小林 昭七: ユークリッド幾何から現代幾何へ, 日本評論社, 1990.