不変式の話

—対称式と方程式から第14問題の反例へ—

向井 茂

I. 初日は不変式の最も基本となる対称式から話を始める．

II. 群の不変式はここからすぐそこにある．また，Hilbertの第14問題もすぐに定式化できる．

III. 直接の関係はないが不変式の個数を数える定量的な話で不変式に親しもう．第3日は方程式の不変式へと進む．

IV. 最終日は頑張って第14問題に対する永田の反例に挑戦しよう．近年その理解が進み紹介が容易になっている．

§1　対称式

$x_1, \ldots, x_n$ の多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ は変数の置換[1]に対して不変，すなわち，

$$f(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

がすべての置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して成立するとき，対称式という．たとえば，$x^3 + y^3 + z^3$ や $xyz - 3$ などは x, y, z の対称式である．

例 1. 3変数 x, y, z の2次対称式は，4個の定数 a, b, c, d でもって

$$a(x^2 + y^2 + z^2) + b(xy + xz + yz) + c(x + y + z) + d$$

と表される．

例 2. 3変数 x, y, z の4次斉次[2]対称式は，4個の定数 a, b, c, d でもって

$$a(x^4 + y^4 + z^4) + b(x^3y + xy^3 + x^3z + xz^3 + y^3z + yz^3) + c(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)$$

[1]集合 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ から自分自身への全単射．添字の集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換と同一視する．また，これらの全体（$n!$ 個ある）をドイツ文字 $\mathfrak{S}_n$ で表す．

$$+d(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$$

と表される．

対称式にはいろいろと特別なものが知られているが，次は最も基本的である．それは積

$$\prod_1^n (t + x_i) = (t + x_1)(t + x_2)\cdots(t + x_n)$$

を t に関して展開したときの係数

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ s_2 = \sum_{i<j} x_i x_j \\ s_3 = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k \\ \cdots \\ s_n = x_1 x_2 \cdots x_n \end{cases}$$

で，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の基本対称式と呼ばれる．$s_r = s_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ から r 個をとった $\binom{n}{r}$ 個の積の和である．

定理 1 (対称式の基本定理). $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の対称式は基本対称式 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ の多項式として表される．

いろんな証明が知られている．よくあるのは単項式に辞書式順序を入れる方法である．時間がありそうなら講義で証明するが，各自で適当な代数学の本で勉強しておいて下さい．

演習問題　$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$ は x_1, x_2, x_3, x_4 の対称式か？もしそうなら，基本対称式の多項式で表せ．

§2　交代式

多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ は変数の互換でもって符号をかえる，すなわち，

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots x_n) = -f(x_1, \ldots, \overset{i}{\check{x}_j}, \ldots, \overset{j}{\check{x}_i}, \ldots x_n), \quad 1 \le i < j \le n$$

---

[2]同次多項式ともいう．それに含まれる単項式 $x^p y^q z^r$ の総次数 $p + q + r$ が一定値である多項式のこと．

がみたされるとき，交代式と呼ばれる．たとえば，$x_1^2 - x_2^2$ は x_1, x_2 の交代式であり，差積

$$\begin{aligned}\prod_{i<j}(x_i - x_j) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\cdots(x_1 - x_n)\\ \times(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\cdots(x_2 - x_n)\\ \times(x_3 - x_4)\cdots(x_3 - x_n)\\ \vdots\\ \times(x_{n-1} - x_n)\end{aligned}$$

は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の交代式である．以下，これを $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で表す．

命題 2. 交代式はいつも差積 $\Delta(x)$ と対称式の積である．

例 3. $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)$ は x, y, z の交代式である．これは $(x-y)(x-z)(y-z)(x+y+z)$ と因数分解される．

二つの交代式の積は対称式である．とくに，差積の平方 $\Delta(x)^2$ が対称式であることが重要である．線形代数で習うように差積は行列式で表される（Vandermonde）．例えば,

$$\Delta(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

である．これをまねて沢山の交代式を構成することができる．差積で割って沢山の対称式が得られる．

例 4. 非負整数 p, q, r に対して，行列式

$$\begin{vmatrix} x^p & y^p & z^p \\ x^q & y^q & z^q \\ x^r & y^r & z^r \end{vmatrix}$$

は x, y, z の交代式である．これを差積で割ってえられる対称式を Schur 関数という．例えば，$(p,q,r) = (0,2,3)$ のとき，それは 2 次基本対称式である．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = -(x-y)(x-z)(y-z)(xy+xz+yz)$$

よりみち　すべての対称式は Schur 関数の（定数係数）線形結合で表される．また，Schur 関数を具体的に基本対称式で表すことができる（Jacobi-Trudi の行列式）．これらを使って定理 1 の別証ができる．

§3　置換による不変式

よく知られているように，置換には偶奇の 2 種類がある．差積に変数変換したときは符号を除いて差積自身と一致する：

$$\Delta(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = \pm\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

ここにおける符号が $+, -$ に従って σ を偶置換，奇置換とよぶ．偶置換全体の集合は通常 $\mathfrak{A}_n$ で表される．これは結合でもって閉じている．

定義 1. 多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ は変数の偶置換に対して不変，すなわち，

$$f(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

がすべての偶置換 $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ に対して成立するとき，半対称式[3]という．

対称式や交代式，そしてそれらの和は半対称式であるが，これは逆も成立する．

補題 3. 半対称式は対称式と交代式の和に表される．

この補題と命題 2 より次をえる．

命題 4. 半対称式は二つの対称式 $f(x), g(x)$ でもって，$f(x) + \Delta(x)g(x)$ として表される．

定理 1 と合わせて次をえる．

定理 5. 半対称式は基本対称式 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ と差積 $\Delta(x)$ の多項式として表される．

対称式や半対称式は置換の集合 $S \subset \mathfrak{S}_n$ に一般化される．

定義 2. 多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ は

$$f(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

がすべての置換 $\sigma \in S$ に対して成立するとき，S 不変式という．

S が $\mathfrak{S}_n$ 全体のとき S 不変式は対称式に他ならない．S として偶置換の全体 $\mathfrak{A}_n$ をとった場合が半対称式である．

[3] まだここだけの仮の用語なので公共の場で使うときには注意して下さい．

§4　不変式

置換の全体 $\mathfrak{S}_n$ から n 次正則行列の全体 $GL(n)$ に考察を拡げよう．正則行列 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ とそれの定める変数変換を

$$x_i \mapsto Ax_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad 1 \le i \le n$$

を同一視する．多項式 $f(x_1,\dots,x_n)$ は

$$f(Ax_1,\dots,Ax_n) = f(x_1,\dots,x_n)$$

をみたすとき，A 不変という．また，正則行列の集合 $S \subset GL(n)$ に関する不変性も置換のときと同様に定義する．

例 5. 2 変数多項式 $f(x,y)$ が $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で不変とは $f(x,y) = f(x,-y)$ をみたすことである．そのような多項式はそれに含まれる各項の y のべき指数が偶数であるものに他ならない．よって，A 不変な多項式は x と y^2 の多項式である．

例 6. $f(x,y)$ が $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で不変とは $f(x,y) = f(-x,-y)$ をみたすことで，それに含まれる各項の総次数が偶数ということである．よって，A 不変な多項式は x^2, xy と y^2 の多項式で表される．

置換による不変式は特別な線形変換（置換行列）による不変式である．こう見る方が自由度が増えて考えやすい．

例 7. 4 変数 x_1,x_2,x_3,x_4 の 3 つの置換[4] $(12)(34),(13)(24),(14)(23)$ による不変式

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = f(x_2,x_1,x_4,x_3) = f(x_3,x_4,x_1,x_2) = f(x_4,x_3,x_2,x_1)$$

を考えよう．新しい変数として，

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ y_2 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ y_3 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_4 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{cases}$$

[4] 恒等置換と合わせて Klein の 4 元群と呼ばれる群になる．

をとってくる．このとき，3 つの置換は y_1 を保つ．また，y_2, y_3, y_4 のうち一つは固定して他の二つの符号を入れ替える．言い換えると，y_1, y_2, y_3, y_4 という新変数に関して 3 つの線形変換

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

で不変な多項式と同値である．よって，不変式は y_1 と y_2^2, y_3^2, y_4^2 と $y_2y_3y_4$ の多項式で表される．(3 次式 $y_2y_3y_4$ に関しては §1 末の演習問題を考えてみよ.)

§5　Hilbert の第 14 問題

今まで多項式の係数の範囲をはっきりさせなかったが，有理数の全体 $\mathbf{Q}$，実数の全体 $\mathbf{R}$，複素数の全体 $\mathbf{C}$ のどれかで考えている．このような数の体系[5]の一つを以下では K で表す．K の元を係数とする多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ の全体の集合を $K[x_1, \ldots, x_n]$ で表す．これは専門用語で「環」と呼ばれるものの一つの典型例である．[6]その意味するところは

「多項式どうしでもって足し算と引き算ができ，かけ算もでき，結合律や分配律等が成立している.」

である．K の元を成分とする n 次正則行列の集合 $S \subset GL(n, K)$ に関して不変な多項式

$$f(Ax_1, \ldots, Ax_n) = f(x_1, \ldots, x_n), \quad \forall A \in S$$

全体のなす集合を $K[x_1, \ldots, x_n]^S$ で表す.

「S 不変式同士でもって足し算と引き算したものやかけ算した結果はまた S 不変式である」

が，このことを専門用語では

$\boxed{K[x_1, \ldots, x_n]^S \text{ は } K[x_1, \ldots, x_n] \text{ の部分環になっている}}$

という.

[5]専門用語では体という.
[6]もう一つの典型例として整数全体のなす環 $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ がある.

定義 3. すべての S 不変式が $f_1(x), \ldots, f_N(x) \in K[x_1, \ldots, x_n]^S$ の（N 変数）K 係数多項式で表されるとき，$K[x_1, \ldots, x_n]^S$ は（K 上）$f_1(x), \ldots, f_N(x)$ で生成されるという．$\{f_1(x), \ldots, f_N(x)\}$ が S 不変式の基本生成系であるともいう．

次はこれに関する基本的な問題である．歴史的な背景はいろいろとあるが（§8），問題を述べることは容易である．

Hilbert の第 14 問題　S 不変式環 $K[x_1, \ldots, x_n]^S$ は有限個の不変式で生成されるか？[7]

有限変数の多項式環の部分環でも有限個の多項式で生成されない場合があることに注意しよう．

例 8. 2 変数多項式環 $K[x, y]$ の中で $y = 0$ を代入して定数になる多項式 $a + yg(x, y)$（$a \in K$）の全体を R とする．R は無限個の単項式 $x^n y, n \geq 0$，で生成されるが，有限個の生成系はもたない．

最も簡単な肯定的結果は次である．

命題 6. 置換の集合 S に対して S 不変式環 $K[x_1, \ldots, x_n]^S$ は有限個の不変式で生成される．

正則行列 A に関しても B に関しても不変なら，行列の合成 AB に関しても不変である．また，逆行列 A^{-1} に関しても不変である．$S \subset GL(n, K)$ が与えられたとき，S の元とそれらの合成や逆行列の操作の繰り返しでもって得られる行列すべてよりなる部分集合を $G(S)$ とする．このとき，$G(S) \subset GL(n, K)$ は合成と逆行列に関して閉じている．専門用語では

$G(S)$ は $GL(n, K)$（正則行列全体のなす群）の部分群になっている

という．

このとき，多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ が S で不変であるということと $G(S)$ で不変であることは同値である．よって，S から $G = G(S)$ に移行することにより，最初から部分群 $G \subset GL(n, K)$ に限って G 不変式を考えても一般性を失わない．ただし，S が有限集合であっても $G(S)$ はそうとは限らないことに注意しよう．$G(S)$ が有限というのは強い制約条件である．

命題 7. 線形変換の有限部分群 $G \subset GL(n, K)$ に対して G 不変式環 $K[x_1, \ldots, x_n]^G$ は有限個の不変式[8]で生成される．

---

[7]いくつかの version がある．その中でこれは線形作用版というべきものである．

[8]生成系の不変式はその次数をすべて $|G|$ の元の個数（位数）以下にすることができる（Noether の定理）．

§6 Molienの公式

有限群の不変式環の構造を決めるのに有用な公式を紹介しよう．$K[x_1,\ldots,x_n]$ 内の d 次単項式の個数は $\binom{n+d-1}{d}$ である．これらは d 次斉次多項式全体のなす K ベクトル空間 $K[x_1,\ldots,x_n]_d$ の基底をなしている．S 不変な d 次斉次多項式全体 $K[x_1,\ldots,x_n]_d^S$ はこれの部分空間になっている．これの次元を係数とする級数

$$\sum_{d=0}^{\infty}(\dim_K K[x_1,\ldots,x_n]_d^S)t^d$$

を S 不変式環の Hilbert 級数[9]という．

例 9. $S=\emptyset$ のとき，$K[x_1,\ldots,x_n]^S=K[x_1,\ldots,x_n]$ で，Hilbert 級数は $(1-t)^{-n}$ に等しい．

例 10. 対称式全体のなす環 $K[s_1,\ldots,s_n]$ と半対称式の環の Hilbert 級数はそれぞれ

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^n)},\quad \frac{1+t^{n(n-1)/2}}{(1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^n)}$$

に等しい．

これらの例は（不変式）環の構造が解っているから Hilbert 級数がわかるという場合であるが，そうではなく前もって Hilbert 級数を計算しておいてそれを道標にして環構造を決めてゆくという場合が多い．

n 次正方行列 A に対して，行列式 $\det(tI_n-A)$ で定義される n 次多項式を A の固有多項式という．行列式 $\det(I_n-tA)$ は係数をひっくり返したもので反転固有多項式と呼ばれる．

定理 8. 有限群 $G\subset GL(n)$ の不変式環の Hilbert 級数は，A が G を動くときの，A の反転固有多項式の逆平均

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det(I_n-tA)}$$

に等しい．

次の応用例が有名である．

[9]Poincarè 級数とも呼ばれる．母関数（generating function）と呼ばれるものの一種である．

計算例（拡大正 20 面体群）　ε は 1 の原始 5 乗根として 3 つの 2 次正則行列

$$S := \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & \\ & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad T := \frac{1}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}\begin{pmatrix} \varepsilon + \varepsilon^4 & 1 \\ 1 & -\varepsilon - \varepsilon^4 \end{pmatrix}, \quad U := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考えよう．これらはすべて行列式が 1 である．S は 5 乗して初めて単位行列 I_2 になる．すなわち，位数 5 である．T と U は対角成分の和（trace) が 0 なので，位数は 4 である．簡単ではないが，これらは正則行列全体 $GL(2, \mathbf{C})$ の中で[10]位数 120 の部分群を生成することが確かめられる ([Kl, 第 1 部])．この群 G_{icosa} に属する行列の位数の分布は次の通りである．

位数	1	2	3	4	5	6	10
個数	1	1	20	30	24	20	24
trace	2	-2	-1	0	$\cos 2\pi/5, \cos 4\pi/5$	1	$-\cos 2\pi/5, -\cos 4\pi/5$

よって，Hilbert 級数の 120 倍は

$$\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{20}{1+t+t^2} + \frac{30}{1+t^2} + \frac{24(1+\frac{t}{2}+t^2)}{1+t+t^2+t^3+t^4}$$
$$+\frac{20}{1-t+t^2} + \frac{24(1-\frac{t}{2}+t^2)}{1-t+t^2-t^3+t^4}$$

に等しい．計算より，Hilbert 級数は

$$\frac{1+t^{30}}{(1-t^{12})(1-t^{20})} = \frac{1-t^{60}}{(1-t^{12})(1-t^{20})(1-t^{30})} \tag{1}$$

である．

　これを展開することにより，次数 $12, 20, 30$ の不変式が（定数倍を除いて）ひとつづつあることがわかる．計算よりそれらを直接求めることもできるが，ここでは正 20 面体を用いて答えだけを述べよう．正 20 面体を球面 S に内接させたとき， S 上には 12 個の頂点がのっている．この球面 S を Riemann 球 $\mathbf{CP}^1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ と思って，12 個の頂点の座標を $\alpha_1, \ldots, \alpha_{12} \in \mathbf{C}$ とする．このとき，

$$f(x, y) = \prod_{i=1}^{12}(x - \alpha_i y)$$

は G_{icosa} の 12 次不変式である．座標系を上手に選ぶことにより，

$$f(x, y) = xy(x^{10} + 11x^5y^5 - y^{10})$$

[10]行列式 1 のもの全体 $SL(2, \mathbf{C})$ にも入っている．より精密にいうと，特殊ユニタリ群 $SU(2)$ に入っている．

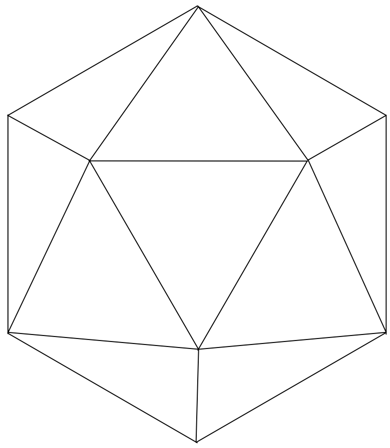
となる．これの Hesse 行列式

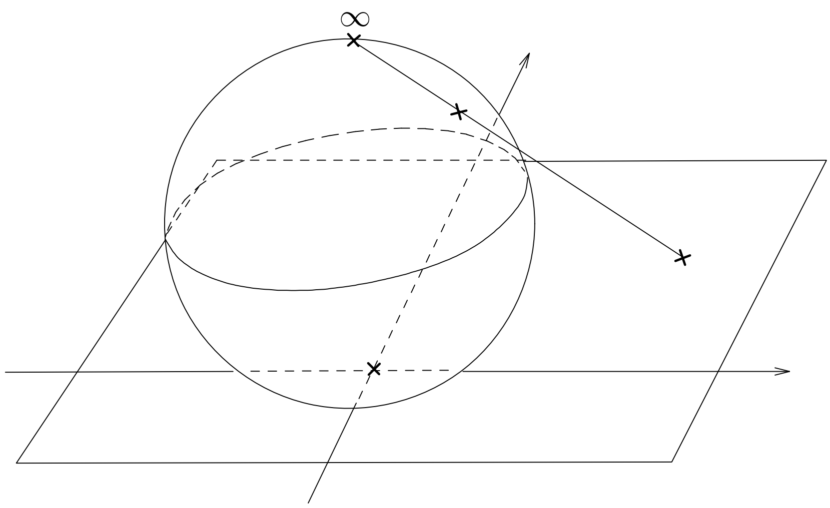
$$H = \frac{1}{11^2}\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = -x^{20} + 228x^{15}y^5 - 494x^{10}y^{10} - 228x^5y^{15} - y^{20}$$

は次数 20 の不変式である．また，f と H の Jacobi 行列式

$$J = \frac{1}{20}\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ H_x & H_y \end{vmatrix}$$

は次数 30 の不変式である．





正 20 面体と Riemann 球

(1) より，次数 60 の不変式で線形独立なものは 2 個しかない．よって，f^5, H^3, J^2 は線形従属である．実際

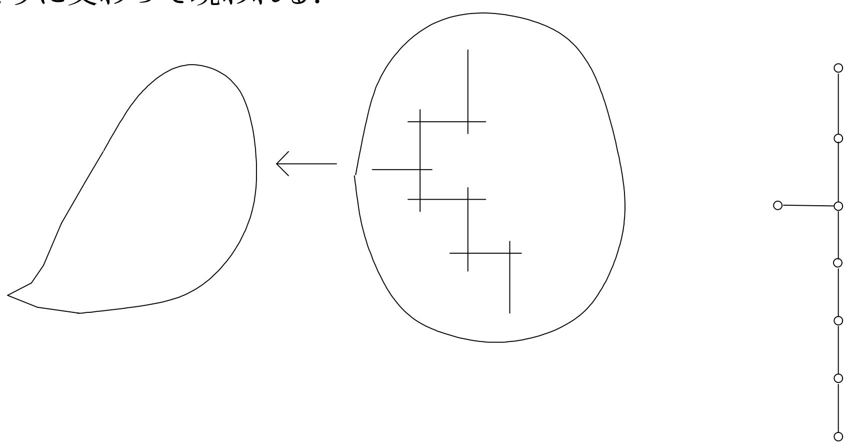
$$J^2 = 1728f^5 - H^3$$

の関係がある．f, H は代数的に独立なので，(1) より，不変式環 $\mathbf{C}[x,y]^{G_{icosa}}$ は f, H, J で生成される．

よりみち　高級なので解らなくても差し支えないが，上の事実は代数幾何学の言葉では

> アフィン平面 $\mathbf{A}^2$ の拡大正 20 面体群による商多様体 $\mathbf{A}^2/G_{icosa}$ は 3 次元アフィン空間 $\mathbf{A}^3$ の中の曲面
>
> $$w^2 = 1728u^5 - v^3$$
>
> と同型である

と翻訳される．この曲面 $\mathbf{A}^2/G_{icosa}$ は原点で特異であるが，これは E_8 型の有理２重点と呼ばれるものである．この特異点の極小解消の例外集合には８本の射影直線が次のように交わって現われる．



E_8 型特異点の極小特異点解消と射影直線配置の双対グラフ

§7　方程式の不変式

これから説明するのが数学史的な意味での「不変式」である．名著 [Be] の第 21 章（不変の双子，Sylvester(1814–1897) と Cayley(1821–1895)）から引用しよう．

「不変式の概念の多様な拡張は，代数的不変式の理論から自然に導きだされるものであるが，その代数的不変式論は，きわめて単純な観察から生み出された．Boole[11]についての章でも指摘するが，その考えの例は Lagrange[12]の業績のなかに見いだされる．そして Lagrange から Gauss[13]の整数論上の業績へと通じている．しかし，これら二人の学者は，この単純であるが代数学的に注目に値する現象を，自分たちの眼前にしながら，それがより遠大な理論への芽を有しているということには気づかなかったのである．Boole にしても，Lagrange の業績を研究しつづけ，大幅に拡張してゆく途上でそれを発見したのだが，そのことの意義を完全には理解していなかったように思われる．一度ささいな口論があったとき以外は，Sylvester 発見の優先権の問題について，Boole に対して公平で寛大な態度をとった．もちろん，Cayley もその点について，公平であった.」

「上述の単純な観察というのは，2 次方程式を解いてみたことのある人ならだれでも理解することができる．それはただつぎのようなことにすぎないのである．方程式 $ax^2 + 2bx + c = 0$ は重根をもつための必要にして十分な条件は，$b^2 - ac = 0$ が成り

[11] 1815–1864
[12] 1736–1813
[13] 1777–1855

立つことである．ここで変数を１次（分数）変換 $y = (px+q)/(rx+s)$ によって新変数 y に置き換えてみよう．そうすると，x は上式を x について解いた結果，つまり $x = (q-sy)/(ry-p)$ によって置き換えられる．これによって与えられた方程式は y に関する別の方程式へと変換される．この新しい方程式が $Ax^2+2Bx+C=0$ になったとしよう．簡単な代数的計算によって，新しい係数 A, B, C は，前の係数 a, b, c によって次のように表される．

$$
\begin{aligned}
A &= as^2 - 2bsr + cr^2 \\
B &= -aqs + b(qr+sp) - cpr \\
C &= aq^2 - 2bpq + cp^2
\end{aligned}
$$

この式からつぎのことが容易に導かれる（実際に A, B, C を計算しないでも，この結果を論理的に導き出す簡単な方法もあるが，もし必要なら，別に小細工をほどこさない強引な計算によってこの結果を導くことができる）．

すなわち

$$B^2 - AC = (ps-qr)^2(b^2-ac).$$

この b^2-ac は x に関する 2 次方程式の判別式（discriminant）と呼ばれる．したがって，y に関する 2 次方程式の判別式は，B^2-AC である．そしてつぎのことが示されたのである．すなわち，変換後の方程式の判別式は，もとの方程式の判別式に，因数 $(ps-qr)^2$ をかけたものに等しい．このかけられる因数は，変数 x を新変数 y に変える１次変換 $y=(px+q)/(rx+s)$ の係数 p, q, r, s にしか関係しない.」

「このささいな事実のなかに，注目すべき何物かがあることに最初にきづいたのは Boole であった（1841 年）．すべての代数方程式は，判別式をもっている．それは，方程式の係数から作られる一定の形の式（例えば2次方程式に対しては，b^2-ac）であって，方程式の二つまたはそれ以上の根が等しい場合に，またそのときにかぎって 0 となる．Boole は，はじめにつぎのような疑問をもった．どんな方程式においても，x を，前述の 2 次方程式の場合と同じような関係にある新変数 y でおきかえる場合，変数の際に用いられた係数だけからなる因数を除外すれば，判別式に変化がないのではないだろうか，と．かれは，実際にそれが変化しないことを発見した．つぎにかれは，こういう疑問をもった．すなわち，係数からできている式で，１次変換のもとで不変という特性をもっているものが，判別式以外にはないものだろうか，と．かれは，一般4次方程式に対して，そのような式が二つあることを見いだした.（以下略）」

いくつか補足しよう．上で根と言ってるのは方程式の解のことである．n 次方程式 $a_o x^n + \cdots = 0$ の解を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とするとき，それらの差積の平方 $\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2$ は解の対称式である．よって，解と係数の関係と定理1より，a_0 以外の係数 $a_1, \ldots, a_n$ を a_0 で割ったものの多項式で表される．これに a_0^{2n-2} をかけたもの $a_0^{2n-2}\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2$ は係数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ の多項式である．これが，上で判別式と呼んでいるものである． 3

次方程式，４次方程式

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0, \quad ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0$$

の判別式はつぎの行列式で表される（次数が一般の場合も同様）.

$$-3^3\begin{vmatrix} a & 2b & c & \\ & a & 2b & c \\ b & 2c & d & \\ & b & 2c & d \end{vmatrix}, \quad 4^4\begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & & \\ & a & 3b & 3c & d & \\ & & a & 3b & 3c & d \\ b & 3c & 3d & e & & \\ & b & 3c & 3d & e & \\ & & b & 3c & 3d & e \end{vmatrix}$$

「一般の4次方程式」と言っているのは係数に出てくる a,b,c,d,e 等を数値ではなく独立な変数（不定元）とみているということである.

現代流に方程式の不変式を定義して上の文章をより良く理解しよう．まず，因子 $ps-qr$ は目障りなので１次変換 $y=(px+q)/(rx+s)$ は $ps-qr=1$ なるものだけを考えることにする．2次方程式の不変式とは上の記号に従うと，3変数 a,b,c の多項式 $f(a,b,c)\in K[a,b,c]$ であって

$$f(as^2-2bsr+cr^2, -aqs+b(qr+sp)-cpr, aq^2-2bpq+cp^2)=f(a,b,c)$$

がすべての $p,q,r,s\in K$（$ps-qr=1$）に対して成立するもののことである．言い換えると，3次正則行列の集合

$$G(2):=\left\{\begin{pmatrix} s^2 & -2sr & r^2 \\ -qs & qr+sp & -pr \\ q^2 & -2pq & p^2 \end{pmatrix} \mid ps-qr=1\right\}\subset GL(3,K) \tag{2}$$

に関する不変式である．これは行列の積や逆行列に関して閉じている．すなわち，部分群になっている．しかし，有限群ではない.

Booleが発見したのは（2）の不変式環 $K[a,b,c]^{G(2)}$ が判別式 b^2-ac で生成されるということである．一般の d に対しても部分群 $G(d)\subset GL(d+1,K)$ が同様に定義され，それによる不変式が方程式の（係数の）不変式と呼ばれる．3次方程式の場合にも不変式環 $K[a,b,c,d]^{G(3)}$ は判別式で生成されるが，4次方程式の不変式環 $K[a,b,c,d,e]^{G(4)}$ ではそうでないということまでBooleは発見した．有限群ではないにもかかわらず，Molienの公式の類似が成立する．これを使ってBooleの発見した定理を証明してみよう.

d 次方程式の係数の不変式で係数に関して斉次 e 次のものの全体は K ベクトル空間をなす．これの次元を $m(d,e)$ で表そう．不変式環のHilbert級数は $\sum_{e\geq 0} m(d,e)t^e$ である．つぎがMolien公式の類似である.

Cayley-Sylvester の個数公式　$m(d,e)$ はつぎの有理式を U のべき級数に展開したときの $U^{de/2}$ の係数に等しい．（de が奇数のとき $m(d,e)$ は零である）

$$\frac{(1-U^{e+1})(1-U^{e+2})\cdots(1-U^{d+e})}{(1-U^2)\cdots(1-U^d)}$$

$[*]_a$ でもって式$*$を展開したときの U^a の係数を表そう．

計算例　$d=4$ としよう．

$$m(4,e)=\left[\frac{(1-U^{e+1})(1-U^{e+2})(1-U^{e+3})(1-U^{e+4})}{(1-U^2)(1-U^3)(1-U^4)}\right]_{2e}$$

の分子の $(2e+1)$ 次以上の項は無視してよい．よって

$$m(4,e)=\left[\frac{1-U^{e+1}-U^{e+2}-U^{e+3}-U^{e+4}}{(1-U^2)(1-U^3)(1-U^4)}\right]_{2e}$$

$$=\left[\frac{1}{(1-U)(1-U^{3/2})(1-U^2)}\right]_e-\left[\frac{U+U^2+U^3+U^4}{(1-U^2)(1-U^3)(1-U^4)}\right]_e$$

$$=\left[\frac{1+U^{3/2}}{(1-U)(1-U^2)(1-U^3)}\right]_e-\left[\frac{U}{(1-U)(1-U^2)(1-U^3)}\right]_e=\left[\frac{1}{(1-U^2)(1-U^3)}\right]_e$$

をえる．

上より不変式環の Hilbert 級数は $1/(1-t^2)(1-t^3)$ である．とくに次数 2 と 3 の不変式の存在がわかる．計算は略するが，それらは

$$g_2=ae-4bd+3c^2,\quad g_3=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$$

である[14]．これらは代数的に独立で，それらの生成する部分環 $K[g_2,g_3]$ の Hilbert 級数はそれだけで $1/(1-t^2)(1-t^3)$ である．よって，上の個数公式より次をえる．

4 次方程式の不変式環 $K[a,b,c,d,e]^{G(4)}$ は g_2 と g_3 で生成される．

例えば，4 次式の判別式は $g_2^3-27g_3^2$ と表される．g_2,g_3 を用いることによって，複素係数の 4 次方程式はつぎのように分類される．

[14]後者は Hankel 行列式とか catalecticant と呼ばれる．

2つの4次方程式

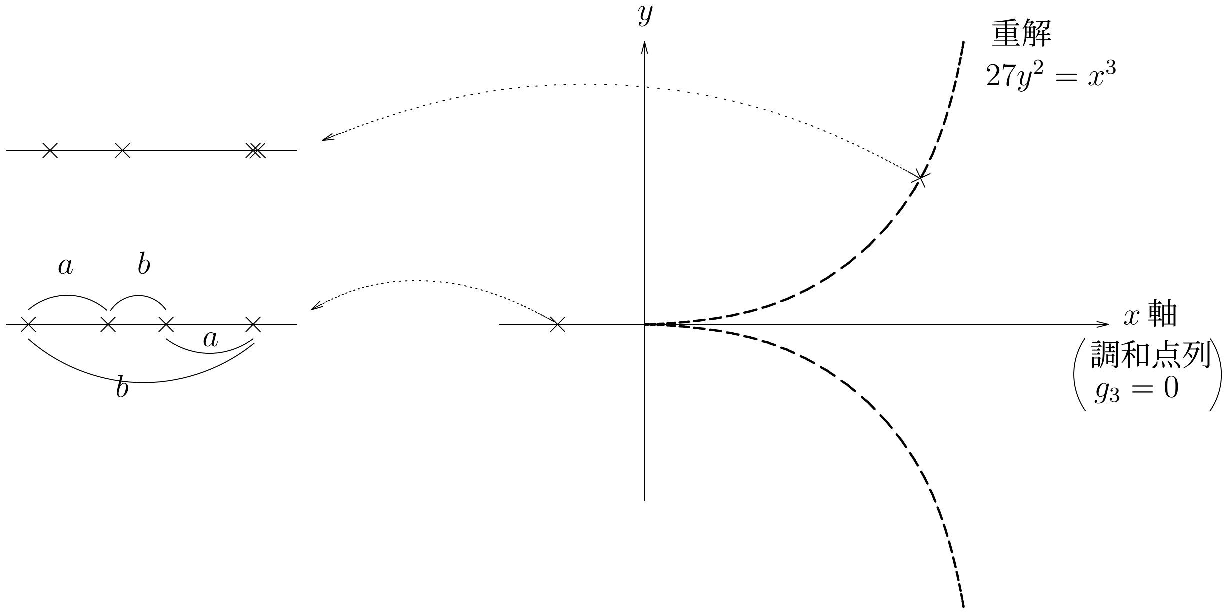
$$A(x) = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$
$$A'(x) = a'x^4 + 4b'x^3 + 6c'x^2 + 4d'x + e' = 0$$

は重解をもたないとする.（ここでは $a, b, \ldots, d', e'$ は複素数とする.）このとき

$$g_2 = g_2', \quad g_3' = g_3'$$

なら $A(x) = 0$ と $A'(x) = 0$ は $G(4) \subset GL(5, \mathbf{C})$ に属する変数変換で移り合う.

不変式 g_2, g_3 により，重解をもたない4次方程式の変換同値類は $\mathbf{C}^2$ から曲線 $27y^2 = x^3$ を取り除いたの部分でパラメータ付けられる.



4次式のパラメータ空間（モジュライ）

注意　2次，3次不変式の消滅 $g_2 = 0, g_3 = 0$ は4次方程式 $A(x) = 0$ の4つの解の複比（cross ratio）が調和（harmonic）なこと，等非調和（equianharmonic）なこととそれぞれ対応している．2重被覆としてえられる（2次）楕円曲線 $E : y^2 = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e$ の言葉でいうと，E が位数4，6の（固定点をもつ）自己同型をもつことと対応する.（それ以外の場合は位数2しかもたない.）

ここで説明した不変式環の決め方は次数 d が大きくなるとすぐ難しくなる．また，不変式環の次元（説明は略すがこの場合は $d-2$）に比べて生成元の個数がどんどん増え，

環構造がきたなくなる．次の不変式環はきれいな方だが，それでも計算は容易ではない（塩田徹治 [Sh]）．

8 次方程式の不変式環は 9 個の不変式 $J_2, \ldots, J_{10}$（添字は次数を表わす）で生成される．

4 重解をもたない 8 次方程式はこれらの 9 個の不変式の値で分類される．

この種の計算に没頭した Cayley は一時期，次数 d が大きいと有限生成でないと思ったこともあったらしいが，やがて次が示された．

Gordan の定理（1868 年）　方程式の不変式環 $K[a_0, a_1, \cdots, a_d]^{G(d)}$ は有限生成である．

§8　第 14 問題に対する永田の反例

いろんな計算の経験を積んでいくうちに不変式環 S_n^G はいつも有限個の元（多項式）で生成されるのではないかという期待が涌いてくる．これを G が有限群の場合に示すことは易しい（§5）．しかしそうでない場合は一筋縄ではいかない．前節の Gordan の定理も元の証明は複雑である．Hilbert はこの定理を一般化し，証明を非常に透明にした（Hilbert の有限生成性定理）．現代代数学の多くがこの辺りの仕事に源をもっている．現在では G が簡約代数群と呼ばれる場合（有限群や $GL(m), SL(m)$ を含む）にこの期待通りであることが示されているが，その証明のアイデアは Hilbert(1890) のものから変化していない．Hilbert は彼の結果に勇気づけられて群 G がどんな場合でも有限生成だろうと上のナイーブな期待を彼の「数学の 23 問題」[15]の一つとして提出した．そこでの番号付けにしたがって，以後この期待は第 14 問題と呼ばれている．これが Hilbert の第 14 問題（§5）の歴史的背景である．Hilbert とは違ったアイデアでもって新しい有限生成定理を見つけるのは 21 世紀の問題のひとつだろう（[M2, §6]）．

Hilbert は不変式から整数論やその他の分野に研究領域を変え，不変式論に戻ってくることはなかった．そのため彼自身がこの問題についてどう考えていたかはわからない．その後，Zariski[Z]，Rees[Re]，永田を始めとする数学者（代数幾何や可換環論）達によって解決への努力がなされた．そして，永田 [N] は 1958 年にこの問題の反例を構成することに成功した．この論文から近年えることができたメッセージは次の通りである．

♠　整数の比として表せない数，すなわち無理数がある．例えば $\sqrt[3]{2}$．変数変換（あるいは行列）のなす部分群を「無理数的」にとれば不変式環は無限生成になってしまう．

無理数の発見はピタゴラス教団の人達を混乱させたそうが，上の発見も多くの人を失望させた（あるいはさせ続けている）と想像する．Klein の Erlangen 目録として知

[15] いろんな書物が出版されている．最近の本では [Gr] がある．

られるように幾何学の一つの見方は図形等の性質で変換群で不変な（座標の取り方によらない）ものを研究するというものである．[16]（前節の場合だと方程式自身やそれの零点集合の１次変換で不変な性質.）二つの図形が変換群で移り合うかどうかはそれらの不変量（不変式に座標を代入してえられる値）を調べることになるが，不変式環が無限生成だと有限時間内では図形が変換群で移り合うかどうか判定ができないことになってしまう．これは第 14 問題の反例の否定的な面だが，ここではこれ以上考えない．少し高級ではあるが永田の反例を [St] や [M1] で簡易化された形で紹介していこう．永田型の不変式環を定義して変数の数が充分大きいと不変式環が有限生成でなくなるということを示したい．変数の数はいつも偶数である．今までの記号使いを変更することになるが，変数の個数を $2n$ とし，x と y が対になって出て来る $2n$ 変数多項式環 $K[x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n]$ における不変式を考える．その出発点となるのは次の場合である．

「第 1 基本定理」と呼ばれるもの　n 個の 2 次正則行列の直和

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

による不変式

$$f(x_1, x_1 + y_1, \ldots, x_n, x_n + y_n) = f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$$

の全体 $K[x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n]^A$ を考える．明らかに $x_1, \ldots, x_n$ は A 不変式である．それ以外に $(2, n)$ 行列

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix}$$

の 2 次小行列式 $p_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}$，$1 \leq i < j \leq n$，も A 不変式である．

定理 9. 不変式環 $K[x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n]^A$ は $x_1, \ldots, x_n$ と p_{ij} （$1 \leq i < j \leq n$）で生成される．[17]

A は位数無限であることに注意しよう．多項式が A 不変であることはすべての $t \in K$ に対して

$$f(x_1, x_1 + ty_1, \ldots, x_n, x_n + ty_n) = f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$$

が成立することとも同値である．

[16]「物理法則とは観測者の座標系によらないものである」もこれに似た言明である．
[17]この結果を方程式の不変式に応用することができる．時間があれば説明したい．

永田型作用と反例　永田型のアイデアはこのような A（互いに可換）を増やしていくことにある．例えば，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を相異なる定数として，n 個の 2 次正則行列のつぎのような直和

$$A' = \bigoplus_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_i & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．$x_1, \ldots, x_n$ 以外に $(3, n)$ 行列

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \ldots & \lambda_n x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix}$$

の 3 次小行列式も $\{A, A'\}$ 不変式である．残念ながらこれらでは不変式環は生成されないが，代数幾何学的な手法でつぎが示せる．

定理 10. 不変式環 $K[x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n]^{\{A, A'\}}$ は有限生成である．

さて，反例であるが，$n = 9$ とし，

$$A' = \bigoplus_{i=1}^{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad A'' = \bigoplus_{i=1}^{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt[3]{i} & 1 \end{pmatrix}$$

とおく．

定理 11. 不変式環 $K[x_1, y_1, \ldots, x_9, y_9]^{\{A, A', A''\}}$ は有限生成ではない．

永田 [N] で発見されたのは $n = 16$ で 13 個の $A, A', \ldots$ に関する不変式環であるが，(線形作用では）今のところ上が最も簡単な反例であろう．証明には平面 3 次曲線の幾何学が用いられる．また，9 個の実数 $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots, \sqrt[3]{9}$ が有理数体の上で 1 次独立であることも証明の一つのポイントである．

$- - - - - - - - - - - - -$

演習問題の答　$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$ は対称式．基本対称式を使って $s_1^3 - 4s_1 s_2 + 8s_3$ と表される．

参考文献

[Be]　Bell, E.T.: 数学を作った人びと（邦訳），東京図書，1963 年.（新版，1997 年）

[Gr]　Gray, J.: Hilbert の挑戦：世紀を超えた 23 の問題（邦訳），青土社，2003 年.

[Kl] Klein, F.: 正20面体と5次方程式（邦訳），Springer-Verlag 東京, 1993年.

[M1] Mukai, S.: An Intoduction to Invariants and Moduli, Cambridge Univ. Press, 2003: モジュライ理論１，２（岩波書店，1998年,2000年）の W. Oxbury 氏による英訳.

[M2] — : 代数曲線と「曲面」をめぐって，数理科学，サイエンス社，2001年，pp. 56-64.（数学の未解決問題，SGC ライブラリ **21**，2003年に再録）

[M3] — : 不変式とモジュライ,「数学のたのしみ」所収，日本評論社，2001年，pp. 29–41.

[N] Nagata, M.: On the fourteenth problem of Hilbert, Int'l Cong. Math., Edingburgh, 1948.

[Re] Rees, D.: On a problem of Zariski, Illinoi J. Math. **2**(1958), 145–149.

[Ro] Roberts, P.: An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's 14th problem, J. Algebra, **132** (1990), 461–473.

[Se] Seshadri, C. S.: On a theorem of Weitzenböck in invarinat theory, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1962), 403–409.

[Sh] Shioda, T.: On the graded ring of invariants of binary octavics, Amer. J. Math. **89**(1967), 1022-1046.

[St] Steinberg, R.: Nagata's example, in *'Algebraic Groups and Lie Groups'*, Austral. Math. Soc. Lect. Ser. **9**, Cambridge Univ. Press, 1997, pp. 375–384.

[Z] Zariski, O.: Interpretation algebro-geometriqes du quatroziemme probleme de Hilbert, Bull. Sci. Math.**78**(1954), 166–164.

京都大学数理解析研究所
606-8502 京都市左京区北白川追分町
e-mail：`mukai@kurims.kyoto-u.ac.jp`