

## この結び目はほどけるか?

大槻 知忠

ひもを結ぶと結び目ができます。結び方を変えると、できる結び目もさまざまです。では、どれくらい多様な結び目があるのでしょうか? 変形して互いにうつりあう結び目を同じ結び目とみなして、数学的対象として結び目を研究する分野を結び目理論といいます。ひもの両端が閉じられていないと、ひもの端点をからまっている部分にくぐらせてからまりをほどいていくことにより、すべての結び目はほどけてしまいます。そこで、ひもの両端をつないで輪にしたものを考えて、以下ではそういうものを「結び目」ということにします。

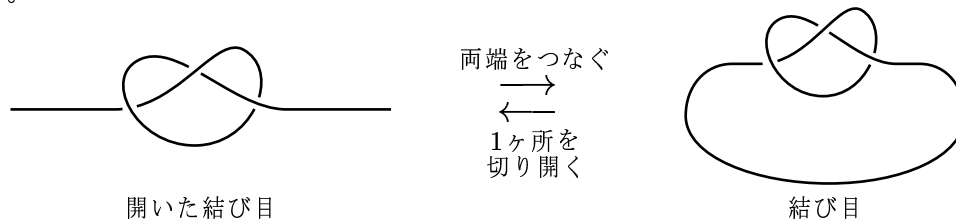


図 1: 「開いた結び目」と「結び目」

与えられた2つの結び目が同じかどうかはどのようにして判定すればよいのでしょうか? たとえば、図2の結び目はほどけるのでしょうか? 結び目理論の究極の問題は「結び目を分類せよ」という問題ですが、結び目の分類表をつくらうとおもうと、「同じ結び目が確かに同じであること」と「ちがう結び目が確かにちがうということ」を示すことが基本的な問題になります。「与えられた同じ結び目が同じであること」を示すのは比較的簡単ですが、「与えられたちがう結び目が確かにちがうということ」を示すのはあまり簡単ではありません。これを示すときに不変量というものが見つかわれます。

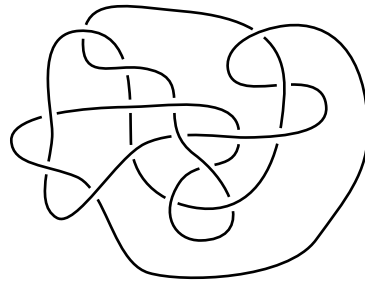


図 2: この結び目はほどけるか? ([6] 参照)

歴史的には1980年代に数理解析的手法が位相幾何学の研究に導入されこの頃に大量の結び目不変量が発見されました。以下ではそのような不変量も含めて、結び目の不変量がどのように構成されるのかを解説します。

# 1 結び目と図式

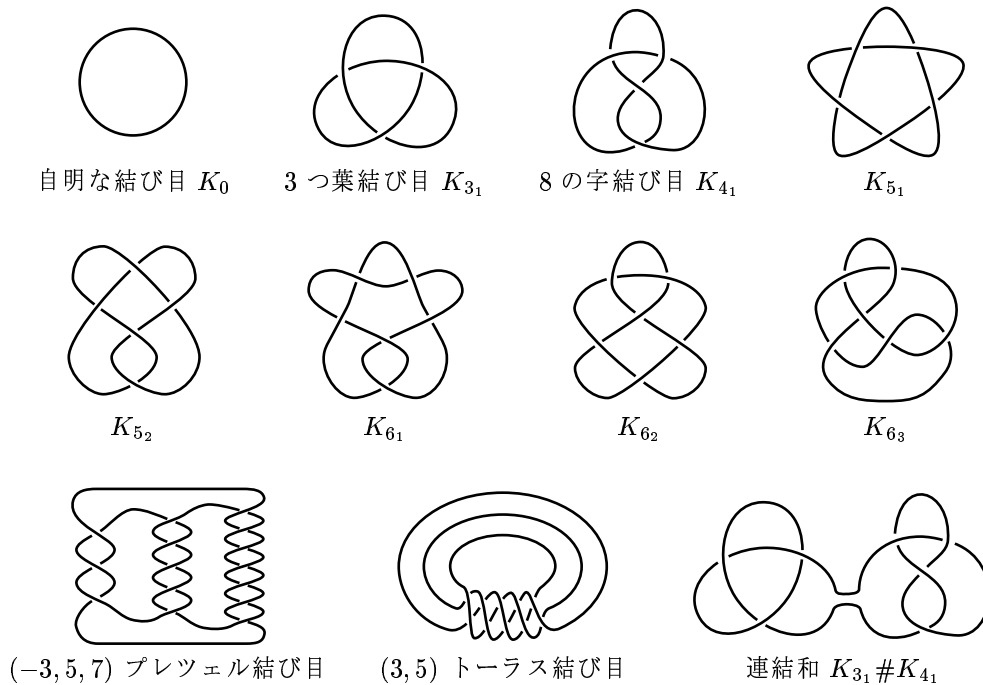
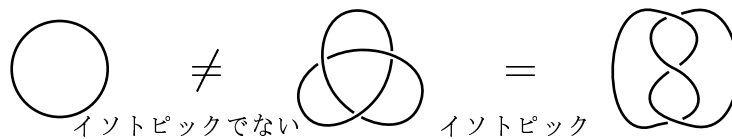


図 3: 結び目の例 (たとえば, [1] 参照)

円周を3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  にうめこんだ図形を**結び目**といいます。円周をうめこむときには、たとえば図3の例のように、一般にひもを結んでうめこんだものを考えます。ひもが自己交差しないように連続的に変形してうつりあう2つの結び目を**イソトピック**であるといい、変形する過程を**イソトピー**といいます。イソトピックな結び目は同じ結び目とみなします。たとえば、



のようになります。

「イソトピックな結び目がイソトピックであること」は実際に変形してみせることによって示すことができます。逆に、「イソトピックでない結び目がイソトピックでないこと」を示すのは単純な問題ではありません。試行錯誤をくりかえして一方からもう一方へ変形できなかつたとしても、それをもって「イソトピックでない」ことを証明したことはありませんからです。2つの結び目がイソトピックでないことを示すためには後述の不変量が有用です。

結び目を平面に射影してひもが交差するところに上下をつけた図を結び目の**図式**といいます。結び目の図式において上下をつけてかいた交差(すなわち、下のひもを少し切つて描いた交差)のことを**交点**といいます。図式の交点のつながり具合をかえないように

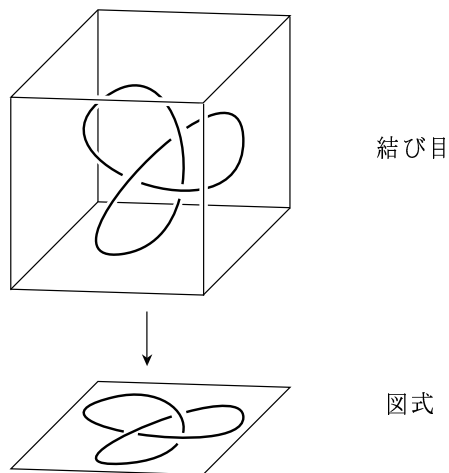
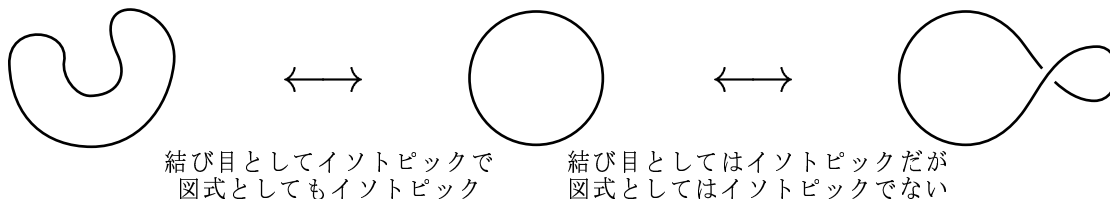


図 4: 結び目とその図式

(新たな自己交差がおこらないように) 連続的に変形してうつりあう2つの図式を**イソトピック**であるといい、変形する過程を**イソトピー**といいます。結び目の絵も結び目の図式の絵も紙や黒板にかくと同じような絵になりますが、「結び目」と言ったときは3次元空間内の図形を考え、「図式」と言ったときは平面内の図形を考えていることに注意してください。とくに、結び目がイソトピックであることと図式がイソトピックであることには



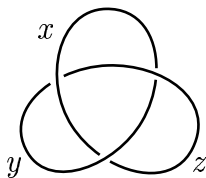
のような違いがあります。

## 2 $p$ 彩色

2以上の整数  $p$  を1つ固定します。整数  $a, b$  について、 $a - b$  が  $p$  で割りきれるとき、 $a$  と  $b$  は  $p$  を法にして合同と言い、 $a \equiv b \pmod{p}$  とかきます。結び目の図式の絵でひもがきれずにつながって描かれている部分を**上の道**といいます。結び目の図式において、各「上の道」に0以上  $p - 1$  以下の整数を配置し、各交点のまわりで

$$\begin{array}{c}
 c \\
 \diagdown \quad \diagup \\
 a \quad \quad b
 \end{array}
 \qquad
 2a \equiv b + c \pmod{p}$$

のようになっているとき、その配置を  $p$  彩色といいます。たとえば、3つ葉結び目の図式に  $x, y, z \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  を



のように配置して、これらが

$$\begin{cases} 2x \equiv y + z \\ 2y \equiv x + z \\ 2z \equiv x + y \end{cases}$$

をみたすとき、その配置は  $p$  彩色になります。

$p$  彩色の個数を数えてみましょう。上の例だと、次の合同式

$$2x - y \equiv z \equiv 2y - x$$

を解けばよいので、

$$3(x - y) \equiv 0$$

に帰着されます。 $p$  が 3 の倍数ではないとき、 $x - y \equiv 0$  となり、解は  $(x, y, z) = (a, a, a)$  ( $a = 0, 1, \dots, p-1$ ) で  $p$  個あります。 $p$  が 3 の倍数のとき  $x - y \equiv 0, \frac{1}{3}p, \frac{2}{3}p$  となり、解は  $(x, y, z) \equiv (a, a, a), (a, a - \frac{1}{3}p, a + \frac{1}{3}p), (a, a + \frac{1}{3}p, a - \frac{1}{3}p)$  ( $a = 0, 1, \dots, p-1$ ) で  $3p$  個あります。じつは、一般に、任意の図式  $D$  について、その  $p$  彩色の個数は  $p$  で割りきれることが (少し考えると) わかります。そこで、

$$C_p(D) = \frac{1}{p} \times (\text{図式 } D \text{ の } p \text{ 彩色の個数})$$

で  $C_p$  を定め、これを  $p$  彩色数とよぶことにします。たとえば、上述の例では

$$C_p(\text{三葉結び目}) = \begin{cases} 3, & p \text{ が } 3 \text{ の倍数のとき} \\ 1, & p \text{ が } 3 \text{ の倍数でないとき} \end{cases}$$

となります。

### 3 ライデマイスター移動

一般に、イソトピックな結び目がイソトピックでない図式をもつこともあります。そのような場合、それらの図式は次のような局所変形 (ライデマイスター移動とよばれます) で関係づけられることが知られています。

**定理 1 (ライデマイスターの定理)** (たとえば、[1, 8] を参照)。  $K$  と  $K'$  を結び目として、  $D$  と  $D'$  をそれらの図式とします。このとき、「 $K$  と  $K'$  がイソトピックであること」と「 $D$  と  $D'$  が図式のイソトピーと  $RI, RII, RIII$  移動を繰り返してうつりあうこと」は同値になります。

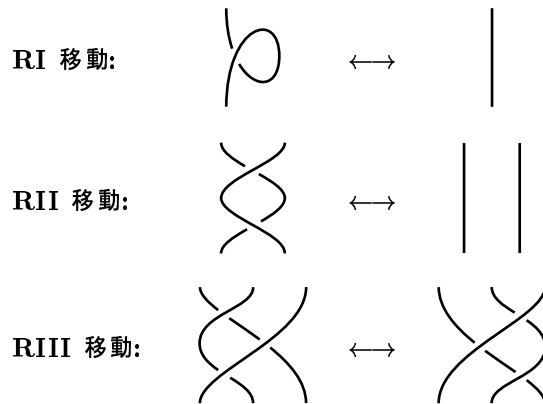
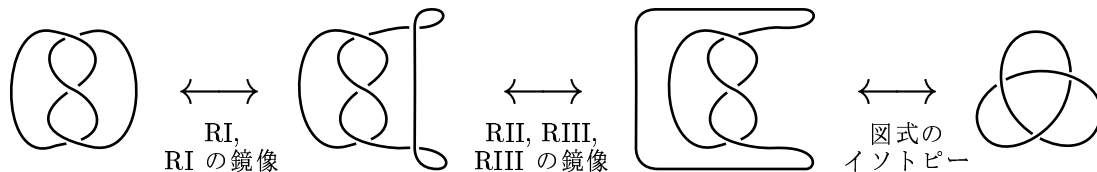


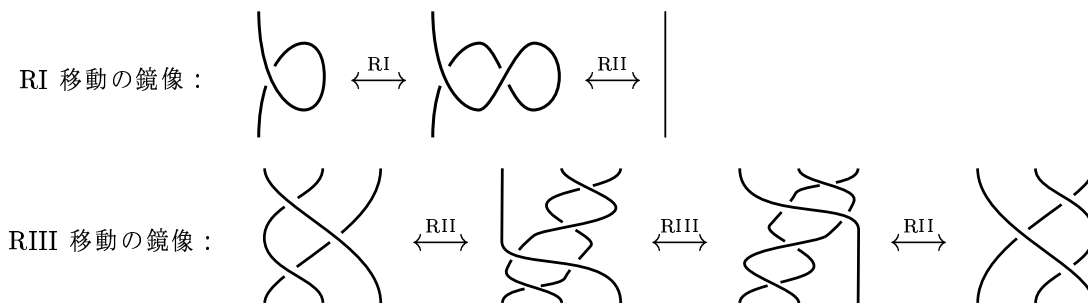
図 5: ライデマイスター移動

たとえば、次の左辺と右辺の結び目はイソトピックで、それらの図式はライデマイスター移動をもちいて次のように変形されます。



**定理 1 の証明の概略.** 図式  $D$  と  $D'$  が RI, RII, RIII 移動でうつりあうとき、それらが表す結び目  $K$  と  $K'$  がイソトピックであることは、図よりすぐに見て取れます。

逆に、 $K$  と  $K'$  がイソトピックとします。 $K$  から  $K'$  を得る変形にしたがって空間内でひもをうごかしていったときに、図式におこる局所的な変形のタイプをすべて列挙すると、それらは RI, RII, RIII 移動と RI, RIII 移動の鏡像であることがわかります。さらに、RI, RIII 移動の鏡像は RI, RII, RIII 移動から次のように実現されます。



よって、 $K$  の図式  $D$  にライデマイスター移動を何回かほどこして  $K'$  の図式  $D'$  を得ることができます。□

## 4 $p$ 彩色数が不変量であること

よくわかっている集合  $S$  (たとえば、整数の集合や多項式の集合) について、

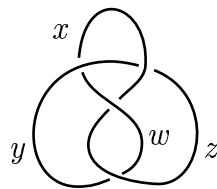
$$\text{写像 } I: \{\text{結び目}\} \rightarrow S$$

が「 $K$  と  $K'$  がイソトピックならば  $I(K) = I(K')$ 」という性質をみたすとき、 $I$  を結び目のイソトピー不変量といいます。

**定理 2.**  $K$  を結び目とし、 $D$  をその図式とします。 $p$  彩色数  $C_p(D)$  は  $D$  のとり方によらず、よって  $K$  のイソトピー不変量になります。

**証明の方針.** ライデマイスター移動 RI, RII, RIII のそれぞれで  $C_p(D)$  が不変であることをチェックすることにより定理は証明されます。□

$p$  彩色数について、他の例をみてみましょう。8 の字結び目の場合は、その図式に、 $x, y, z, w \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  を



のように配置して、これらが

$$\begin{cases} 2x \equiv y + z \\ 2y \equiv x + w \\ 2z \equiv y + w \\ 2w \equiv x + z \end{cases}$$

をみたすとき、その配置は  $p$  彩色になります。これらの連立方程式は

$$\begin{cases} 5(x - y) \equiv 0 \\ z \equiv 2x - y \\ w \equiv 2y - x \end{cases}$$

に帰着され、よって  $p$  彩色数は

$$C_p(K_{4_1}) = \begin{cases} 5, & p \text{ が } 5 \text{ の倍数のとき} \\ 1, & p \text{ が } 5 \text{ の倍数でないとき} \end{cases}$$

のように表されます。さらに、図 3 の結び目について同様に計算すると、それらの  $p$  彩色数は表 1 のようになります。

$p$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$K_{3_1}$		3			3			3			3			3			3			3	
$K_{4_1}$				5					5					5					5		
$K_{5_1}$				5					5					5					5		
$K_{5_2}$						7							7								7
$K_{6_1}$		3			3			3			3			3			3				3
$K_{6_2}$										11											11
$K_{6_3}$												13									

表 1:  $p$  彩色数  $C_p(K)$  の値。空欄は 1 である。([4] 参照)

表 1 から、結び目  $K_{3_1}, K_{4_1}, K_{5_1}, K_{5_2}, K_{6_1}, K_{6_2}, K_{6_3}$  はそれぞれ 3, 5, 5, 7, 3, 11, 13 という数を結び目固有の量としてもっているらしい、ということが見て取れます。じつは、少し専門的な内容になりますが、3次元球面の  $K$  で分岐する2重分岐被覆空間  $M_2(K)$  の1次のホモロジー群  $H_1(M_2(K))$  をもちいて、 $p$  彩色数は

$$C_p(K) = \left( \text{準同型 } H_1(M_2(K)) \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ の個数} \right)$$

のように表されることが (がんばって考察すると) わかります。すなわち、

$$H_1(M_2(K_{3_1})) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$H_1(M_2(K_{4_1})) = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

$$H_1(M_2(K_{5_1})) = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

$$H_1(M_2(K_{5_2})) = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

$$H_1(M_2(K_{6_1})) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$H_1(M_2(K_{6_2})) = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$$

$$H_1(M_2(K_{6_3})) = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$$

であるという意味で、それらの数は結び目がもつ固有の量になっています。

ちなみに、すべての  $p$  について

$$C_p((-3, 5, 7) \text{ プレツェル結び目}) = 1$$

であるため、 $p$  彩色数は  $(-3, 5, 7)$  プレツェル結び目と自明な結び目を区別できません。 $p$  彩色数が区別できない結び目の対はたくさんあり、 $p$  彩色数は (構成方法は簡明ですが) 不変量としては弱い不変量です。

## 5 ジョーンズ多項式

結び目の図式  $D$  に対して、カウフマン括弧式  $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  が次の漸化式によって定められます。

$$\langle \text{X} \rangle = A \langle \text{ } \rangle + A^{-1} \langle \text{ } \rangle$$

$$\langle \bigcirc D \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle$$

$$\langle \text{空な図式 } \emptyset \rangle = 1$$

第1式の3つの図は、図式が部分的に図のようになっていて図の部分以外は同じであるような3つの図式を表しています。第1式をつかって図式のすべての交点を再帰的に解消することができます。第2, 3式は、互いに交わらない  $n$  個の輪からなる図式の値は  $(-A^2 - A^{-2})^n$  であることを意味します。これらの式により、任意の図式  $D$  に対してそのカウフマン括弧式の値  $\langle D \rangle$  が定まります。たとえば、3つ葉結び目の図式のカウフマン括弧式の値は次のように計算されます。

$$\begin{aligned} \langle \text{3つ葉結び目} \rangle &= A \langle \text{ } \rangle + A^{-1} \langle \text{ } \rangle \\ &= A^2 \langle \text{ } \rangle + \langle \text{ } \rangle + \langle \text{ } \rangle + A^{-2} \langle \text{ } \rangle \\ &= A^3 \langle \text{ } \rangle + A \langle \text{ } \rangle + A \langle \text{ } \rangle + A^{-1} \langle \text{ } \rangle \\ &\quad + A \langle \text{ } \rangle + A^{-1} \langle \text{ } \rangle + A^{-1} \langle \text{ } \rangle + A^{-3} \langle \text{ } \rangle \\ &= A^3(-A^2 - A^{-2})^3 + A(-A^2 - A^{-2})^2 + A(-A^2 - A^{-2})^2 + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) \\ &\quad + A(-A^2 - A^{-2})^2 + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + A^{-3}(-A^2 - A^{-2})^2 \\ &= (-A^2 - A^{-2})(A^7 - A^3 - A^{-5}) \end{aligned}$$

カウフマン括弧式から結び目の不変量が得られるのでしょうか？ もしカウフマン括弧式がライデマイスター移動 RI, RII, RIII で不変であったとしたら、結び目の不変量が得られたことになります。RI, RII, RIII 移動での不変性をチェックしてみましょう。まず、RI 移動での不変性について計算してみると、

$$\langle \text{RI移動} \rangle = A \langle \text{ } \rangle + A^{-1} \langle \text{ } \rangle = -A^3 \langle \text{ } \rangle$$



のようになります。残念ながら、RI 移動の両辺の図式のカウフマン括弧式は等しくありません (が、後述のようにこれは補正可能です)。次に、RII 移動での不変性は

$$\begin{aligned} \langle \text{RII} \rangle &= A \langle \text{RII} \rangle + A^{-1} \langle \text{RII} \rangle \\ &= A \left( -A^{-3} \langle \text{RII} \rangle \right) + A^{-1} \left( A \langle \text{RII} \rangle + A^{-1} \langle \text{RII} \rangle \right) = \langle \text{RII} \rangle \end{aligned}$$

のようにチェックされます。さらに、RIII 移動での不変性について計算すると、

$$\begin{aligned} \langle \text{RIII} \rangle &= A \langle \text{RIII} \rangle + A^{-1} \langle \text{RIII} \rangle \\ \langle \text{RIII} \rangle &= A \langle \text{RIII} \rangle + A^{-1} \langle \text{RIII} \rangle \end{aligned}$$

のようになり、それぞれの式の最後の括弧式は RII 移動での不変性より  $\langle \text{RII} \rangle$  に等しくなり、したがって RIII 移動での不変性がわかります。以上の議論をまとめると、カウフマン括弧式  $\langle D \rangle$  は、RII, RIII 移動で不変であり、RI 移動で若干変化することがわかります。

RI 移動でも不変にするために、この変化分を以下のようにして補正することを考えます。結び目のひもに向きをつけたものを **向きつき結び目** といい、向きつき結び目の図式を **向きつき図式** といいます。向きつき図式の交点について、 $\times$  を **正の交点**、 $\times$  を **負の交点** といいます。向きつき図式  $D$  の **ねじれ**  $w(D)$  を

$$w(D) = (D \text{ の正の交点の数}) - (D \text{ の負の交点の数})$$

で定めます。たとえば、 $w(\text{結び目}) = -3$  になります。

**定理 3.**  $K$  を向きつき結び目とし、 $D$  をその図式とします。このとき、

$$(-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$$

は  $D$  のとり方によらず、 $K$  のイソトピー不変量になります。

定理の式の値は、定義より  $(-A^2 - A^{-2})$  で割りきれ、その商の多項式は  $A$  のべきが 4 の倍数であるような項からなることが (少し考察すると) わかります。そこで、 $A^4 = t^{-1}$  と変数変換をして、

$$V_K(t) = (-A^2 - A^{-2})^{-1} (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle \Big|_{A^4=t^{-1}} \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

とおき、 $V_K(t)$  を向きつき結び目  $K$  の **ジョーンズ多項式** といいます。結び目のジョーンズ多項式の値は結び目の向きのつけ方によらないことに注意すると、たとえば、図 3 の結び目について、

$$\begin{aligned} V_{K_0}(t) &= 1 \\ V_{K_{3_1}}(t) &= t^{-1} + t^{-3} - t^{-4} \\ V_{K_{4_1}}(t) &= t^2 - t + 1 - t^{-1} + t^{-2} \\ V_{K_{5_1}}(t) &= t^{-2} + t^{-4} - t^{-5} + t^{-6} - t^{-7} \\ V_{K_{5_2}}(t) &= t^{-1} - t^{-2} + 2t^{-3} - t^{-4} + t^{-5} - t^{-6} \\ V_{K_{6_1}}(t) &= t^2 - t + 2 - 2t^{-1} + t^{-2} - t^{-3} + t^{-4} \\ V_{K_{6_2}}(t) &= t - 1 + 2t^{-1} - 2t^{-2} + 2t^{-3} - 2t^{-4} + t^{-5} \\ V_{K_{6_3}}(t) &= -t^3 + 2t^2 - 2t + 3 - 2t^{-1} + 2t^{-2} - t^{-3} \end{aligned}$$

のような値をとります(たとえば、[1] を参照)。与えられた結び目のジョーンズ多項式などの多項式不変量の値はコンピュータソフト [2, 5] をつかって計算することもできます。

**定理 3 の証明の方針.** 次の定理の  $\overrightarrow{RI}$ ,  $\overrightarrow{RII}$ ,  $\overrightarrow{RIII}$  移動で  $(-A^3)^{-w(D)}\langle D \rangle$  が不変であることをチェックすることにより、定理が示されます。□

**定理 4 (ライデマイスターの定理 (向きつき版))** (たとえば、[8] を参照)。 $K$  と  $K'$  を向きつき結び目として、 $D$  と  $D'$  をそれらの図式とします。このとき、「 $K$  と  $K'$  がイソトピックであること」と「 $D$  と  $D'$  が図式のイソトピーと  $\overrightarrow{RI}$ ,  $\overrightarrow{RII}$ ,  $\overrightarrow{RIII}$  移動を繰り返してうつりあうこと」は同値になります。

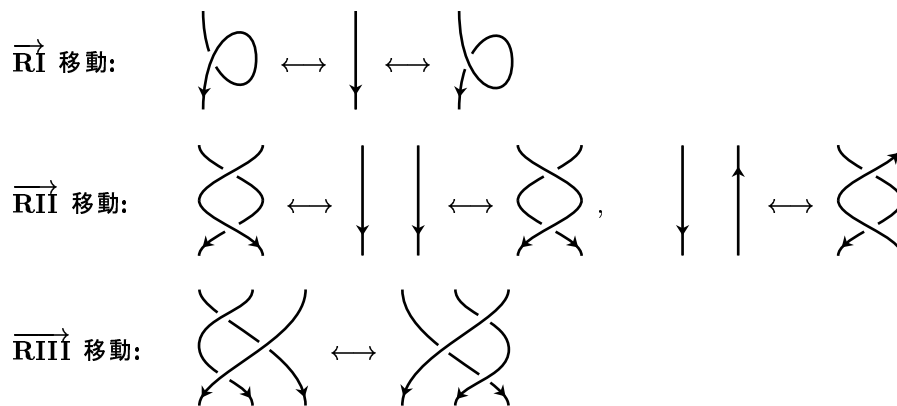


図 6: ライデマイスター移動 (向きつき版)

**証明の考え方.** 向きを無視したとしたら RI, RII, RIII 移動で図式がうつりあうことが定理 1 よりわかります。よって、RI, RII, RIII 移動に任意の向きをつけた移動によって向きつき図式がうつりあうことがわかります。それらの移動をなるべく少ない数の基本移動の合成で実現しようとする、そういう基本移動として  $\overrightarrow{RI}$ ,  $\overrightarrow{RII}$ ,  $\overrightarrow{RIII}$  移動をとればよいことがわかります。□



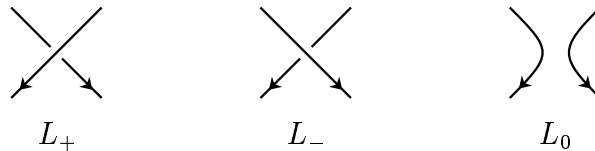
図 7: 向きつき絡み目の例

複数の円周を3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  にうめこんだ図形を絡み目といい、各円周に向きがついているとき向きつき絡み目といいます。ジョーンズ多項式の定義は向きつき絡み目に対して自然に拡張し、向きつき絡み目  $L$  に対してそのジョーンズ多項式  $V_L(t) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$  が定まります。(絡み目に対しては、定理3の式の値を  $(-A^2 - A^{-2})$  で割った商の多項式は  $A$  のべきが2の倍数であるような項からなることがわかり、これを  $A^2 = t^{-1/2}$  で変数変換をしてジョーンズ多項式を定めます。)

**命題 5.** ジョーンズ多項式はスケイン関係式とよばれる次の関係式をみたします。

$$t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t)$$

ここで、 $L_+, L_-, L_0$  は、部分的に下図のようになっていて図の部分以外では同じであるような3つの向きつき絡み目です。



**証明.**  $L_{\pm}, L_0$  の図式を  $D_{\pm}, D_0$  とすると、カウフマン括弧式の定義関係式より

$$A\langle D_+ \rangle - A^{-1}\langle D_- \rangle = (A^2 - A^{-2})\langle D_0 \rangle$$

がわかります。さらに  $w(D_0) = w(D_+) - 1 = w(D_-) + 1$  であることより

$$A^4 \cdot (-A^3)^{-w(D_+)}\langle D_+ \rangle - A^{-4} \cdot (-A^3)^{-w(D_-)}\langle D_- \rangle = -(A^2 - A^{-2}) \cdot (-A^3)^{-w(D_0)}\langle D_0 \rangle$$

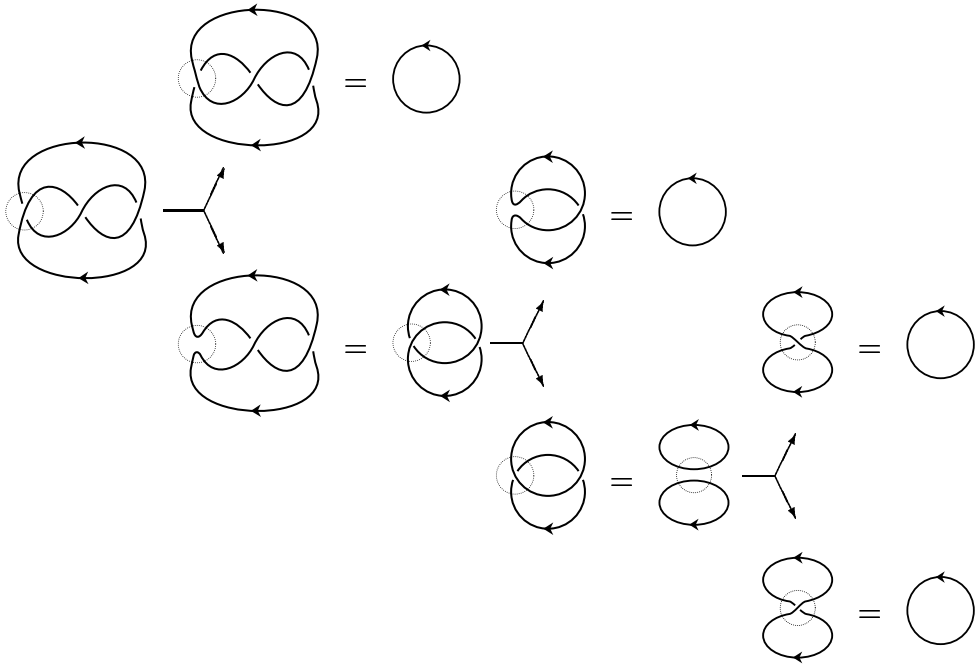
となり、命題の式が得られます。 □

任意の向きつき絡み目のジョーンズ多項式の値はスケイン関係式と自明な結び目の値から完全に決定されます。すなわち、

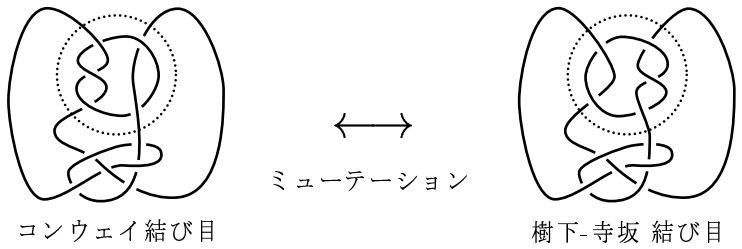
$$\begin{cases} t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t) \\ V_O(t) = 1 \end{cases}$$

をもってジョーンズ多項式の定義だともいうこともできます。結び目のジョーンズ多項式の値の計算がスケイン関係式をもちいて自明な結び目の値に帰着されていく様子は、たと

例えば、3つ葉結び目で図示すると次のようになります。



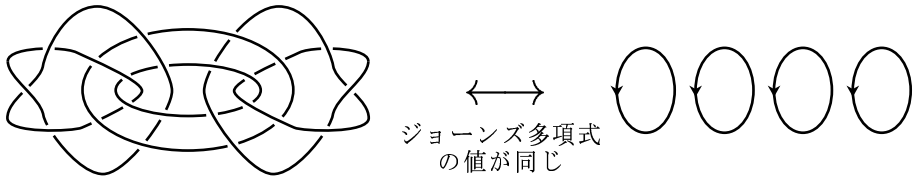
ジョーンズ多項式の値が等しいような結び目の対は多くあることが知られています。そのような対は、たとえば、ミューテーションとよばれる次のような操作で得られます。



しかし、自明な結び目とミューテーションでうつりあうような自明でない結び目は知られていません。

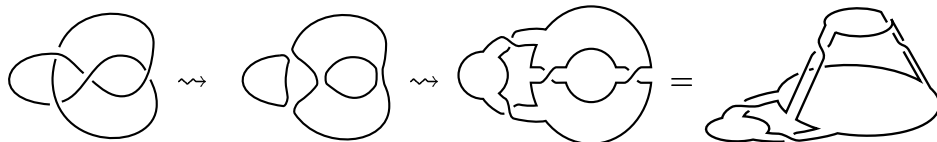
**未解決問題 1.** ジョーンズ多項式は自明な結び目を区別するでしょうか? すなわち、 $V_K(t) = 1$  であるような結び目  $K$  は自明な結び目だけでしょうか?

ちなみに、自明な絡み目とジョーンズ多項式の値が同じであるような自明でない絡み目があることは知られています。



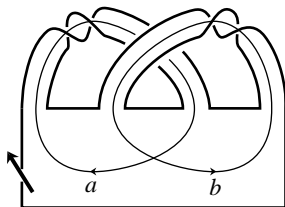
## 6 アレクサンダー多項式

結び目  $K$  に対して、 $K$  を境界にもつような表裏のある ( $\mathbb{R}^3$  にうめこまれた) 曲面を **ザイフェルト曲面** といいます。すべての結び目はザイフェルト曲面をもつことは次のようにしてわかります。まず、結び目に向きをいれて、その図式を考え、図式の各交点の部分をつまみつぶすように変形すると、互いに交わらないいくつかの輪ができます。輪の向きに注意しながら各輪に表裏を考えた円板をはり、もともと交点があったところに半回転ねじったバンドをはりつけていくと、そうやってできた曲面はザイフェルト曲面になります。たとえば、8の字結び目では



のようにしてザイフェルト曲面が得られます。

ザイフェルト曲面に対してザイフェルト行列とよばれる行列が定まりますが、これについて8の字結び目を例にとりて説明します。まず、ザイフェルト曲面を1つの円板にバンドをはりつけた形に変形すると



のようになります。次に、バンドを通るようなザイフェルト曲面上の閉曲線を上図の  $a, b$  のようにとります。 $a, b$  をザイフェルト曲面の表側に少しおしだした閉曲線を  $a^+, b^+$  とします。このとき、8の字結び目のザイフェルト行列は

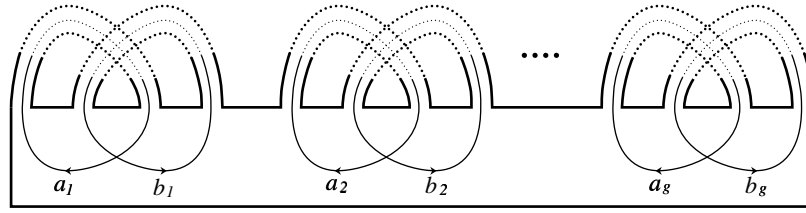
$$V = \begin{pmatrix} \text{lk}(a^+, a) & \text{lk}(a^+, b) \\ \text{lk}(b^+, a) & \text{lk}(b^+, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられます。ここで、 $\text{lk}$  は絡み数とよばれる不変量で、一般に、2成分の向きつき絡み目  $L_1 \cup L_2$  について、 $L_1 \cup L_2$  の図式を  $D_1 \cup D_2$  とするとき、

$$\text{lk}(L_1, L_2) = \frac{1}{2} \left( (D_1 \text{ のひもと } D_2 \text{ のひもがつくる正の交点の数}) - (D_1 \text{ のひもと } D_2 \text{ のひもがつくる負の交点の数}) \right)$$

を  $L_1$  と  $L_2$  の絡み数といいます (これは  $L_1 \cup L_2$  のイソトピー不変量になります)。

一般の結び目  $K$  について、そのザイフェルト曲面は



のような形に変形できます。(ただし、バンドの点線部分はこれらのバンドが互いに結ばったり絡まったりしていることを表します。) このザイフェルト曲面上に閉曲線  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  を上図のようにとります。(ちなみに、ザイフェルト曲面の表示や閉曲線のとりは必ずしも上図のようでなくてもよく、専門的な言い方になりますが、 $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$  がザイフェルト曲面  $F$  の  $H_1(F)$  の基底になるようにとれば OK です。) このとき、

$$V = \begin{pmatrix} \text{lk}(a_1^+, a_1) & \text{lk}(a_1^+, b_1) & \cdots & \cdots & \text{lk}(a_1^+, a_g) & \text{lk}(a_1^+, b_g) \\ \text{lk}(b_1^+, a_1) & \text{lk}(b_1^+, b_1) & \cdots & \cdots & \text{lk}(b_1^+, a_g) & \text{lk}(b_1^+, b_g) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{lk}(a_g^+, a_1) & \text{lk}(a_g^+, b_1) & \cdots & \cdots & \text{lk}(a_g^+, a_g) & \text{lk}(a_g^+, b_g) \\ \text{lk}(b_g^+, a_1) & \text{lk}(b_g^+, b_1) & \cdots & \cdots & \text{lk}(b_g^+, a_g) & \text{lk}(b_g^+, b_g) \end{pmatrix}$$

で定められる行列  $V$  を結び目  $K$  のザイフェルト行列といいます。

**定理 6.** 結び目  $K$  のザイフェルト行列を  $V$  とすると、

$$\Delta_K(t) = \det(t^{1/2} {}^tV - t^{-1/2}V) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

は、 $V$  のとり方によらず、 $K$  のイソトピー不変量になります。

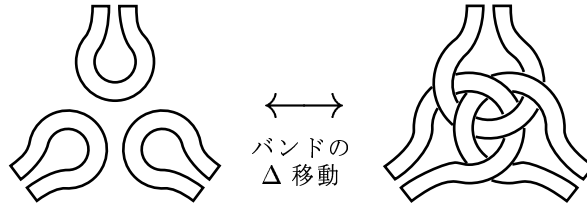
**証明の考え方.** 専門的な説明になりますが、3次元球面  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  における  $K$  の補空間  $S^3 - K$  の無限巡回被覆空間  $\widetilde{S^3 - K}$  の1次のホモロジー群  $H_1(\widetilde{S^3 - K})$  を考えたとき、 $(t^{1/2} {}^tV - t^{-1/2}V)$  はその表示行列になり、その行列式は  $H_1(\widetilde{S^3 - K})$  の構造から ( $V$  のとり方によらずに) 定まるため、 $K$  の不変量になります。  $\square$

定理の不変量は結び目のアレクサンダー多項式とよばれます。任意の結び目について、そのアレクサンダー多項式は  $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$  と  $\Delta_K(1) = 1$  をみることが知られています。たとえば、図3の結び目について、

$$\begin{aligned} \Delta_{K_0}(t) &= 1 \\ \Delta_{K_{3_1}}(t) &= t - 1 + t^{-1} \\ \Delta_{K_{4_1}}(t) &= -t + 3 - t^{-1} \\ \Delta_{K_{5_1}}(t) &= t^2 - t + 1 - t^{-1} + t^{-2} \\ \Delta_{K_{5_2}}(t) &= 2t - 3 + 2t^{-1} \\ \Delta_{K_{6_1}}(t) &= -2t + 5 - 2t^{-1} \\ \Delta_{K_{6_2}}(t) &= -t^2 + 3t - 3 + 3t^{-1} - t^{-2} \\ \Delta_{K_{6_3}}(t) &= t^2 - 3t + 5 - 3t^{-1} + t^{-2} \end{aligned}$$

となります。

図3の $(-3, 5, 7)$  プレツェル結び目  $P(-3, 5, 7)$  に対して  $\Delta_{P(-3,5,7)}(t) = 1$  となります。さらに  $\Delta_K(t) = 1$  であるような自明でない結び目はたくさんあることが知られており、そのような結び目は、たとえば、ザイフェルト曲面の表示におけるバンドの一部分を



のようにかえることでいくらでもつくることができます。

少し専門的な内容になりますが、 $p$  彩色数のところででてきた  $H_1(M_2(K))$  はザイフェルト行列をもちいると  $H_1(M_2(K)) = \mathbb{Z}^{2g}/(V + {}^tV)\mathbb{Z}^{2g}$  のように表示されます。とくに、 $r = |\Delta_K(-1)|$  が素数のとき、 $H_1(M_2(K)) = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  となり、

$$C_p(K) = \begin{cases} r, & p \text{ が } r \text{ の倍数のとき} \\ 1, & p \text{ が } r \text{ の倍数でないとき} \end{cases}$$

となります。 $|\Delta_K(-1)|$  が素数でないときは、状況はもう少し複雑になります。たとえば  $|\Delta_K(-1)| = 9$  となる場合を考えると、 $V = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  なら  $H_1(M_2(K)) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  となって

$$C_p(K) = \begin{cases} 9, & p \text{ が } 3 \text{ の倍数のとき} \\ 1, & p \text{ が } 3 \text{ の倍数でないとき} \end{cases}$$

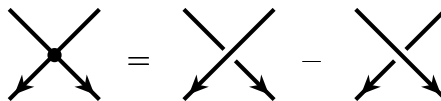
となりますが、 $V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  なら  $H_1(M_2(K)) = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$  となって

$$C_p(K) = \begin{cases} 9, & p \text{ が } 9 \text{ の倍数のとき} \\ 3, & p \text{ は } 3 \text{ の倍数であるが、} 9 \text{ の倍数ではないとき} \\ 1, & p \text{ が } 3 \text{ の倍数でないとき} \end{cases}$$

となります。

## 7 バシリエフ不変量

向きつき結び目の線型和の全体がつくるベクトル空間を  $\mathcal{K}$  とします。有限個の2重点をゆるした結び目を**特異結び目**といいます。特異結び目の各2重点を



によって再帰的に解消することにより、特異結び目を  $\mathcal{K}$  の元とみなします。たとえば、

$$\text{図} = \text{図} - \text{図} - \text{図} + \text{図} \in \mathcal{K}$$

のようになります。線型写像  $v: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  で

$$v(\text{2重点が } d+1 \text{ 個ある任意の特異結び目}) = 0$$

となるようなものを次数  $d$  のバシリエフ不変量(または、有限型不変量)といいます。

次数 0 のバシリエフ不変量  $v$  はどのような不変量でしょうか? 定義より、2重点が1つある特異結び目の  $v$  の値は 0 なので、たとえば

$$v(\text{図}) - v(\text{図}) = v(\text{図}) = 0$$

のようになって、 $v$  の値は結び目の交点の上下のいれかえで不変であることがわかります。したがって、 $v$  はすべての結び目で同じ値をとる自明な不変量であることがわかります。

次数 1 のバシリエフ不変量  $v$  はどのような不変量でしょうか? 今度はたとえば

$$v(\text{図}) - v(\text{図}) = v(\text{図}) = 0$$

のようになるので、同様の議論により、 $v$  は2重点を1つもつようなすべての特異結び目で同じ値をとることがわかります。さらに、

$$v(\text{図}) = v(\text{図}) - v(\text{図}) = 0$$

であることより、その値は 0 であることがわかります。したがって、次数 1 のバシリエフ不変量は次数 0 のバシリエフ不変量(すなわち、自明な不変量)であることがわかります。


次数 2 のバシリエフ不変量  $v$  はどのような不変量でしょうか? 同様の議論により、2重点を2つもつようなすべての特異結び目に対して、交点の上下のいれかえで  $v$  の値は

不変であることがわかります。今の場合、その値は  $v(\text{図})$  と  $v(\text{図})$  の2通りの可能性があります。このうち、後者は

$$v(\text{図}) = v(\text{図}) - v(\text{図}) = 0$$



により 0 になります。前者の値を  $v(\textcircled{X})$  とかくことにします。ここで、 $\textcircled{X}$  のように円周上の 2 点をつなぐ点線をいくつか円周にかき加えてできる図形を**コード図**といい、コード図の各点線を**コード**といい、コードの本数をコード図の**次数**といいます。

の各コードをつぶすように円周を  $\mathbb{R}^3$  にうめこんだ特異結び目の例が  です。

そのようにして  $\textcircled{X}$  からできる特異結び目は他にもたくさんありますが、それらのすべては交点の上下のいれかえで互いにうつりあうので、 $v$  の値は同じになります。上で

定めた  $v(\textcircled{X})$  はその値のことです。任意の結び目  $K$  について、その 2 次のバシリエフ不変量の値は

$$v(K) = a_2(K)v(\textcircled{X}) + v(\textcirclearrowright)$$

のように表されることが(少し考察すると)わかります。ここで、 $a_2(K)$  はある特別な次数 2 のバシリエフ不変量(具体的には、 $\Delta_K(t) = \sum a_{2n}(t+t^{-1}-2)^n$  で定まる  $a_2$ ) です。

次数  $d$  のバシリエフ不変量  $v$  はどのような不変量でしょうか? 同様の議論により、 $d$  個の 2 重点をもつような特異結び目に対して  $v$  の値の可能性は有限個しかなく、各値は次数  $d$  のコード図  $D$  を用いて  $v(D)$  のように表されます。ただし、前と同様に、コード図  $D$  に対して、その各コードをつぶすように円周を  $\mathbb{R}^3$  にうめこんでできる特異結び目の  $v$  の値を  $v(D)$  とかきます。次数  $d$  のバシリエフ不変量  $v$  に対して、 $v(D)$  の値は

$$v(\text{Diagram 1}) - v(\text{Diagram 2}) = v(\text{Diagram 3}) - v(\text{Diagram 4}),$$

をみます。ここで、4つの図は、コード図の一部が図のようになっていて他の部分は同じであるような4つの次数  $d$  のコード図を表しています。上式は次式から導かれます。

$$\begin{aligned} & v(\text{Diagram 1}) + v(\text{Diagram 2}) - v(\text{Diagram 3}) - v(\text{Diagram 4}) \\ &= (v(\text{Diagram 1}) - v(\text{Diagram 2})) + (v(\text{Diagram 3}) - v(\text{Diagram 4})) \\ &= (v(\text{Diagram 1}) - v(\text{Diagram 2})) - (v(\text{Diagram 3}) - v(\text{Diagram 4})) = 0 \end{aligned}$$

さらに、

$$v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}\right) = 0$$

が成り立ちます。ここで、コードの両端の間に他のコードの端点がないようなコードを**孤立しているコード**といい、上式の図は孤立しているコードをもつコード図を表します。上式は次式から導かれます。

$$v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \times \\ \text{---} \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) - v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = 0$$

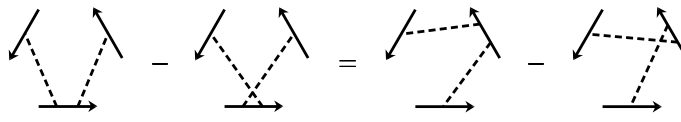
$v(D)$  をコード図の集合上の関数とみなしたとき、 $v(D)$  に関する上述の2つの関係式から、関数  $v(D)$  は4T 関係式と FI 関係式(図 8) をみたすことがわかります。そこで、次数  $d$  のコード図の空間を

$$\mathcal{A}_{\text{FI}}^{(d)} = \{ \text{次数 } d \text{ のコード図の線型和の全体} \} / (4\text{T 関係式と FI 関係式})$$

で定めると、与えられた  $d$  次のバシリエフ不変量  $v$  に対して、線型写像

$$W_v : \mathcal{A}_{\text{FI}}^{(d)} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

が定まります。この  $W_v$  を  $v$  の**重み系**といいます。

4T 関係式: 

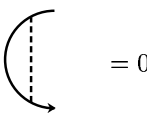
FI 関係式: 

図 8: コード図の関係式

バシリエフ不変量は、定義だけからみると実際にどれくらいたくさんあるのかよくわかりませんが、じつは次のような意味で重み系と同じくらいたくさんあることが知られています。すべての次数のコード図の空間を

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{FI}} &= \{ \text{コード図の線型和の全体} \} / (4\text{T 関係式と FI 関係式}) \\ &= \mathcal{A}_{\text{FI}}^{(0)} \oplus \mathcal{A}_{\text{FI}}^{(1)} \oplus \mathcal{A}_{\text{FI}}^{(2)} \oplus \cdots \end{aligned}$$

で定めると、任意の向きつき結び目  $K$  の**コンセピッチ不変量**  $Z(K) \in \mathcal{A}_{\text{FI}}$  が定義されることが知られています(たとえば、[7, 8] 参照)。さらに、任意の線型写像  $W : \mathcal{A}_{\text{FI}}^{(d)} \rightarrow \mathbb{Q}$  に対して、 $d$  次以外のコード図には 0 を対応させるようにして  $W$  を線型写像  $\mathcal{A}_{\text{FI}} \rightarrow \mathbb{Q}$

に拡張すると、 $W(Z(K))$  は  $d$  次のバシリエフ不変量になり、その重み系はもとの  $W$  に等しくなることが知られています。逆に、 $d$  次のバシリエフ不変量  $v$  を与えたとき、 $W_v(Z(K))$  は  $d$  次のバシリエフ不変量で、その重み系は  $v$  の重み系  $W_v$  に等しく、よって  $v'(K) = v(K) - W_v(Z(K))$  は  $(d-1)$  次のバシリエフ不変量になります。以上をまとめると、次のような1対1対応があることがわかります。

$$\{d \text{ 次のバシリエフ不変量の全体}\} / \sim \underset{\substack{\text{重み系} \\ \text{コンセビッチ不変量} \\ \text{との合成}}}{\rightleftarrows} \{ \text{線型写像 } W : \mathcal{A}_{\text{FI}}^{(d)} \rightarrow \mathbb{Q} \text{ の全体} \}$$

ただし、「 $\sim$ 」は  $(d-1)$  次のバシリエフ不変量の違いは無視する、という意味です。

コンセビッチ不変量はその係数にすべてのバシリエフ不変量をもっており、その意味で、コンセビッチ不変量はすべてのバシリエフ不変量の中で最強の不変量です。また、ジョーンズ多項式やアレクサンダー多項式や一般に量子不変量(変数  $q^{\pm 1}$  の多項式不変量)を  $q=1$  のまわりでテーラー展開したときの  $d$  次の係数は  $d$  次のバシリエフ不変量であることが知られており、それらの多項式不変量はコンセビッチ不変量から導出できるという意味で、コンセビッチ不変量はそれらの多項式不変量の中でも最強の不変量です。

**未解決問題 2.** バシリエフ不変量はすべての結び目を区別するでしょうか? 言いかえると、コンセビッチ不変量はすべての結び目を分類するでしょうか?

**未解決問題 3.** 次数  $d$  のコード図の空間  $\mathcal{A}_{\text{FI}}^{(d)}$  の次元を(数列の一般項を)求めることはできるでしょうか?

$d$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mathcal{A}_{\text{FI}}^{(d)}$ の次元	1	0	1	1	3	4	9	14	27	44	80	132	232	$\geq 384$	$\geq 659$
$\mathcal{A}_{\text{conn}}^{(d)}$ の次元	0	0	1	1	2	3	5	8	12	18	27	39	55	$\geq 78$	$\geq 108$

表 2: コード図の空間の次元

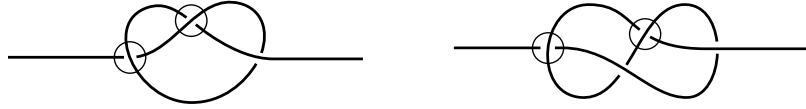
### 配置の個数としてのバシリエフ不変量

開いた結び目の任意のバシリエフ不変量は向きつきコード図を用いて次のような方法で構成できることが知られています。ただし、開いた結び目(図1参照)を考えるときは、ひもの左右の端はそれぞれ左右の無限遠までのびているとみなして、ひもの端点をうごかすことはできないものとします。そして、たとえば、次のようなコード図(「閉区間上の向きつきコード図」といいます)を考えます。



開いた結び目の図式に対して、その交点の対で上記の  $D$  に対応するものをさがします。ここで「交点の対と向きつきコード図が対応する」とは、次のような意味です。交点の対

に対して、前述の「特異結び目とコード図の対応」と同じ方法で(開いた結び目の場合、閉区間上の)コード図が対応し、さらに、各交点の「上の道」に対応する「コードの端点」から「下の道」に対応する「コードの端点」にむけてコードに向きをいれることにより、向きつきコード図が得られます。それが、交点の対に対応する向きつきコード図です。たとえば、次のような交点の対が上記の向きつきコード図  $D$  に対応します。



結び目の図式の交点  $C$  に対して、

$$\varepsilon_C = \begin{cases} 1, & C \text{ が正の交点のとき} \\ -1, & C \text{ が負の交点のとき} \end{cases}$$

で  $\varepsilon_C$  を定めます。

**命題 7.**  $T$  を開いた結び目とし、 $D_T$  をその図式とし、 $v(T)$  を

$$v(T) = \sum_{(C_i, C'_i)} \varepsilon_{C_i} \varepsilon_{C'_i}$$

で定めます。ここで、和は  $D_T$  の交点の対  $(C_i, C'_i)$  であって対応する向きつきコード図が上述の  $D$  であるようなものの全体をわたります。このとき、 $v$  は2次のバシリエフ不変量になります。

たとえば、開いた3つ葉結び目と8の字結び目の値は次のようになります。

$$v\left(\text{---}\left(\text{三つ葉}\right)\text{---}\right) = 1, \quad v\left(\text{---}\left(\text{8の字}\right)\text{---}\right) = -1$$

任意のバシリエフ不変量は上記の方法と同様の方法で構成できることが知られています。

### 配置空間上の写像度としてのバシリエフ不変量

開いた結び目  $T$  に対して、配置空間  $C_X, C_Y$  を

$$C_X = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in T^4 \subset (\mathbb{R}^3)^4 \mid \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ は } T \text{ 上の異なる4点で、} \\ \text{この順に } T \text{ 上に現れます} \end{array} \right\}$$

$$C_Y = \left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \in T \times T \times T \times \mathbb{R}^3 \subset (\mathbb{R}^3)^4 \end{array} \mid \begin{array}{l} x_1, x_2, x_3 \text{ は } T \text{ 上の異なる3点で} \\ \text{この順に } T \text{ 上に現れ、} x_4 \text{ は前の} \\ \text{3点とは異なるような } \mathbb{R}^3 \text{ の点です} \end{array} \right\}$$

で定めます。 $\mathbb{R}^3$  内の原点を中心とする半径1の球面を  $S^2$  とかきます。写像  $\phi_{ij} : C_X, C_Y \rightarrow S^2$  を

$$\phi_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|} \in S^2$$

で定め、写像  $\phi_X, \phi_Y$  を

$$\begin{aligned}\phi_X &= \phi_{31} \times \phi_{24} : C_X \rightarrow S^2 \times S^2 \\ \phi_Y &= \phi_{41} \times \phi_{24} \times \phi_{43} : C_Y \rightarrow S^2 \times S^2 \times S^2\end{aligned}$$

で定めます。これらの写像は象徴的に次の図で表されます。



さらに、 $C_X \times S^2$  と  $C_Y$  をそれらの境界にそって適切にはりあわせてできる空間を  $C$  とし、 $C_X \times S^2$  上で  $\phi_X \times \text{id}_{S^2}$  であり  $C_Y$  上で  $\phi_Y$  であるような写像を

$$\phi : C \longrightarrow (S^2 \times S^2 \times S^2)/(\text{成分の入れかえ})$$

とします。

**命題 8.** 写像  $\phi$  の写像度は2次のバシリエフ不変量になります。

この写像度を局所化することにより命題7の表示が得られます。また、物理的背景として、チャーン-サイモンズ経路積分を摂動展開したときに現れる配置空間積分がこの写像度の積分表示を与えます。

## 8 結び目と不変量の研究の歴史の流れ

結び目のタイプを分類しようとする試みは19世紀にもありましたが、その頃はまだ数学的な道具立てが不十分で、たとえば「イソトピックでない結び目がイソトピックでないこと」を厳密に証明することができませんでした。結び目を数学的対象として研究できるようになったのは、20世紀初めにトポロジー(位相幾何学)の基礎が確立してからです。トポロジーの研究がはじまったのが20世紀初めであるということには、相対性理論の発見が背景にあります。相対性理論の発見以前の世界観は、我々が住んでいる空間は3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  であって空間というのはまっすぐなものである、という認識にもとづいていました。したがって、19世紀の幾何(たとえば2次曲面の分類問題など)には空間には  $xyz$  座標というまっすぐな座標がはいっているものである、という暗黙の前提がありました。これに対して、相対性理論の世界観は、我々が住んでいる空間は局所的には  $\mathbb{R}^3$  で近似できるが大域的にはまがっている、という認識にもとづいています。そのような認識にもとづいて、局所的に  $n$ 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  と同じ形をしているが大域的にはまがっているような空間が  $n$ 次元**多様体**と定義されて、多様体の研究は20世紀の幾何の主流になっていきました。とくに、トポロジーの立場では、連続的に変形してうつりあうもの(同相な空間)は同じ対象だとみなして多様体などの空間を研究します。

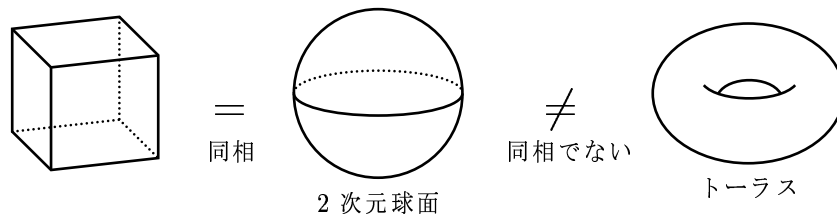
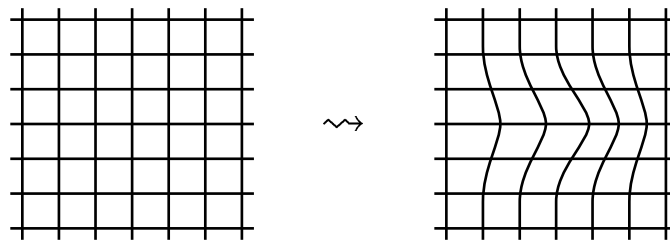


図 9: 2次元多様体の例

結び目は3次元球面  $S^3$  の1次元部分多様体とみなすことができ、結び目のイソトピーは  $S^3$  が変形する過程(専門用語で言うと、 $S^3$  の自己同相写像の族)とみなすことができます。(ちなみに、「イソトピー」という用語は本当は「結び目のイソトピー」ではなく「 $S^3$  のイソトピー」というのが正確な言い方です。結び目というといひもの方に目がいきがちですが、位相幾何学の観点ではひもがはいっている空間の方を主役にして考えることがよくあります。)トポロジーの基礎が整備されるのにもなって結び目を数学的に取り扱う方法論も確立し、アレクサンダー多項式が1920年代に発見されるなど、アレクサンダー、ライデマイスター、ザイフェルト等の研究によって「古典的」結び目理論が発展しました。

図 10:  $\mathbb{R}^2$  のイソトピー

1950年代~1960年代にトポロジーの発展は高次元(5次元以上)のトポロジーの黄金期をむかえます。とくに、手術理論やh同境定理により高次元多様体の分類問題が(代数的な問題に帰着される、という意味で)決着しました。この頃に高次元トポロジーで様々な結果が証明された手法の中では、4次元以上の空間ではひもが結ばるとい現象がない(図11)という事実が不可欠に使われています。3次元空間ではひもが結ばるとい現象があることが問題をむずかしく(そして、おもしろく)しており、高次元多様体の分類問題が決着したあとも、3次元多様体の分類問題は依然として未解決のまま残されました。(ちなみに、3次元多様体の分類問題については、幾何化予想([3]参照)の観点から解決をめざすペレルマンの仕事が現時点で進行中です。)

1980年代に数理物理的手法がトポロジーに導入され、低次元トポロジーの研究は大きく様相をかえました。ここで言う数理物理的手法とは、与えられた空間に対してその「波動関数の空間」をしかるべく定めて波動関数の空間を調べることによりもとの空間のトポロジーを記述しよう、という手法のことです。量子論で物理現象を記述するとき、物理的な状態を波動関数で表して波動関数がつくるベクトル空間を考え、状態の時間発展をそのベクトル空間上の線型写像で表しますが、そういう方法論をトポロジーに応用するこ

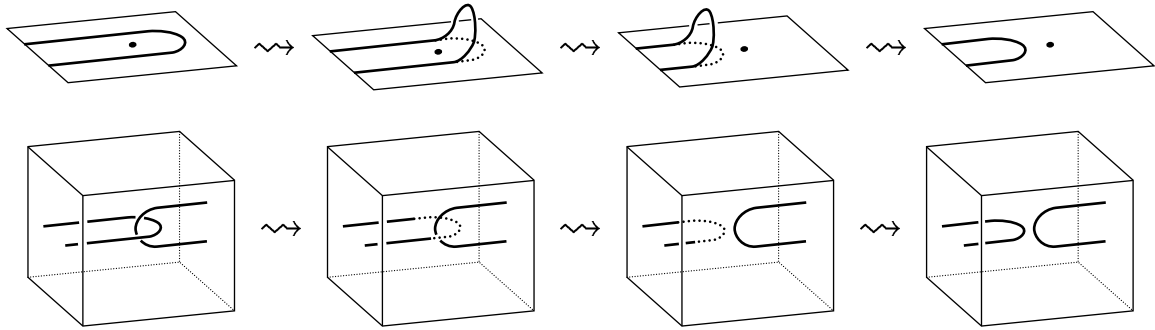


図 11: 3次元空間内では1次元の図形と0次元の図形は絡まらず、4次元空間内では1次元の図形と1次元の図形は絡まりません。

とを考えます。とくに、結び目の不変量の構成法では、結び目の図式を水平線でわぎりにし、各水平線にしかるべくベクトル空間を対応させ、図式の各交点に  $R$  行列とよばれる線型写像を対応させ、そうやってできた線型写像の合成写像として不変量を定式化する、という手順により不変量を構成します(図 12)。ここで、 $R$  行列とはライデマイスター移動 RIII に対応する方程式 (**Yang-Baxter 方程式**とよべれます) の解のことで、 $R$  行列を1つ与えるごとに図 12 の構成法で(おおむね)結び目の不変量が1つ得られます。適切な  $R$  行列を選ぶことによりジョーンズ多項式やアレクサンダー多項式もこの構成法で定式化することができます。さらに、量子群をもちいるとリー環  $\mathfrak{g}$  とその表現  $V$  の対  $(\mathfrak{g}, V)$  を与えるごとに  $R$  行列が1つ得られるので、結び目の不変量が1つ得られ、この不変量を量子不変量とよびます。対  $(\mathfrak{g}, V)$  は無数にあるので、量子不変量という無数の不変量が得られたことになります。

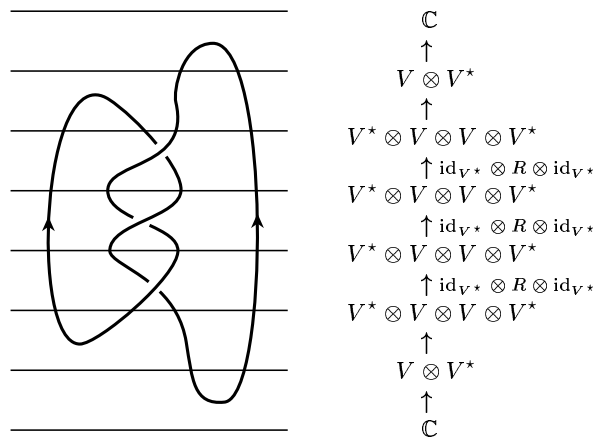


図 12: 図式のをぎり図とこれに対応する線型写像

「ジョーンズ多項式(一般に、量子不変量)に3次元的解釈を与えよ」という問いにウィッテンは「チャーン-サイモンズ経路積分」という答えを与えました。結び目  $K$  を含む3次

元多様体  $M$  に対して、3次元多様体上の接続全体からなる無限次元空間上でチャーン-サイモンズ関数という関数の指数関数を積分すること(チャーン-サイモンズ経路積分)により  $(M, K)$  の不変量が与えられます。その物理的背景は、量子論において粒子の相互作用を記述する相関関数がファインマン経路積分をもちいて表示される、ということで、さらに量子論ではオペレータ形式と摂動展開という2つの方法のそれぞれで経路積分から物理的に観測可能な量がとりだされます。この2つの方法をチャーン-サイモンズ経路積分に適用すると量子不変量と**コンセビッチ不変量**(とその係数として**バシリエフ不変量**)が得られます。量子不変量に関連する不変量はすべてコンセビッチ不変量から導出可能で、この意味で、コンセビッチ不変量はそれらの不変量の中で最強の不変量です。コンセビッチ不変量はすべての結び目を分類しているであろうと予想されています(が、現時点でこの問題は未解決です)。

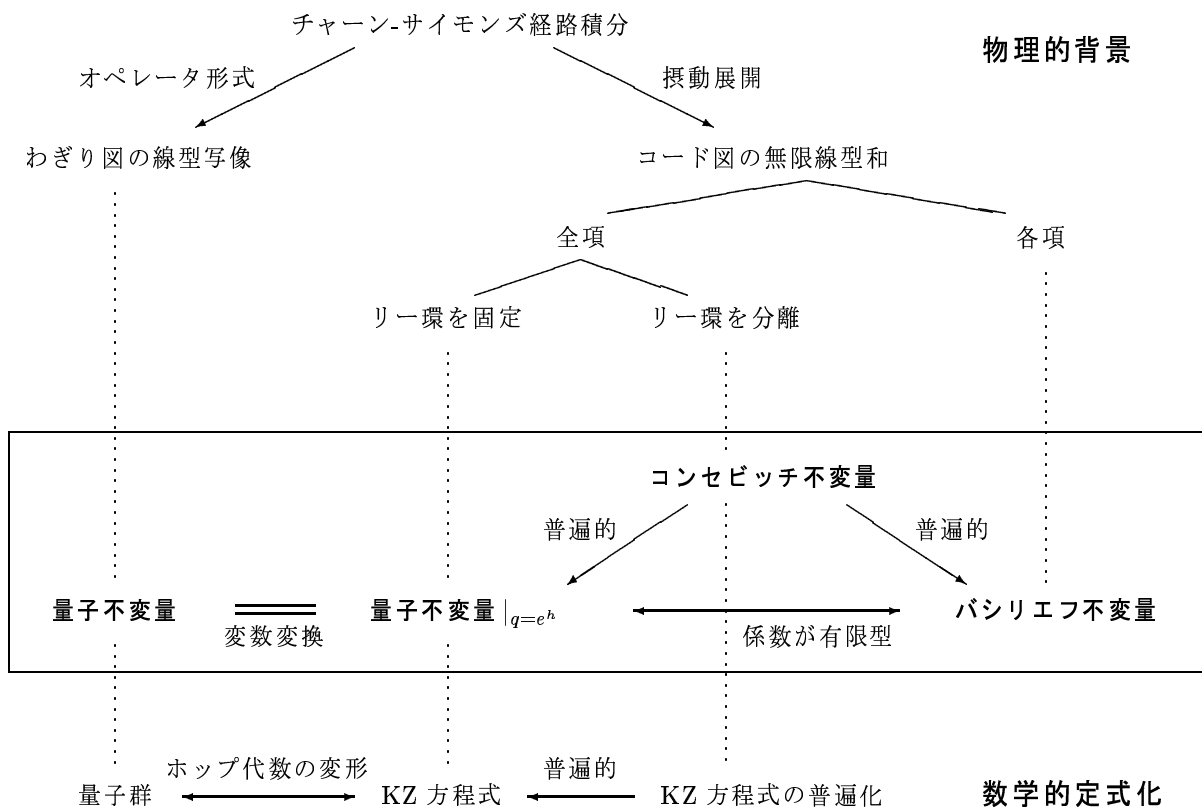


図 13: 量子不変量に関連する結び目の不変量



## 参考文献

- [1] 河内明夫(編著)、「結び目理論」、シュプリンガーフェアラーク東京、1990年.
- [2] 児玉宏児、「KNOT」、コンピュータソフトウェア、  
<http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kodama/knot.html> から入手可能.
- [3] 小島定吉、「3次元の幾何学」、朝倉書店、2002年.
- [4] 村上斉、「結び目のはなし」、遊星社、1990年.
- [5] 落合豊行、「K2K」、コンピュータソフトウェア、  
<http://amadeus.ics.nara-wu.ac.jp/~ochiai/freesoft.html> から入手可能.
- [6] 落合豊行、山田修司、豊田英美子、「コンピュータによる結び目理論入門」、牧野書店、1996年.
- [7] 大槻知忠(編著)、大山淑之、高田敏恵、出口哲生、村上順、村上斉、和久井道久(著)、「量子不変量—3次元トポロジーと数理物理の遭遇」、日本評論社、1999年8月.
- [8] Ohtsuki, T., *Quantum invariants, — A study of knots, 3-manifolds, and their sets*, Series on Knots and Everything, **29**. World Scientific Publishing Co., Inc., 2002.
- [9] Ohtsuki, T. (ed.), *Problems on invariants of knots and 3-manifolds*, Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto 2001), 377–572, Geom. Topol. Monogr. **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002. <http://www.maths.warwick.ac.uk/gt/gtmcontents4.html>

## 公開講座(大槻担当分)追加資料

### テキストの参考文献についてのコメント

[1] は結び目理論の標準的な専門書で、様々なキーワード(たとえば「分岐被覆」「スケイン関係式」など)について網羅的に解説しています。[7], [8] は量子不変量とそれに関連する不変量(テキストでとりあげた不変量)について詳しく解説しています。[7] は「数学セミナー」での連載をまとめた入門書で、[8] は専門書(大学院セミナーのテキスト向)です。

### 結び目理論のその他の文献

[10] C.C. アダムス(著), 金信泰造(訳), 「結び目の数学」, 培風館, 310 ページ, 1998 年.

○ 初学者にも読みやすい、入門書的な専門書です。

[11] W.B.R. リコリッシュ(著), 秋吉宏尚, 塩見真枝, 下川航也, 高向崇, 田中利史, 平澤美可三, 松本三郎, 丸本嘉彦, 村上斉(訳), 「結び目理論概説」, シュプリンガーフェアラク東京, 294 ページ, 2000 年.

○ 標準的な教科書で、セミナーのテキストとして使うことがよくあります。

[12] 村上順, 「結び目と量子群」, 朝倉書店, 186 ページ, 2000 年.

○ 不変量の代数的な側面(たとえば量子群)について詳しく書かれています。

[13] 和達三樹, 「結び目と統計力学」, 岩波書店, 88 ページ, 2002 年.

○ 統計力学の背景(ヤン-バクスター方程式など)について書かれています。

[14] R.H. クロウエル, R.H. フォックス(著), 寺阪英孝(訳), 「結び目理論入門」, 岩波書店, 1967 年.

○ 結び目理論の昔の教科書(結び目理論を今勉強する場合は、この本のような「ジョーンズ多項式以前」の教科書はおすすめではありません)。

[15] 河野俊丈, 「組みひもの数理」, 遊星社, 1993 年.

○ 組みひもに関連する話題(結び目など)についての解説的な読み物。

[16] 小島定吉, 「トポロジー入門」, 共立出版, 1998 年.

○ トポロジーの入門書。ホモロジー群などについて解説があります。

これらの他にも、寺垣内政一氏のホームページ

<http://home.hiroshima-u.ac.jp/teragai/knot.html>

に結び目理論の本やトポロジーの本が多く挙げられています。

(裏面につづく)

## 解説記事

- [17] 数学のたのしみ no. 5 (フォーラム：結び目の不思議), 日本評論社, 1998年2月号.  
○ 不変量についてあまり書かれていませんが、結び目についていくつかの解説記事があります。
- [18] 数理科学 (特集：トポロジーの世紀), サイエンス社, 2003年6月号.  
○ 結び目のコンセビッチ不変量について大槻の解説記事があります。

## 関連文献の追記

- [19] Evans, D.E., Kawahigashi, Y., *Quantum symmetries on operator algebras*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.  
○ 作用素環の専門書。作用素環から導かれる不変量について詳しく解説がありますが、専門性が高く、初学者にはむずかしい本です。
- [20] 小林毅、「絡み目理論の新しい不変量 — 作用素環に由来する Jones 多項式とその一般化」、数学 **38** (1986年) の論説、日本数学会編集、岩波書店。  
○ 作用素環を用いたジョーンズ多項式の構成について解説しています。
- [21] 作間誠、*Metabelian representations of knot groups*, 数理解析研究所 講究録 **369** (1979) 31-46.  
○ 結び目で分岐する3次元球面の2重分岐被覆空間のホモロジー群をもちいて  $p$  彩色数が表示できることの解説 (内容は専門的)。

## テキストの訂正

テキスト 12 ページのミューテーションの図のキャプションの「樹下-寺坂 結び目」を「樹下-寺阪 結び目」に訂正します。