円周率の公式と計算法

大浦拓哉

1　はじめに

この講座では、円周率をいかにして高速かつ高精度で計算するかということに主眼をおきます。まず、1・2日目は、円周率計算の基本となる公式について数学的な説明や歴史的話題などについて触れる予定です。次に、3・4日目では、コンピュータを用いた高速かつ高精度な計算技法について紹介したいと思います。とくにコンピュータを用いた計算で使われている数学的手法に関しては、一般的にあまり知られていないと思われるので、その点に重点をおいてお話したいと思います。また、予稿にあげる以外の公式や算法も多々ありますので、時間の許す限り講義の中で説明したいと思っています。

2　円周率計算の基本となる公式

2.1　正多角形による方法

円周率の古くからの計算法は正多角形で円を近似する方法です。$a_0 = 2\sqrt{3}$, $b_0 = 3$ として

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_{n+1} b_n} \end{aligned}$$

とすれば、a_n、b_n はそれぞれ直径 1 の円に外接、内接する正 $6 \cdot 2^n$ 角形の長さになります。したがって、$b_n < \pi < a_n$ です。これらの式は、初等的な幾何学で容易に証明でき、紀元前 3 世紀頃アルキメデスは $n = 4$ を評価して $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$ という関係を導いたとされています。また、1600 年頃オランダのルドルフが一生かけて 35 桁計算したのも正多角形による方法です。

ヴィエトによる π を表す最初の公式

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$$

も、導出は正多角形によるもので、最初の k 項までの積が半径 1 の円に内接する正 2^{k+1} 角形の面積になっています。

これらの正多角形による方法は計算効率が悪く、十進 N 桁を得るためには約 $1.66N$ 回の乗除算と平方根の計算が必要になり、計算する桁数が増えるにつれて莫大な計算時間がかかります。たとえば、この方法で 10 億桁計算する場合、10 億桁の精度での約 17 億回の平方根と乗除算の計算が必要になります。この場合の計算は、のちに話す算術幾何平均の方法と比較して数千万倍の時間がかかり、現代の高速なコンピュータを用いても天文学的な時間のかかるものです。

2.2 級数による方法

もっともよく知られた級数による方法のひとつは、アークタンジェントのテイラー展開によるものです。グレゴリー級数として知られる

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots \tag{1}$$

は、テイラー展開

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots \tag{2}$$

に、$x = 1$ を代入して得られます。この公式は 1670 年代にライプニッツも発見しましたが、インドのマーダヴァ学派のほうが先で 1400 年ごろに発見していたとされています。グレゴリー級数は、そのままでは収束が極めて遅く、数値計算にはまったく向いてはおりません。たとえば、10 桁の値を得るためには約 100 億項もの計算が必要になるのです。しかし、次に解説するオイラー変換という収束の加速法を用いることで、これは大幅に改善されます。

2.2.1 オイラー変換

一般にオイラー変換とは、級数

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \tag{3}$$

の収束を改善するための方法です。導出方法は、まず、$Ea_n = a_{n+1}$ で定義されるシフト演算 E を用いて、(3) を

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-E)^n a_0 = \frac{1}{1+E} a_0$$

と形式的に書き換えます。次に、$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ で定義される差分演算子 $\Delta = E - 1$ を用いて、

$$S = \frac{1}{1+E} a_0 = \frac{1}{2+\Delta} a_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\Delta \right)^n a_0 \tag{4}$$

と変形します。級数 (3) から級数 (4) への変換ををオイラー変換といいます。この導出は形式的なものであるので、次にもう少し厳密な話をしましょう。まず、複素関数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} \tag{5}$$

を考えます。ここで、$S = -f(-1)$ であることに注意します。次に、変数変換

$$z = \frac{t}{2+t} \tag{6}$$

を (5) に施して、t のテイラー級数として展開しなおすと、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{t}{2+t}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{t}{2+t}\right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j}{n} (-1)^j \left(\frac{t}{2}\right)^{n+j+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n \binom{k}{n} (-1)^{k-n} \left(\frac{t}{2}\right)^{k+1} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(-\frac{1}{2}\Delta\right)^k a_0 \right] (-t)^{k+1} \end{aligned} \tag{7}$$

となります。ここで、$t=-1$ とおくと (7) 式はオイラー変換と同じになることがわかります。また、(6) 式は z 平面の単位円板を t 平面の $\mathrm{Re}\, t \geq -1$ の領域に写像する変換であり、収束を遅くする単位円上の特異点を原点からより遠くへ写すためのものです。したがって、この写像によって収束半径が広がれば、オイラー変換後の級数の収束は加速されることがわかります。

この (5) 式から (7) 式の導出を、(2) 式に適用すると

$$\tan^{-1} x = \frac{x}{1+x^2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \cdots \right) \tag{8}$$

が得られます。オイラーはこの級数を 1755 年に発見しています。この級数は (2) 式とは異なり、すべての実数 x で収束します。また、(8) 式に $x=1$ を代入することで、グレゴリー級数のオイラー変換が得られ、10 桁の値を得るための項数はわずか 30 項で済みます。このことからも、オイラー変換の威力がわかると思います。

2.2.2　アークタンジェント公式

マチンは、1706 年に公式

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

を発見しました。証明はタンジェントの加法定理を繰り返し用いることで、容易にできます。アークタンジェントのテイラー展開 (2) を用いて計算すれば、わずか 10 項程度の計算で 10 桁以上の値が得られます。計算する項数と得られる桁数はほぼ比例して、円周率一桁当たりに必要な項数はおよそ $1/\log_{10} 5^2 + 1/\log_{10} 239^2 \simeq 0.926$ です。マチンはこの公式を用いて 100 桁の計算をしました。

マチンの公式のような

$$\pi = p_1 \tan^{-1}\frac{1}{q_1} + p_2 \tan^{-1}\frac{1}{q_2} + \cdots + p_m \tan^{-1}\frac{1}{q_m}$$

という形の公式はたくさん知られていています。以下にいくつかのアークタンジェント公式をあげておきます。

- クリンゲンシュティルナ (1730 年)

$$\frac{\pi}{4} = 8\tan^{-1}\frac{1}{10} - \tan^{-1}\frac{1}{239} - 4\tan^{-1}\frac{1}{515}$$

- ガウス (1863 年)

$$\frac{\pi}{4} = 12\tan^{-1}\frac{1}{18} + 8\tan^{-1}\frac{1}{57} - 5\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

- シュテルメル (1896 年)

$$\frac{\pi}{4} = 6\tan^{-1}\frac{1}{8} + 2\tan^{-1}\frac{1}{57} + \tan^{-1}\frac{1}{239}$$

- 高野喜久雄 (1982 年)

$$\frac{\pi}{4} = 12\tan^{-1}\frac{1}{49} + 32\tan^{-1}\frac{1}{57} - 5\tan^{-1}\frac{1}{239} + 12\tan^{-1}\frac{1}{110443}$$

2.3 算術幾何平均による方法

1976 年、サラミンとブレントは独立かつ同時に、非常に速く収束する円周率の公式を発見しました。この方法は、以下に示す楕円積分を計算する算術幾何平均による方法と、ルジャンドルの関係式を組み合わせるものです。ここでは、算術幾何平均が何かということをまず説明し、次に楕円積分との関係を明らかにします。その上で、楕円積分に関するルジャンドルの関係式を導出し、それらを組み合わせることによって、この公式を得ることにします。

2.3.1 算術幾何平均

算術幾何平均反復とは漸化式

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + b_n)\,, & (9)\\ b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} & (10) \end{aligned}$$

で定義されます。便宜上 $0 < b_0 \le a_0$ として、補助的な数列を

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \tag{11}$$

とします。このとき、関係式 $b_n \le b_{n+1} \le a_{n+1} \le a_n$ と、

$$0 \le a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{(a_n - b_n)^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} \tag{12}$$

が成り立ち、a_n, b_n は必ず同じ極限に収束することが容易にわかります。以後この極限を

$$M(a_0, b_0) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

と表記することにします。次に、a_n, b_n の収束の速さを考えます。まず、$a_0 > 0$ と仮定すれば、(12) 式から

$$c_{n+2} = \frac{c_{n+1}^2}{4a_{n+2}} \le \frac{1}{4M(a_0, b_0)} c_{n+1}^2 \tag{13}$$

が成り立ち、c_n は 0 に非常に速く収束することがわかります。一般に、

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}=O(1)$$

が成り立つとき、x_n は α に p 次収束するといい、算術幾何平均の収束の速さは二次収束になります。この収束の速さは、たとえば c_n が 0 に 100 桁一致したならば、c_{n+1} は 200 桁、c_{n+2} は 400 桁と、その桁数が倍々に増えていくという急激なものです。さらに、

$$\begin{aligned} a_n-M(a_0,b_0)&=c_{n+1}+c_{n+2}+c_{n+3}+\cdots\,, \\ b_n-M(a_0,b_0)&=-c_{n+1}+c_{n+2}+c_{n+3}+\cdots \end{aligned}$$

が成り立つので、a_n, b_n も $M(a_0,b_0)$ に二次収束することになります。この収束は、わずか $n=20$ 程度で 100 万桁一致し、$n=40$ 程度で 1 兆桁一致するというスピードです。

2.3.2 算術幾何平均と楕円積分

算術幾何平均と楕円積分との関係に最初に気づいたのはガウスであるといわれています。1799 年 5 月 30 日、彼の日記によると算術幾何平均のある極限 $1/M(1,\sqrt{2})$ と積分

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

とが 11 桁以上の精度で数値的に一致することを確認したことが発端になっています [2]。

まず、算術幾何平均は以下の楕円積分

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}\,, \tag{14}$$

$$J(a,b) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,d\theta \tag{15}$$

と密接な関係があることを示しましょう。

定理 1 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$, $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$, $0<b_n<a_n$ とすると

$$I(a_{n+1},b_{n+1}) = I(a_n,b_n)\,, \tag{16}$$

$$J(a_{n+1},b_{n+1}) = \frac{1}{2}(J(a_n,b_n)+a_nb_nI(a_n,b_n)) \tag{17}$$

が成り立つ。

証明 第一式 (16) の証明は、まず、(14) 式を変数変換 $x=b\tan\theta$ で書き換えて

$$I(a,b)=\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}}$$

とすることから始めます。次に、

$$I(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab})=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{((\frac{a+b}{2})^2+x^2)(ab+x^2)}}$$

に対して変数変換 $x = \frac{1}{2}(t - ab/t)$ を施して

$$I(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}} = I(a,b)$$

を得ます。

第二式 (17) の証明の前に、準備をしておきましょう。次の関係式が成り立つことに注目します。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(a,b)}{\partial a} &= \frac{a}{a^2-b^2}(J(a,b) - b^2 I(a,b))\,, & (18) \\ \frac{\partial I(a,b)}{\partial a} &= \frac{1}{a(a^2-b^2)}(J(a,b) - a^2 I(a,b)) & (19) \end{aligned}$$

(18) 式の導出は、(15) 式を微分することで得られます。また、(19) 式の導出は (14) 式を微分した後、部分積分を行うことで得られます。

そして、これらの微分の関係式を用いることで、第二式 (17) の証明は次のようにして得られます。まず、第一の関係式 (16) を a_n に関して微分します。

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(a_n,b_n)}{\partial a_n} &= \frac{\partial I(a_{n+1},b_{n+1})}{\partial a_n} \\ &= \frac{\partial a_{n+1}}{\partial a_n}\frac{\partial I(a_{n+1},b_{n+1})}{\partial a_{n+1}} + \frac{\partial b_{n+1}}{\partial a_n}\frac{\partial I(a_{n+1},b_{n+1})}{\partial b_{n+1}} \end{aligned}$$

これに、(19) 式を代入して右辺と左辺を比較すると

$$J(a_n,b_n) - a_n^2 I(a_n,b_n) = 2(J(a_{n+1},b_{n+1}) - a_n a_{n+1} I(a_{n+1},b_{n+1}))$$

が得られ、(17) 式が得られます。

証明終り

この定理から楕円積分 $I(a,b)$, $J(a,b)$ を計算する次の公式が作成されます。

定理 2 (計算公式)　$0 < b_0 \le a_0$, $c_0^2 = a_0^2 - b_0^2$ とし、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\,, \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

とするとき、

$$\begin{aligned} I(a_0,b_0) &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{M(a_0,b_0)}\,, & (20) \\ J(a_0,b_0) &= \left(a_0^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) I(a_0,b_0) & (21) \end{aligned}$$

である。

証明　第一式 (20) は、定理 1 の (16) 式

$$I(a_0,b_0) = I(a_1,b_1) = I(a_2,b_2) = \cdots = I(a_n,b_n)$$

から直ちに導かれます。ここで、$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = M(a_0, b_0)$ なので、

$$I(a_0, b_0) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{M(a_0,b_0)^2\cos^2\theta + M(a_0,b_0)^2\sin^2\theta}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{M(a_0,b_0)}$$

となります。

第二式 (21) の証明は、定理 1 の (17) 式から次のようにして導かれます。まず、(17) 式を

$$D(a_n, b_n) = 2^n(a_n^2 I(a_0, b_0) - J(a_n, b_n))$$

を用いて書き換えると、

$$D(a_{n+1}, b_{n+1}) - D(a_n, b_n) = -2^{n-1}(a_n^2 - b_n^2)I(a_0, b_0)$$

となります。ここで、$c_n^2 = a_n^2 - b_n^2$ であることに注意して和をとると

$$D(a_{n+1}, b_{n+1}) - D(a_0, b_0) = -\sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-1} c_j^2 I(a_0, b_0)$$

となります。もし、$n \to \infty$ で $D(a_n, b_n) \to 0$ と仮定すると、

$$D(a_0, b_0) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 I(a_0, b_0)$$

となり、(21) 式が得られます。

証明を完了させるために、最後に $\lim_{n\to\infty} D(a_n, b_n) = 0$ を示しましょう。

$$\begin{aligned} D(a_n, b_n) &= 2^n(a_n^2 I(a_n, b_n) - J(a_n, b_n)) \\ &= 2^n \int_0^{\pi/2} \frac{(a_n^2 - b_n^2)\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\, d\theta \end{aligned}$$

であるので、

$$0 \le D(a_n, b_n) \le 2^n c_n^2 I(a_n, b_n)$$

が成立します。したがって、c_n が 0 に二次収束することを考慮すると

$$D(a_n, b_n) \to 0\,, \quad n \to \infty$$

となります。

証明終り

この計算公式の計算量は、a_n, b_n が二次収束するため非常に少なく、N 桁の精度を得るための反復は $\log N$ に比例する回数になります。したがって、必要な乗算回数も $\log N$ に比例する回数になります。

2.3.3　楕円積分とルジャンドルの関係式

まず、楕円積分の性質について触れておきます。第一種完全楕円積分 $K(k)$、第二種完全楕円積分 $E(k)$ は

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = I(\sqrt{1-k^2},1)\,, \\ E(k) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta = J(\sqrt{1-k^2},1) \end{aligned}$$

で定義されます。k は母数と呼ばれます。さらに補母数を $k' = \sqrt{1-k^2}$ として補積分を

$$K'(k) = K(\sqrt{1-k^2}) = K(k')\,,\quad E'(k) = E(\sqrt{1-k^2}) = E(k')$$

で定義します。このとき、J, I の微分の関係式 (18)、(19) を K, E に書き換えることで、

$$\frac{E(k)}{dk} = \frac{E(k)-K(k)}{k}\,,\quad \frac{K(k)}{dk} = \frac{E(k)-k'^2K(k)}{kk'^2}$$

が得られます。さらに、$K(k)$, $K'(k)$ は微分方程式

$$(k^3-k)\frac{d^2y}{dk^2} + (3k^2-1)\frac{dy}{dk} + ky = 0 \tag{22}$$

を満たします。これは、上の微分の関係式から容易に確認できます。

これらの性質からルジャンドルの関係式

$$E(k)K'(k) + E'(k)K(k) - K(k)K'(k) = \frac{\pi}{2} \tag{23}$$

が導かれます。この式の導出は、微分方程式 (22) を

$$G(k) = \sqrt{k}k'K(k)\,,\quad G^*(k) = \sqrt{k}k'K'(k)$$

に関する方程式に置き換えることで得られます。この G, G^* の満たす方程式は

$$\frac{d^2y}{dk^2} = -\frac{1}{4k^2}\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 y$$

であり、

$$G\frac{d^2G^*}{dk^2} = G^*\frac{d^2G}{dk^2}$$

が成り立ちます。これを積分して、

$$G\frac{dG^*}{dk} - G^*\frac{dG}{dk} = \text{定数}$$

を得ます。これを K, K' で表し、微分を除去すると

$$EK' + E'K - KK' = \text{定数}$$

となります。積分定数は、テイラー展開を用いて $k \to 0$ の極限を計算して $\pi/2$ となります。このルジャンドルの関係式から、算術幾何平均を用いた円周率の計算が可能となります。

2.3.4 算術幾何平均による公式の導出

定理2と楕円積分におけるルジャンドルの関係式を用いて円周率を計算する方法を示します。楕円積分の母数を $k = k' = 1/\sqrt{2}$ と選ぶとき、この算法は以下のように得られます。

計算公式 1 (サラミン・ブレント) $a_0 = 1$, $b_0 = 1/\sqrt{2}$, $c_0^2 = a_0^2 - b_0^2$ とし、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)\ , \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\ , \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

とするとき、

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_{n+1}^2}{1 - \sum_{j=0}^{n} 2^j c_j^2} \tag{24}$$

である。

この算法では、a_n, c_n はともに二次収束するため、(24) 式も二次収束します。したがって、N 桁の精度を得るための反復回数は $M \simeq \log_2 N$ 回程度で済みます。また、この算法を M 回反復したときの主要な演算量は、平方根 $M+1$ 回と乗算 $2M-1$ 回と除算 1 回になることがわかります。

次に、この演算量を減らすことを考えます。最初に、平方根の回数は同じで乗算回数を半分にする算法を示します。これは、前の算術幾何平均反復を

$$A_n = a_n^2\ , \quad B_n = b_n^2\ , \quad C_n = c_n^2$$

で置き換えることで得られます [10]。

計算公式 1′ (改良サラミン・ブレント) $A_0 = 1$, $B_0 = 1/2$, $C_0 = A_0 - B_0$ とし、

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(A_n + B_n) + \sqrt{A_n B_n}\right)\ , \\
B_{n+1} &= \sqrt{A_n B_n}\ , \\
C_{n+1} &= A_{n+1} - B_{n+1}
\end{aligned}$$

とするとき、

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n + B_n}{1 - \sum_{j=0}^{n} 2^j C_j} \tag{25}$$

である。

この改良算法の最後の式 (25) は、

$$2a_{n+1}^2 = 2A_{n+1} = A_n + B_n + O(c_{n+1}^2)$$

を用いて導出してあります。したがって、(24) 式と (25) 式の収束のオーダーは同じになります。この改良算法は、最初の反復での 1 による自明な乗算を考慮すると、M 回の反復計算で平方根 M 回と乗算 $M-1$ 回と除算 1 回を必要とします。したがって、この変形で乗算 M 回と平方根 1 回を節約できたことになります。

次に、四次収束する算法を示します。これは、本来の算術幾何平均反復を

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \sqrt{\frac{1}{2}(a_{2n+1}+b_{2n+1})} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_{2n}}+\sqrt{b_{2n}}\right) ,\\ \beta_n &= \sqrt{\frac{1}{2}(a_{2n+1}-b_{2n+1})} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_{2n}}-\sqrt{b_{2n}}\right) ,\\ \gamma_n &= c_{2n}^2+\frac{1}{2}c_{2n-1}^2\end{aligned}$$

で置き換えることで得られます。

計算公式 2 (四次収束) $\alpha_0=\frac{1}{2}(1+1/\sqrt[4]{2})$, $\beta_0=\frac{1}{2}(1-1/\sqrt[4]{2})$, $\gamma_0=1/2$ とし、

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\alpha_n+\sqrt[4]{(\alpha_n^2+\beta_n^2)(\alpha_n^2-\beta_n^2)}\right) ,\\ \beta_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\alpha_n-\sqrt[4]{(\alpha_n^2+\beta_n^2)(\alpha_n^2-\beta_n^2)}\right) ,\\ \gamma_{n+1} &= (2\alpha_n^2+\beta_n^2)\beta_n^2\end{aligned}$$

とするとき、

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{2\alpha_n^4-\beta_n^4}{1-\sum_{j=0}^{n+1}4^j\gamma_j} \tag{26}$$

である。

この四次収束算法の最後の式 (26) は、

$$2a_{2n+3}^2=2\alpha_n^4-\beta_n^4+O(c_{2n+3}^2)$$

を用いて導出してあります。したがって、この四次収束算法の M 回の反復は、本来の計算公式 1 の $2M+2$ 回の反復に相当します。この算法は、$M/2-1$ 回の反復計算で四乗根 $M/2$ 回と乗算 $2M+1$ 回と除算 1 回を必要とします。ここで、四乗根の計算は直接のニュートン法の計算法を用いると、二回の平方根よりも少ない手間で計算できることに注意します。こうすることで、計算公式 1 よりも演算量は少なくなります。

このような高次収束する算法は、モジュラー関数の理論から組織的に導出することができます [2]。

3 多倍長計算の技法

ここでは、巨大な桁数をコンピュータを用いて計算する方法を解説します。まず、現代のコンピュータのハードウェアに備わった基本演算の精度は、32 ビット計算機ならば十進 9 桁の整数まで、64 ビット計算機ならば十進 19 桁の整数まで、浮動小数点 (実数) はどんなマシンでもたいてい十進 16 桁までしか扱えないということを念頭においてください。数十桁を超えるような計算は、四則演算などの基本演算ですらソフトウェアが必要で、計算手順 (算法) を指定しなければなりません。しかし、誰もが知っている小中学校で習う筆算の計算手順は、教育上は良いけれど実は非常に効率

の悪い計算手順であり、効率のよい計算手順と比較して、1万桁で百倍程度、1億桁で数十万倍の計算時間のロスが発生してしまうものなのです。高速で効率のよい計算を行うためには、良い計算手順が必要になります。この良い計算手順の導出には、さまざまな数学が使われており、その一部をここで紹介したいと思います。

3.1 乗算の高速化 1 (カラツバの方法)

R 進法の N 桁の乗算 fg を考えましょう。カラツバの方法は、まず N を偶数と仮定して

$$f = u_0 + R^{N/2}u_1\ , \quad g = v_0 + R^{N/2}v_1$$

のように桁を上下二つに分割し、

$$fg = (1 + R^{N/2})u_0v_0 + R^{N/2}(u_1 - u_0)(v_0 - v_1) + (R^{N/2} + R^N)u_1v_1$$

として計算します。$N/2$ 桁の乗算は3回しかないので、筆算の方法と比べて $N/2$ 桁の乗算1回分得をしたことになります。さらにこの計算を u_0v_0、$(u_1-u_0)(v_0-v_1)$、u_1v_1 の乗算に繰り返し適用することで、計算量はどんどん減って最終的に $N^{\log_2 3} \simeq N^{1.585}$ に比例する手間で計算できます。

この方法はディジタル法とも呼ばれ、1962年にカラツバが公表したのが最初とされています。このカラツバの方法は、後に述べる高速フーリエ変換による方法と比較して非常に単純なので、よく使われる方法です。またカラツバの方法は、拡張することができて、最初の分割数を2分割から3分割、4分割と増やせば、計算量はもっと少なくなりますが、いくら分割しても高速フーリエ変換による方法より演算量を少なくすることはできません。

3.2 乗算の高速化 2 (高速フーリエ変換による方法)

高速フーリエ変換を用いて乗算を高速化する方法を説明します。まず、乗算を畳み込み演算に変換し、次に畳み込み演算を高速フーリエ変換の問題に帰着させて、算法を導出します。最後は計算量の考察です。なお、高速フーリエ変換の詳細は3.4章で行います。

3.2.1 乗算と畳み込み演算の関係

まず、R 進法の N 桁整数表現を

$$f(R) = a_0 + a_1R^1 + a_2R^2 + \cdots + a_{N-1}R^{N-1}$$

で表すことにします。a_j は各桁の値で整数であり、通常は $0 \le a_j < R$ と正規化されているものとします。同様に、

$$g(R) = b_0 + b_1R^1 + b_2R^2 + \cdots + b_{N-1}R^{N-1}$$