

# くみひもの数理

鈴木 武史

## はじめに

演算の定義された集合を「代数系」と言います。代数系はその「表現」を通して数理科の様々な場面に現れ、活用されています。代数系の例として、くみひもの群を取り上げ、結び目や統計力学の理論との関連について解説します。

予備知識としては、線形代数と集合論の初歩しか必要ありませんが、ベクトル空間のテンソル積についてもある程度馴染んでおいていただけると尚良いと思います。

## 1 くみひも

何本かのひもを用意し、図1左のように並べ、各々のひもの上の端を固定します。ひもの下の端を持って、適当にひも同士を交差させた後、下の端を固定します。このようにして得られたものをくみひもと呼びます。 $n$ 本のひもからなるくみひもを $n$ くみひもとも呼びます。ひもの色や素材、長さなどの要素は考えません。さらに、くみひものパターンのみ

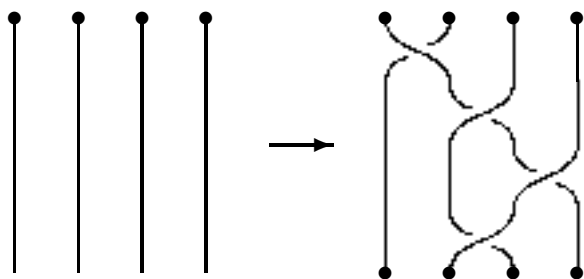


図1 くみひもの図式

に注目します。もう少し正確に言うと、「両端を固定したまま、ひもを動かすことによって移り合うくみひも同士を、同値なくみひもと呼び、同じものと見なす」ことにします。例えば、図2の組紐は互いに同値であることを確かめてください。

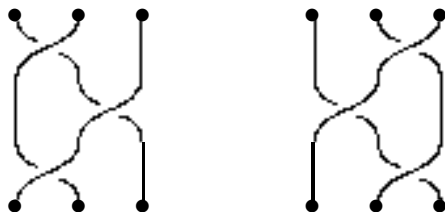


図2 同値なくみひも

$n$  くみひもの集合において, 同値なくみひもを同じものと見なした集合を  $B_n$  と記します. くみひも  $a$  と同値な全てのくみひもからなる集合を  $a$  の同値類と呼びますが, 集合  $B_n$  はこうした同値類を元とする集合と考えることもできるので,  $B_n$  をくみひもの同値類の集合と呼ぶこともあります. 以下では, この集合  $B_n$  について調べて行きます.

$B_n$  の元は, 上のように2次元の図で表すことができます. ひもをちょっと動かしても同じ  $B_n$  の元を表すので, そのような図として次のような条件を満たすものが取れます.

- ・ ひも同士の交点において3本以上が同時に交わることはない.
- ・ 同じ高さに2つ以上の交差が現れる(図3)ことはない.

このような条件を満たす図を, くみひもの図式と呼びます.

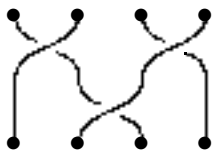


図3

## 2 くみひもの積と構成要素

最も簡単なくみひもは, まったく交差のない真っ直ぐなくみひもです. このくみひもを自明なくみひもと呼び  $e$  で表します. 図4のように  $i$  番目のひもと  $i+1$  番目のひもが  $i+1$  番目のひもを上にして交差しているくみひもを  $\sigma_i$  と記し, 図5のように逆向に交差しているくみひもを  $\sigma_i^{-1}$  と記します.  $\sigma_i$  および  $\sigma_i^{-1}$  をここでは基本交差と呼ぶことにします.

2つの  $n$  くみひも  $a$  と  $b$  が与えられたとき, これらを図6のように  $a$  の下に  $b$  を並べてつなぎ合わせることで新たなくみひもができます. このくみひもを  $ab$  と記し,  $a$  と

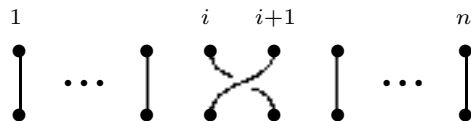


図4 基本交差  $\sigma_i$

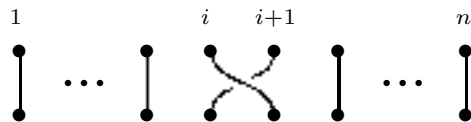


図5 基本交差  $\sigma_i^{-1}$

$b$  の積と呼びます. 一般に,  $ab$  と  $ba$  は異なるくみひもになるので順序に注意する必要があります.

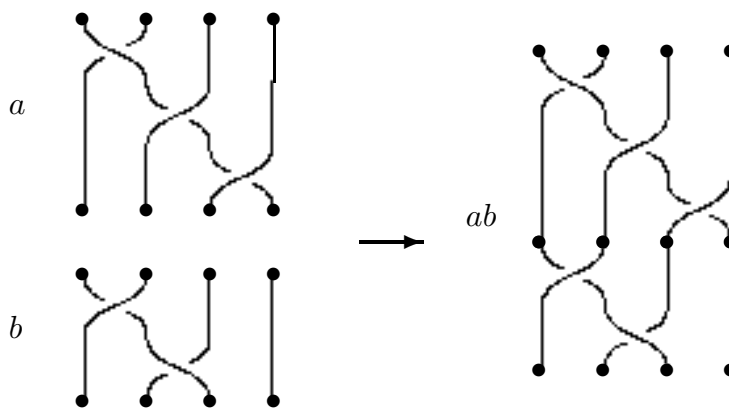


図6 くみひもの積

図6の  $a$  のくみひもは, 基本交差の積を用いて  $\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_3$  と書くことができます. 一般に,  $B_n$  の元が与えられたとき, そのくみひもの図式を上から順に見て行って, 現れる基本交差を左から順に並べて書くことにより, そのくみひもを基本交差の積の形に表示することができます. これはほぼ明らかな事実ですが, 命題の形に書いておきます.

命題 2.1 任意の  $B_n$  の元は, 基本交差  $\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \sigma_2, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_{n-1}^{-1}$  のいくつかの積の形で表される.

### 3 くみひも関係式

2つのくみひもの図式が与えられたとき, それらが同値かどうかはどうやって判定すればよいでしょう? 2つのくみひもが同値であることを示すには, 実際に変形して見せれば済みますが, 逆に, それらが同値で無いことを証明するのはなかなか大変なことです.

例えば, そもそも基本交差  $\sigma_i$  と自明なくみひも  $e$  は同値でしょうか? 直感的には明らかに同値でないと思われそうですが, 証明しろと言われたらどうしたらよいでしょう?

まず, 互いに同値なくみひもとしてどんなものがあるか見ましょう. 例えば図7がそうです(図は  $i$  番目と  $i+1$  番目のひも以外は省略して書いています). これら3つのくみ

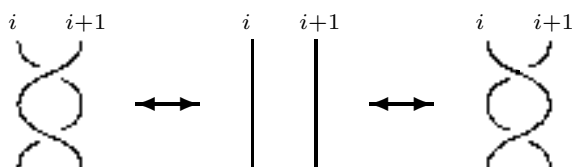


図7 同値変形 (I)

ひもは, 基本交差の積を用いてそれぞれ  $\sigma_i\sigma_i^{-1}$ ,  $e$ ,  $\sigma_i^{-1}\sigma_i$  と表されるので,  $B_n$  において

$$\sigma_i\sigma_i^{-1} = e = \sigma_i^{-1}\sigma_i \quad (1)$$

という等式が成り立つことが分かります. 図8, 9も互いに同値なくみひもの例です.

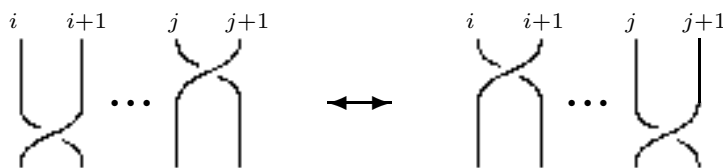


図8 同値変形 (II)

図8, 9の変形に対応してそれぞれ,

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1, |i-j| > 1) \quad (2)$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2) \quad (3)$$

という等式が得られます. 式(2)(3)をくみひも関係式と呼びます.

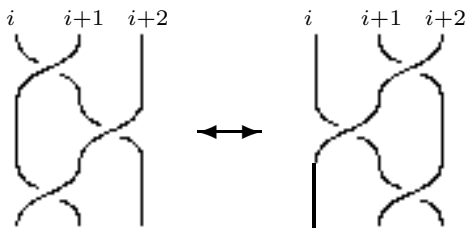


図9 同値変形 (III)

あるくみひもに, これらの変形を何回か繰り返して得られたくみひもも元のくみひもと同値です. 他には互いに同値なくみひもとして, どんなものが考えられるでしょうか? 実は, 後でもう少し正確に述べますが, 「同値なくみひもの図式同士は, 必ず変形 (I) ~ (III) を繰り返すことによって移りあう」ことがアルティンにより証明されています.

このアルティンの結果の応用をひとつ紹介します. 基本交差  $\sigma_i$  を  $k$  個並べたくみひもを  $\sigma_i^k$  と記し,  $\sigma_i^{-1}$  を  $k$  個並べたくみひもを  $\sigma_i^{-k}$  と記します. このとき次が成り立ちます.

命題 3.1 2つの整数  $k$  と  $k'$  に対して, くみひも  $\sigma_i^k$  と  $\sigma_i^{k'}$  が同値になるのは  $k = k'$  のときに限る.

証明 くみひも  $a$  に対して, 整数  $\epsilon(a)$  を,

$$\epsilon(a) = a \text{ の図式に現れる } \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \text{ の形の交差の数} - \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \text{ の形の交差の数}$$

で定めます. ここで, 上の同値変形 (I) ~ (III) において  $\epsilon(a)$  が変化しないことに注意します. 同値なくみひもは基本変形を繰り返して移りあうので, 同値なくみひも  $a$  と  $b$  に対して,  $\epsilon(a) = \epsilon(b)$  が成り立ちます.  $\epsilon(a)$  を  $a$  の交差数と呼ぶことにします.

$\epsilon(\sigma_i^k) = k$  は明らかであり, 一方,  $\epsilon$  は同値なくみひもに対して同じ値をとるはずなので,  $k \neq k'$  ならば  $\sigma_i^k$  と  $\sigma_i^{k'}$  は同値にはなりえません. (証明終り)

一般に, 同値関係の定義された集合からの写像であって, 同値な元に対して常に同じ値を取るものを不変量と呼ぶこともあります. この意味で, 交差数はくみひもの同値関係に関する不変量と言えます.

上で見たように, 不変量は与えられたくみひも同士が同値でないことを証明するのに有効な道具です. もちろん, 交差数が同じでも同値でないくみひもはいくらでも存在するので, 不変量が1つ得られたからといって, 全てのくみひもが区別できるわけではありません.

## 4 くみひもの群

集合  $G$  に対して, 対応  $G \times G \rightarrow G$  が与えられているとき, これを, 積または演算と呼びます. 演算の与えられた集合を総称して代数系と呼びます. 群は, 最も単純な代数系のひとつですが, 自然界においても「対称性」として様々な形で現れることから ([ヴァイル] 等参照), 古くから多くの研究がなされてきました.

定義 4.1 集合  $G$  において, 順序のついた 2 つの元の組  $a, b$  に対して,  $a$  と  $b$  の積と呼ばれる  $G$  の元  $a \cdot b$  が定義されていて, 次の条件 (G1)(G2)(G3) を満たすとき  $G$  を群と呼ぶ. また, 条件 (G1) と (G2) を満たすとき  $G$  をモノイドと呼ぶ.

(G1) 任意の 3 つの元  $a, b, c \in G$  に対して,

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(この条件は結合律と呼ばれます.)

(G2) 単位元と呼ばれる元  $e \in G$  が存在して, 全ての  $a \in G$  に対して,

$$a \cdot e = e \cdot a = a$$

(G3)  $G$  の任意の元  $a$  に対して,  $a$  の逆元と呼ばれる元  $a^{-1} \in G$  が存在し,

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

くみひもの同値類の集合  $B_n$  が, 前に定義した積に関して群になっていることを見ましょう.

まず, 結合律 (G1) は明らかです. 実際,  $a(bc)$  と  $(ab)c$  は全く同じ図式を与えます.

(G2) は, 単位元として自明なくみひもを取るにより成り立ちます. 実際, 任意のくみひも  $a$  に対して, 自明なくみひも  $e$  との積  $ae$  および  $ea$  は, 明らかに  $a$  と同値です.

(G3) も容易です. まず, 関係式 (1) より, 基本交差  $\sigma_i$  と  $\sigma_i^{-1}$  は互いに逆元の関係になっていることに注意しておきましょう. 任意の元をこの基本交差の積で表示しておき, そこに現れる基本交差のそれぞれの逆元を, 順番を逆にして並べた積を作ります. これがもとの元の逆元になっていることは簡単に確かめられます. 例えば,  $\sigma_1^{-1}\sigma_2$  の逆元は  $\sigma_2^{-1}\sigma_1$  で,  $\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$  の逆元は  $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1$  で与えられます.

従って, 全てのくみひもは逆元を持ち,  $B_n$  は群になります.

定理 4.2 先に定義した積により, くみひもの同値類の集合  $B_n$  は群になる.

考えている集合が自然に群という代数的構造を持つことが分かりました. この群をくみひも群と呼びます. このくみひも群の構造を記述したのが前に出てきたアルティンの定理です. 群論の言葉を用いて次のように述べられます.

**定理 4.3** くみひも群  $B_n$  は,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  を生成元とし, くみひも関係式 (2)(3) を基本関係式とする群である.

「生成元」という言葉の意味は命題 2.1 の通りです. くみひも関係式が「基本関係式」であるとは, 群  $B_n$  における等式は全て, くみひも関係式, および  $ae = a = ea, aa^{-1} = e = a^{-1}a$  等, 群において常に成り立っている式を繰り返し用いて得られるという意味です.

## 5 その他の群の例

いくつかの群の具体例を紹介しながら, 用語を補足します. 群についてよくご存知の方はこの節は飛ばしても結構です.

**例 5.1 (足し算の群)**  $\mathbb{Z}$  により整数全体の集合を表します. 二つの整数  $a, b$  に対し  $a$  と  $b$  の積  $a \cdot b$  を, 普通の足し算  $a + b$  で定義します (和を積と呼ぶのでちょっと気持悪いですが). この積が結合則を満たすことは明らかです. 単位元は  $0$  で, 元  $a$  の逆元は  $-a$  です. 同様にして全ての有理数からなる集合  $\mathbb{Q}$  も足し算に関して群になります.

群  $G$  の部分集合  $H$  が,  $G$  の積に関して群になっている時,  $H$  は  $G$  の部分群であるといえます.  $\mathbb{Z}$  は  $\mathbb{Q}$  の部分群です.

**例 5.2 (掛け算の群)** 有理数の集合  $\mathbb{Q}$  から  $0$  を除いた集合  $\mathbb{Q}^\times$  は, 掛け算の積によって群になります. 単位元は  $1$  で, 元  $a$  の逆元はその逆数  $\frac{1}{a}$  です.  $\mathbb{Q}$  の代わりに実数の集合  $\mathbb{R}$  や複素数の集合  $\mathbb{C}$  を取っても同様に掛け算の群  $\mathbb{R}^\times, \mathbb{C}^\times$  ができます. ただし, 整数の集合  $\mathbb{Z}$  から  $0$  を除いた集合はモノイドにはなりますが, 群にはなりません.

$\mathbb{Z}$  も  $\mathbb{Q}$  も, 足し算と掛け算という 2 種類の演算を持っており, さらに足し算に関しては群をなします. つまり引き算ができます. このように四則演算のうち足し算・引き算・掛け算を持つ代数系は環と呼ばれます. さらに,  $\mathbb{Q}$  (および  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) は  $0$  以外の元が積に関して逆元を持つので割り算もできます. ご存知のように, このような環は体と呼ばれます.

**例 5.3 (一般線形群)** ある体上のベクトル空間  $V$  に対して,  $V$  上の線形写像 (一次変換) であって, 正則なもの (逆写像を持つもの) 全体の集合を  $GL(V)$  と書きます. これらの集

合に写像の合成により積を定義します. すなわち,  $f, g \in GL(V)$  に対して積  $f \cdot g$  は,

$$(f \cdot g)(v) = f(g(v)) \quad (v \in V)$$

で定まる写像です. この積により  $GL(V)$  は群になります. 単位元は恒等写像で与えられ, 元  $f$  の逆元は逆写像  $f^{-1}$  で与えられます.  $GL(V)$  は  $V$  上の一般線形群と呼ばれます.

また,  $V$  上の全ての線形写像からなる集合を  $\text{End}(V)$  と記すと, これは合成の積に関してはモノイドですが, 和について群をなし, 環になります.  $\text{End}(V)$  はさらにベクトル空間の構造も持ちました. このような代数系を  $\mathbb{C}$  上の(結合)代数(または多元環)と呼びます.

$V$  が  $r$  次元複素ベクトル空間のとき,  $\text{End}(V)$  および  $GL(V)$  は, それぞれ  $r \times r$  複素行列全体の集合  $M_r(\mathbb{C})$  および正則行列全体の集合  $GL_r(\mathbb{C})$  と同一視できます.

例 5.4 (対称群)  $n$  個の数からなる集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  を考えます. この集合の入れ替え, すなわち, この集合からそれ自身への全単射の集合を  $\mathfrak{S}_n$  と書きます ( $\mathfrak{S}$  はドイツ文字の  $S$  です).  $\mathfrak{S}_n$  における積を, 写像の合成で定義します. この積で  $\mathfrak{S}_n$  は群になります. これを  $n$  次対称群(または置換群)と呼びます.  $\mathfrak{S}_n$  の位数(元の数)は  $n!$  です. 対称群については後でも触れますが, 数学の様々な場面に現れる重要な群です.

対称群のように位数が有限の群を有限群と呼びます. 一方, 位数が無限大の群を無限群と呼びます. 命題 3.1 より,  $n \geq 2$  の時, くみひも群  $B_n$  は無限群であることが分かります.

また, 群  $G$  の任意の 2 元  $g, h$  に対して

$$g \cdot h = h \cdot g$$

が成り立つ時  $G$  を可換群と呼びます. 可換群でない群を非可換群と呼びます. 足し算の群  $\mathbb{Q}$  や掛け算の群  $\mathbb{Q}^\times$  は可換群, 一般線形群や対称群は ( $n \geq 2$  の時) 非可換群です.

## 6 群の間の写像

群同士の「関係」について考えます. これは, 群の間の写像を考えるということです. 集合の間に全単射があるとき, それらは集合として同じものと考えました. 線形空間の間に線形全単射写像(線形同型写像)があるとき, それらは線形空間として同じものと考えました. 群の場合は, 群の「積を保つ写像」として, 次の群(準)同型写像を考えることになります.



定義 6.1 群  $G, H$  に対して,  $G$  から  $H$  への写像  $f$  が  $G$  の任意の 2 つの元  $a, b$  に対して

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

を満たすとき,  $f$  を準同型写像 (または群準同型写像) と言う. また, 準同型写像でかつ全単射なものを, (群) 同型写像と言う.

ここで,  $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$  という式において, 左辺の「 $\cdot$ 」は  $G$  での積, 右辺の「 $\cdot$ 」は  $H$  での積を表していることに注意します.

二つの群  $G$  と  $H$  の間に同型写像があるとき, これらは群として同型であると言い,  $G \cong H$  と書きます.

次の命題は容易なので, 証明は演習問題とします.

命題 6.2  $f$  を群  $G$  から群  $H$  への準同型写像とする. このとき, 次が成り立つ.

(1)  $f(e_G) = e_H$ . ここで,  $G$  の単位元と  $H$  の単位元をそれぞれ  $e_G, e_H$  と記した.

(2) 任意の  $G$  の元  $a$  に対して,  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ .

例 6.3 ( $\mathbb{Z}$  から  $\mathbb{Q}$  への準同型写像)  $f$  を,  $\mathbb{Z}$  から  $\mathbb{Q}$  への準同型とします. 上の命題 6.2-(1) より  $f(0) = 0$  です.  $f(1)$  はある有理数なのでこれを  $x$  とします. このとき,  $f(2)$  は,

$$f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = x + x = 2x$$

と決まります. 同様にして, 全ての正の整数  $k$  に対して,  $f(k) = kx$  と決ってしまいます. また, 命題 6.2-(2) より  $f(-1) = -x$  なので, 結局全ての整数  $k$  に対して,  $f(k) = kx$  となります. 逆に, 勝手に有理数  $x$  を与えれば,  $f(k) = kx$  なる写像は準同型写像です.

多くの集合論の教科書に書かれていますが, 整数の集合  $\mathbb{Z}$  と有理数の集合  $\mathbb{Q}$  は, 集合としては同型です. 一方, 上の議論で,  $x$  をどのように取っても  $\mathbb{Z}$  から  $\mathbb{Q}$  への準同型写像  $f$  は全射にはなり得ないことがわかんと思います. したがって,  $\mathbb{Z}$  と  $\mathbb{Q}$  は群として同型ではありません.

例 6.4 (交差数) くみひもの交差数  $\epsilon$  は  $\epsilon(ab) = \epsilon(a) + \epsilon(b)$  を満たすので, くみひも群  $B_n$  から足し算の群  $\mathbb{Z}$  への準同型写像です.  $n \geq 2$  ならこれは全射です. さらに, 特に  $n = 2$  の時は, この写像は全単射です. 従って群として  $B_2$  と  $\mathbb{Z}$  は同型です.

例 6.5 (対称群への埋め込み)  $G$  を位数  $n$  の有限群とします.  $S(G)$  により,  $G$  から  $G$  自身への集合としての同型写像 (すなわち全単射) 全体の集合を表します.  $S(G)$  は写像の合成に関して群になり, これは群として対称群  $S_n$  と同型です.

さて,  $G$  の元  $g$  に対し,  $G$  から  $G$  自身への写像  $F_g$  を

$$F_g(h) = g \cdot h \quad (h \in G)$$

で定めます.  $F_g$  の逆写像を  $F_{g^{-1}}$  で与えることができるので, この  $F_g$  は全単射になり, 従って,  $f(g) = F_g$  により写像  $f: G \rightarrow S(G)$  が得られます. この写像  $f$  が準同型になること, さらに単射になることは, 演習問題として各自確かめてみて下さい.

$S(G) \cong \mathfrak{S}_n$  であったので, 合わせて単射準同型写像  $G \rightarrow S_n$  が得られます. すなわち, 「任意の有限群  $G$  は, 対称群の部分群と同型になる」ことが示されました.

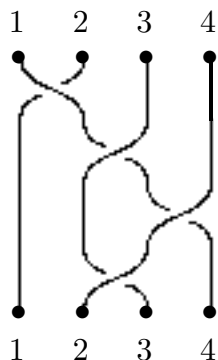


図 10

**例 6.6 (くみひも群と対称群)** くみひもの図式において, 各ひもの上下の端にそれぞれ左から  $1, 2, \dots, n$  と番号をつけます. 下の各番号から出ているひもが, 上のどの番号に結ばれているかに注目することにより,  $n$  個の数字  $\{1, 2, \dots, n\}$  の入れ替え, すなわち対称群  $\mathfrak{S}_n$  の元を対応させることができます. 例えば, 図 10 のくみひもには  $1, 2, 3, 4$  を順に  $2, 4, 3, 1$  に移すような置換が対応します.

各ひもがどの番号とどの番号を結んでいるかはくみひもの同値変形で変わらないので, この対応は, くみひも群  $B_n$  から対称群  $\mathfrak{S}_n$  への写像を定めます. この写像が準同型写像であることもほぼ明らかです. この写像は全射です.

群  $G$  と  $H$  に対し, 全射準同型  $G \rightarrow H$  があるとき,  $H$  は  $G$  の商群であると言います. 対称群  $\mathfrak{S}_n$  はくみひも群  $B_n$  の商群です.

## 7 群の表現

群,あるいはより一般に,環や多元環といった代数系が自然界に現れる際,ある対象への「作用」の形を介することが多くあります.特に,代数系がベクトル空間上に線形作用素として作用する場合は物理学等への応用上も重要な例を多く含みます.そして,こうした作用について研究することは,応用上重要であるばかりでなく,その代数系そのものの構造を解析する上でも本質的な役割を果たします.

以下に定義されるように,代数系の線形作用素としての実現のことを「表現」と呼びます.「代数系」はその名の通り代数的な概念ですが,表現を通して様々な数学と関係します.代数系の表現を研究する分野を総称して「表現論」と言います.

**定義 7.1** 準同型写像  $f: G \rightarrow H$  において,  $H$  が一般線形群であるとき,すなわち,あるベクトル空間  $V$  に対して  $H = GL(V)$  の形をしている時,  $f$  を,  $G$  の  $V$  上の(線形)表現と呼ぶ.  $V$  を表現空間,その次元を表現の次元と呼ぶ.

**注意**  $G$  の  $V$  上への表現  $f$  が与えられると,  $g \in G$  および  $v \in V$  に対し,  $f(g)v$  を対応させることで,  $G \times V$  から  $V$  への写像が得られます.この対応のことを  $G$  の  $V$  への作用と言うこともあります.

以下では,くみひも群  $B_n$  の表現について考えます.

アルティンの定理から導かれる次の系は,くみひも群からの準同型写像を考える上で有用です.

**系 7.2** 群  $G$  の元  $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$  が, 次の式を満たしているとする.

$$g_i g_j = g_j g_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1, |i-j| > 1), \quad (4)$$

$$g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2) \quad (5)$$

このとき,  $f(\sigma_i) = g_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) なる準同型写像  $f: B_n \rightarrow G$  がただ一つ存在する.

つまり,くみひも群  $B_n$  からの準同型写像を得るには行き先の群でくみひも関係式を満たす元の組を探せばよいことになります.

**例 7.3** (くみひも群の1次元表現を「全部」求める)まず,  $B_n$  の1次元表現  $B_n \rightarrow GL(\mathbb{C})$  を考えてみます.群  $GL(\mathbb{C})$  というのは,掛け算の群  $\mathbb{C}^\times$  と同一視できます.上の命題よ

り, くみひも関係式を満たす 0 でない複素数の組  $g_1, \dots, g_{n-1}$  を見つければ良いわけですが,  $\mathbb{C}^\times$  は可換群なので, くみひも関係式のうち最初の式は自明に成り立っています. さらに, 式  $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) が成立するための必要十分条件は,  $g_1 = g_2 = \dots = g_{n-1}$  となります.

したがって, 各  $t \in \mathbb{C}^\times$  に対して  $B_n$  の 1 次元表現  $f_t$  が,  $f_t(\sigma_i) = t$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) より定まり, 対応  $t \leftrightarrow f_t$  は, 集合  $\mathbb{C}^\times$  と  $B_n$  の 1 次元表現の集合との間の 1 対 1 対応を与えます.

さらに, 表現  $f_t$  は, 前に出てきた交差数を用いて,  $f_t(a) = t^{\epsilon(a)}$  ( $a \in B_n$ ) と表されます.

1 次元表現は全て決まりました. この調子で有限次元表現が全て決まると話は簡単なのですが, 2 次元以上になると行列の連立方程式 (4)(5) を解くことになり, 問題は急に難しくなります. 実際, くみひも群の全ての表現を決定するというのは, ちょっと無理な問題と思われる.

注意 くみひも群の商群である対称群に関しては, その表現論が古くから研究され, 特に有限次元表現としてどのようなものがあるかも, 全て決定されています. これらの表現の, ヤング図形やその上の標準盤といった組み合わせ的概念を用いた記述や, 一般線形群の表現との密接な関係に関する美しい理論についても時間があれば講義の中で触れたいと思います. 興味のある方は [岩堀] 等を参照して下さい.

以下では次の特別な表現に注目し, この表現を通してくみひも群が結び目理論や統計力学のモデルの理論に現れる様子を見ます.

例 7.4 (テンソル積上の表現)  $V$  により, 2 次元複素ベクトル空間  $\mathbb{C}^2$  をあらわし, 標準的な基底  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  を取ります. テンソル積の空間  $V \otimes V$  を考え,  $v_1 \otimes v_1$ ,  $v_1 \otimes v_2$ ,  $v_2 \otimes v_1$ ,  $v_2 \otimes v_2$  の順に取った基底に関し, 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & 0 \\ 0 & -q & 1 - q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で表される  $GL(V \otimes V)$  の元を  $T$  と書きます. ここで,  $q$  は 0 でない勝手な複素数です.

さらに,  $n$  個のテンソル積  $V^{\otimes n} = \overbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}^n$  を考え,  $GL(V^{\otimes n})$  の元を

$$T_i = \overbrace{I_V \otimes \dots \otimes I_V}^{i-1} \otimes T \otimes \overbrace{I_V \otimes \dots \otimes I_V}^{n-i-1}$$

で定めます. ここで,  $I_V$  は  $V$  上の恒等写像です. このとき,  $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$  はくみひも関係式を満たすことが示され,  $\rho_n(\sigma_i) = T_i$  なる  $B_n$  の表現が得られます.

注意 直接計算により, 例 7.4 の表現を定めた行列  $T_i$  は, 等式

$$(T_i - 1)(T_i + q^2) = 0$$

を満たすことが確かめられます. この式とくみひも関係式で定義される環を岩堀-ヘッケ環と呼びます. よって, 例 7.4 の表現は岩堀-ヘッケ環の表現ともできます. 岩堀-ヘッケ環は対称群同様, くみひも群  $B_n$  の商 (正確には  $B_n$  の群環の商) として得られる重要な代数系の一つです.

## 8 くみひもと結び目

ここからは, くみひも群が数学の他の分野においてどのような場面に現れ, 活用されているかについてお話しします.

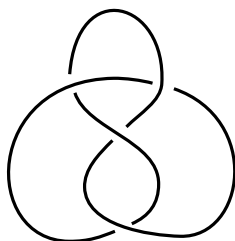


図 11 結び目

図 11 のように, ひもを結んで両端をつないだものを結び目と言います. 数学的には, 円周を 3 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  に埋め込んだものとして定義します. 絡まりあったいくつかの結び目のことをリンクと呼びます. くみひもと同様に, 2 つのリンクが連続的にひもを動かすことによって移り合うとき, それらを同値なリンクと呼びます. 与えられた 2 つのリンクが同値かどうかをどう判定するか, 同値でないリンクはどれだけあるか, という問題は, くみひもの同値性の問題以上に複雑で, それゆえにより大きな関心を持って研究されてきました. 以下では, くみひもの表現からリンクの不変量を構成する話を紹介します.

くみひもが与えられたとき, 図 12 のように向かい合う上の端と下の端をつなぐことにより, リンクができます.

実は次の事実がなりたち, アレクサンダーの定理として知られています.

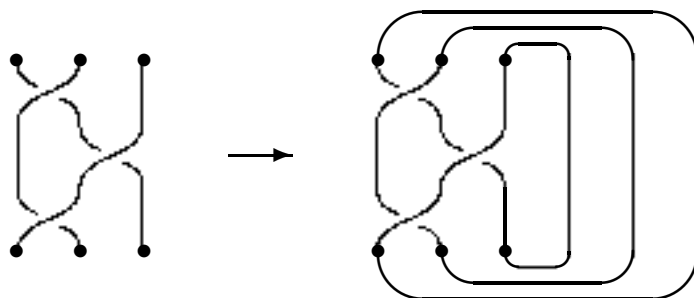


図 12 くみひもからリンクへ

定理 8.1 任意のリンクは, あるくみひもから上の操作でつくることことができる.

証明は, 例えば [河野] にありますが, 比較的初等的にできます.

同値なくみひもからは同値なリンクができることは両者の同値性の定義から明らかです. したがって上の操作は, くみひもの同値類の集合  $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$  からリンクの同値類の集合への写像を与えています. この写像を  $A$  で表します. 上のアレクサンダーの定理はこの写像が全射であると主張しています. しかし, 下で見るように, この写像は単射ではありません. つまり, 同値でないくみひもから同値なリンクができることもあります. ですから, くみひもが同値かどうかという問題と, 対応するリンクが同値かどうかという問題は等価ではありません. では, その違いはどれくらいあるでしょう?

例えば, 2つのくみひも  $a$  と  $b$  が与えられたとき,  $ab$  と  $ba$  はくみひもとしては同値とは限りませんが, 同値なリンクを与えます (図 13).

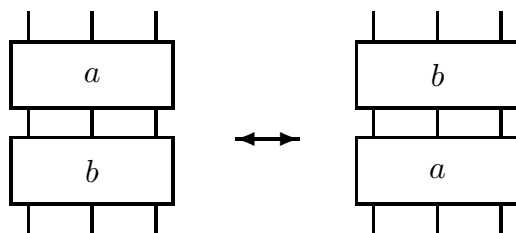


図 13 マルコフ変形 (I)

また,  $n$  くみひも  $a$  が与えられたとき,  $a$  の右に 1 本まっすぐなひもをつけ足して  $B_{n+1}$  の元とみなし, それに  $\sigma_n^{\pm 1}$  を合成したもの (図 14) をそれぞれ  $a\sigma_n$ ,  $a\sigma_n^{-1}$  と書くと,  $a$  と  $a\sigma_n$  と  $a\sigma_n^{-1}$  は, いずれも同値なリンクを与えています. これらの図式に対応するくみひもの変形はマルコフ変形と呼ばれ, 次の定理はマルコフの定理として知られています.

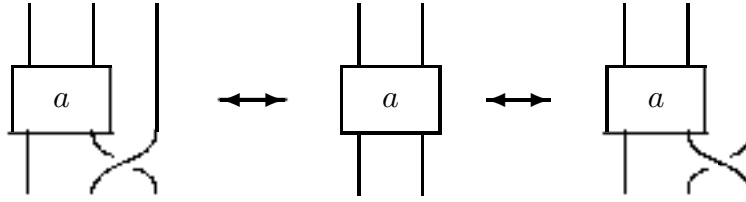


図 14 マルコフ変形 (II)

定理 8.2 くみひもの同値類の集合  $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$  の 2 つの元が与えられたとき, それらが同値なリンクを与えることと, マルコフ変形を繰り返すことによって移り合うことは同値である.

したがって, 集合  $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$  からの写像  $f$  で, マルコフ変形で不変なものがあれば, 各リンク  $L$  に対して,  $\mathcal{A}(a) = L$  なる  $a \in B_n$  を取り  $\hat{f}(L) = f(a)$  と定めることでリンクの同値類からの写像, すなわちリンクの不変量が得られます.

今, 各  $n$  ごとに  $n$  くみひも群の表現  $f_n : B_n \rightarrow GL(V_n)$  が与えられているとします. まとめて  $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$  から  $\cup_{n=1}^{\infty} GL(V_n)$  への写像が得られるのでこれを  $f$  と記します. もちろん, これはマルコフ変形で不変とは限りません.

そこでまず,  $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$  の元  $a$  に対して, 行列  $f(a)$  のトレース  $\text{Tr}(f(a))$  を対応させる写像を考えてみます.

$$\text{Tr}(f(ab)) = \text{Tr}(f(a)f(b)) = \text{Tr}(f(b)f(a)) = \text{Tr}(f(ba))$$

により, これはマルコフ変形 (I) に対しては不変です. まだマルコフ変形 (II) に関して不変とは限りませんが, 下の例で見るように「ちょっとした補正」により (II) に関して不変な写像に修正できることがあります. 多くのくみひも群の表現に対して, このような補正が具体的に知られており, 量子不変量と呼ばれる一連のリンクの不変量を与えています (詳しくは [大槻] 等参照).

例 8.3  $V = \mathbb{C}^2$  として, 例 7.4 の表現  $\rho_n : B_n \rightarrow \text{End}(V^{\otimes n})$  を考えます.  $V$  上の  $h = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$  なる行列で表される線形写像を考えて,  $h^{\otimes n} = \overbrace{h \otimes \cdots \otimes h}^n$  と置きます. リンク  $L$  に対して,  $\mathcal{A}(a) = L$  なる  $a \in B_n$  を取り,

$$J_L(q) = q^{\epsilon(a)} \text{Tr}(\rho_n(a)h^{\otimes n})$$

と定めます. ここで  $\epsilon$  は交差数です. これはリンクの不変量になることが示せます.  $q$  を変

数と見ると, これは  $q$  のローラン多項式になり, ジョーンズ多項式と呼ばれます. ジョーンズはこの発見により 1990 年にフィールズ賞を受賞しました.

## 9 統計力学とヤン・バクスター方程式

がらりと話が変わりますが, 統計力学とくみひも群の関係についてお話しします. まず, 統計力学の枠組みについて簡単に説明します.

相互作用する  $N$  個の粒子が温度  $T$  で熱平衡状態にあるような系を考えます. 簡単のため, 各粒子は  $+1$  または  $-1$  で表されるどちらかの状態を取るとします. どの粒子がどの状態にあるかを考えると  $2^N$  だけ状態 (配位と呼びます) があることになります. 「各配位  $\nu$  がどれくらいの確率で起こるか」を求めることが統計物理学の基本問題になります. この確率を  $W(\nu)$  と書くと, これは, 系の全エネルギー  $E(\nu)$  を用いて

$$W(\nu) = \frac{1}{Z_N} \exp(-E(\nu)/T)$$

と表されます (簡単のため, ボルツマン定数は 1 としました). ここで,  $Z_N$  は分配関数と呼ばれる量で,

$$Z_N = \sum_{\nu: \text{全ての配位}} \exp(-E(\nu)/T) \quad (6)$$

で与えられます. また, 分配関数を用いて表される

$$F = -T \log Z_N \quad (7)$$

は, 自由エネルギーと呼ばれる重要な物理量です.

全エネルギー  $E(\nu)$  はボルツマンウエイトと呼ばれる局所的な量から計算できます. ボルツマンウエイトを与えるごとに系が決まるので, これを模型 (モデル) と呼びます.

$N \rightarrow \infty$  の極限において, 分配関数や自由エネルギーが計算できる模型を可解模型と呼びます. (正確には, さらに相関関数と呼ばれる量も計算できる模型を可解模型と呼ぶことが多いようです.)

エネルギー  $E(\nu)$  が具体的に与えられたとしても, (6)(7) のような形の式を実際に計算するのは大変そうということが想像できると思います. 実際, 与えられた模型を解くこと, あるいは, 解ける模型 (ボルツマンウエイト) を探すことは大変難しい問題と考えられていました. しかし, 1970 年前後になされたヤンやバクスターの仕事により, 可解模型を与える統一的な手法が与えられました. そこで鍵となるのが, 今日ヤン・バクスター方程式と呼ばれる等式です.





