ベクトル解析、微分方程式、流体力学

大木谷 耕司

京大数理研

(Ver.2, June 4, 2006)

Abstract

流体力学では「場」を取り扱うため、その記述は偏微分方程式によってなされます。講義では、流体力学の問題を論じる際に必要な数理的な道具を復習し、1次元のモデル方程式などへの適用例を具体的に紹介します。偏微分方程式のベクトル表示、熱拡散方程式の解法などから始めて、モデル方程式の解析・計算例へと進みます。最先端の話題や、数値解析的な手法にも触れる予定です。

Contents

はじめに

数学入門公開講座として、流体力学／流体数学 関係の講義を準備するにはかなり頭を悩ました。この話題は、その起源を物理ないし工学に持つために背景を理解するため予備知識が必要とされるのがその理由の１つ。もう１つは、こうして出てきた、方程式（非線型偏微分方程式）の数学的な取り扱い自身から難しいからである。 さてどうしたものか。いっそこの状況をそのままお伝えすることが、現状を把握して頂くという意味で、正直で一番よいのではないかと思い至った。

残念ながら、すでに廃刊となってしまったが M. Shinbrot, **Lectures on fluid mechanics**, Gordon and Breach, (1973) という数学徒向けの特色ある教科書がある。２部に分けられ、前半はごく初等的な流体力学の入門で、具体的な例を通じて直感的なイメージを植え付けるように書かれている。後半は、流体方程式の解の存在に関する、著者自身による関数解析的な研究の解説で、基本的に 自己完結的に書かれている。当然ながら、前半と後半では要求される数学の程度には大きな開きがありヘビサイドのステップ関数をみる様な気がする。

今回の講義では、この手法を（内容ではない）借用させて頂くことにした。つまり、前半は、かなり初歩的な道具の復習から始め、後半では、簡単な例を用いつつも 現代数学の現場で直面しているものと本質的に同じ種類の困難を示す事を目的とする。叙述は極力平易に行う。

よって、最後まで聞いてもらっても、何かが解決されたという満足感を得ることはできないだろう。むしろ、足りない何かを探そうと思う人が１人でも出てくれば今回の講義の大きな成果と考えます。

全般的な総合報告として [M86,M91,C94], 流体力学の応用数学側面に関して入門書として [DG95,MB02] がある。

”That the questions considered are determined by the techniques available is not a reason for despising them. Mathematical work can be of tremendous importance in the physical conceptions one has about fluids. Without the d'Alembert (and other paradoxes), who would have thought it necessary to study more intricate models than the ideal fluid ? However, it is usually through paradoxes that mathematical work has the greatest influence on physics. **In terms of existence and uniqueness theory, this means that the most important thing to discover is what is not true. When one proves the Navier-Stokes equations have solutions, the physicist yawns. If one can prove these solutions are not unique (say), he opens his eyes instead of his mouth.** Thus, when we prove existence theorems, we are only telling the world where paradoxes are not and perhaps sweeping away some of the mist that surrounds the area where they are.”

M. Shinbrot, **Lectures on fluid mechanics**, Gordon and Breach, (1973)

I. ベクトル解析: DIV と CURL

普通の微分の定義

$$a\frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon a)-f(x)}{\epsilon} \tag{1}$$

を思い起こそう。ナブラ演算子 ∇ を

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

と定義すれば

$$\boldsymbol{a}\cdot\nabla\phi \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{r}+\epsilon\boldsymbol{a})-\phi(\boldsymbol{r})}{\epsilon} \tag{2}$$

となる。ここで、$d\boldsymbol{s}=\epsilon\boldsymbol{a}$ とおけば

$$d\boldsymbol{s}\cdot\nabla\phi = d\phi \tag{3}$$

とかける。積分定理には、いろいろ種類があるが

$$\nabla\phi = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_S \phi\, d\boldsymbol{S} \tag{4}$$

がその１つである。$\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ 方向の勾配 $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$ は

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}+\epsilon\boldsymbol{a})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})}{\epsilon} \tag{5}$$

である。あるいは 先ほどの $d\boldsymbol{s}$ を用いれば

$$(d\boldsymbol{s}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} = d\boldsymbol{b} \tag{6}$$

とかける。$\boldsymbol{a}$ の発散 div $\boldsymbol{a}$ の定義は

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{a} = \frac{\partial \mathrm{a}_1}{\partial \mathrm{x}_1}+\frac{\partial \mathrm{a}_2}{\partial \mathrm{x}_2}+\frac{\partial \mathrm{a}_3}{\partial \mathrm{x}_3}$$

であり

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{a} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_S \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{7}$$

を満たす。また、$\boldsymbol{a}$ の回転 rot $\boldsymbol{a}$ とは

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial \mathrm{a}_3}{\partial \mathrm{x}_2}-\frac{\partial \mathrm{a}_2}{\partial \mathrm{x}_3}, \frac{\partial \mathrm{a}_1}{\partial \mathrm{x}_3}-\frac{\partial \mathrm{a}_3}{\partial \mathrm{x}_1}, \frac{\partial \mathrm{a}_2}{\partial \mathrm{x}_1}-\frac{\partial \mathrm{a}_1}{\partial \mathrm{x}_2}\right)$$

であり

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_S d\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{a} \tag{8}$$

を満たす。なお、

$$\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a} = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{s}$$

である。積分定理の説明は講義中に行う。これらにより、発散、回転の名前の由来が明らかになる。

有用な公式

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + (\nabla\phi)\psi$$

$$\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

$$\mathrm{rot}(\phi\boldsymbol{A}) = \nabla\times(\phi\boldsymbol{A}) = \phi\nabla\times\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\times\nabla\phi$$

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

II. 流体方程式を書こう！

時刻 t での場所 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ にある粒子のもつ速度（の第一成分）を $u(x,y,z,t)$ と書くと、その加速度は $\dfrac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}$ となると思ってしまいそうだがこれは正しくない。なぜなら、時刻 t で $\boldsymbol{x}$ にいた粒子は、少し時間が経つと一般には同じ場所にはいなくなるからである。後の時刻 $t+\delta t$ で粒子が占める場所を $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$ とおくと、この粒子の加速度成分は

$$\frac{u(x+u\delta t, y+v\delta t, z+w\delta t, t+\delta t)-u(x,y,z,t)}{\delta t}$$
$$\approx \frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t}+u\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}+v\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial y}+w\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}$$

となる。この表現の右辺第２項以降のため、流体方程式は速度変数について２次となり、非線型性をもつことが分かる。流体の密度 ρ とすれば、運動方程式

$$\rho\times(\text{加速度})=\text{力}$$

において、非粘性流体の場合には働く力は圧力勾配 $-\nabla p$ である。これに粘性効果（流体のまさつ）を考慮すれば、速度 $\boldsymbol{u}=(u(x,y,z,t),v(x,y,z,t),w(x,y,z,t))$ に対して成分表示において非圧縮粘性流体方程式は以下の様に書くことができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \tag{10}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{12}$$

同じ方程式を先に学んだベクトル記号を用いると、以下の様に簡明になる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\nabla p+\nu\triangle\mathbf{u},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0.$$

ここで、圧力 p は速度と独立な変数ではない。実際、上の式の $n\nabla\cdot$ をとれば

$$\triangle p=-\frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i\partial x_j}$$

が得られる。例えば、全空間の場合、

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}\frac{\partial^2 u_i(\boldsymbol{y})u_j(\boldsymbol{y})}{\partial y_i \partial y_j}d\boldsymbol{y}$$

となる。$\boldsymbol{x}$ での圧力を決めるには、その時刻の $\boldsymbol{x}$ の速度のみならず速度場全体の情報が要る。この意味で、非圧縮流体の方程式は非局所的な性質を持つという。

III. 熱方程式を解こう！

> The use of operators frequently effects great simplifications, and the avoidance of complicated evaluations of definite integrals. But then the rigorous logic of the matter is no plain! Well, what of that? Shall I refuse my dinner because I do not fully understand the process of digestion?

'Oliver Heaviside,' E.T. Whittaker in "Electromagnetic Theory", O. Heaviside(1893)

A. 熱核

1 次元の熱拡散方程式は次の形をとる。簡単な導出は講義中に示す。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

この方程式の発見的な解法を 1 つ述べる。記号的に解を

$$u = \exp\left(\sqrt{\nu t}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u_0(x)$$

と書こう。さて Gauss の積分から、任意の実数のパラメータ l について

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2ul}du = \sqrt{\pi}e^{l^2}$$

が成り立つ。ここで形式的に $l = \sqrt{\nu t}\frac{\partial}{\partial x}$ という置き換えを施せば

$$u = e^{\nu t \partial_x^2}u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2u\sqrt{\nu t}\partial_x}u_0(x)du$$

つまり

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} u_0(x + 2u\sqrt{\nu t}) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}} u_0(y) dy.$$

が得られる。同様の議論は、直積を用いて多次元の場合に拡張できる。たとえば、3 次元の場合

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \triangle u.$$

と考えて

$$u = e^{\nu t \triangle} u_0(\boldsymbol{x}) = e^{\nu t (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)} u_0(\boldsymbol{x})$$

$$= \frac{1}{(2\pi\nu t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2}{4\nu t} \right) u_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}.$$

を得る。

以上の最終結果は正当化されている。

IV. 流体方程式の解法

> The problem of discovering exact solutions of the Navier-Stokes' differential equations presents in general insuperable difficulties, a condition principally due to the fact that they are nonlinear. Nevertheless, in particularly simple cases it is possible to give exact solutions, either because the "quadratic terms" disappear by themselves as a result of the nature of the problem or else because the problem can be simplified by some suitable assumption

The mechanics of viscous fluids by L. Prandtl, in *Aerodynamic Theory* Vol.III, (ed.) W. Durand, Springer(1934).

A. Burgers 渦

有名な Burgers 渦管 [B48] とは、時間に依存しない、引き伸ばしに対応する外力項をもつ Navier-Stokes 方程式の厳密解である。この外力項があるため、この解の全エネルギーは有限ではないが、局所的には遠くにある渦の影響を模擬しているという点が興味深い。現在

Burgers 渦として知られているこの解は Rott [R58] によっても独立に発見された。その論文では、圧力分布などの解のより詳しい構造も吟味されている。

元来は、Burgers の解は Navier-Stokes は定常解として与えられた。文献 [R58] では、非定常解も与えられている。これが可能な理由は、非線型項（対流項）が 0 となり、実質的には上でみた（線型の）熱拡散方程式の問題に帰着するからである。

いわゆる Burgers 渦は、非定常解の長時間後の漸近形として実現される [K84,M86]。このことを、以下でみよう。定数の引伸ばし $\alpha(>0)$ を伴う流れを考える。その速度、および渦度は

$$\boldsymbol{u} = (-\alpha x + u_1(x,y,t), -\alpha y + u_2(x,y,t), 2\alpha z) \tag{13}$$

および

$$\boldsymbol{\omega} = (0,0,\omega_3),\ \omega_3 = \partial_x u_2 - \partial_y u_1. \tag{14}$$

によって与えられるとする。このとき、渦度方程式は

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \omega_3}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \omega_3}{\partial y} = \alpha x \frac{\partial \omega_3}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial \omega_3}{\partial y} - \gamma \omega_3 + \nu \triangle_2 \omega_3, \tag{15}$$

ここで $\triangle_2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2$ である。流れが軸対称性を持つ場合は

$$u_1 \frac{\partial \omega_3}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \omega_3}{\partial y} = \frac{\partial(\omega_3, \psi)}{\partial(x,y)} = 0,$$

となって、対流項は ゼロである（ここで ψ は流れ関数)。

ここで、変数変換 $\Omega_3 = \omega_3 e^{\gamma t}$ および $X = xe^{\alpha t},\ Y = ye^{\alpha t},\ T = (e^{2\alpha t}-1)/(2\alpha)$, を導入すると、渦度方程式は以下の熱拡散方程式

$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial T} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial Y^2} \right) \tag{16}$$

になる。これは、上で学んだ方法により解くことができて、解は

$$\Omega_3(X,Y,T) = \frac{1}{4\pi\nu T} \int \omega_3(X',Y',0) \exp\left(-\frac{(X-X')^2 + (Y-Y')^2}{4\nu T} \right) dX'dY' \tag{17}$$

となる。元の変数に戻せば

$$\omega_3(r,t) = \frac{\alpha}{2\pi\nu} \frac{e^{2\alpha t}}{e^{2\alpha t}-1} \int \omega_3(X',Y',0) \exp\left(-\frac{\alpha}{2\nu} \frac{(e^{\alpha t}x - X')^2 + (e^{\alpha t}y - Y')^2}{e^{2\alpha t}-1} \right) dX'dY' \tag{18}$$

となる。ここで、長時間極限をとれば

$$\omega_3(r,t) \to \frac{\alpha\Gamma}{2\pi\nu}\exp\left(-\frac{\alpha r^2}{2\nu}\right) \text{ as } t \to \infty$$

が得られる。これが Burgers 渦管である。これは外部からの伸長効果と粘性散逸効果が、バランスしてできる定常状態を表している。

B. 類似の解

このクラスは、渦度が２つの成分を持ち、速度が１つの成分を持つという意味で上の Burgers 渦と対をなしている。[T91] では、このクラスは渦の繋ぎ替えのモデルとして考察されている。また、2 次元の場合は [T90] を参照のこと。

速度、および渦度は

$$\boldsymbol{u} = (-\alpha x, -\beta y, -\gamma z + u_3(x,y,t)) \tag{19}$$

および

$$\boldsymbol{\omega} = (\partial_y u_3, -\partial_x u_3, 0), \tag{20}$$

ここで $\alpha, \beta > 0,\ \alpha+\beta+\gamma = 0$ である。

渦度方程式は

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial t} = \alpha x\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \beta y\frac{\partial\omega_1}{\partial y} - \alpha\omega_1 + \nu\triangle_2\omega_1, \tag{21}$$

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial t} = \alpha x\frac{\partial\omega_2}{\partial x} + \beta y\frac{\partial\omega_2}{\partial y} - \beta\omega_2 + \nu\triangle_2\omega_2, \tag{22}$$

となる。ここで、恒等式

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla u_3 = \omega_1\partial_x u_3 + \omega_2\partial_y u_3 = 0$$

を用いた。独立、従属変数に対して

$$\Omega_1 = \omega_1 e^{\alpha t},\ \Omega_2 = \omega_2 e^{\beta t},$$

$$U_3 = u_3 e^{-\gamma t},$$

$$X = xe^{\alpha t},\ Y = ye^{\beta t},\ T = t$$

の変換を施すと

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial T} = \nu \left(e^{2\alpha T} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + e^{2\beta T} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \Omega_1 \tag{23}$$

となる。

$$\Omega_1 = \frac{\partial U_3}{\partial Y}$$

に注意すれば、速度の軸方向成分が同じ方程式

$$\frac{\partial U_3}{\partial T} = \nu \left(e^{2\alpha T} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + e^{2\beta T} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) U_3 \tag{24}$$

を満足することが確認できる。これを解けば

$$U_3(X,Y,T) = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2\pi\nu\sqrt{(e^{2\alpha T}-1)(e^{2\beta T}-1)}} \tag{25}$$

$$\times \int u_3(X',Y',0) \exp\left(-\frac{\alpha(X-X')^2}{2\nu(e^{2\alpha T}-1)} - \frac{\beta(Y-Y')^2}{2\nu(e^{2\beta T}-1)} \right) dX'dY',$$

すなわち、

$$u_3(x,y,t) = \frac{e^{\gamma t}\sqrt{\alpha\beta}}{2\pi\nu\sqrt{(e^{2\alpha t}-1)(e^{2\beta t}-1)}} \tag{26}$$

$$\times \int u_3(X',Y',0) \exp\left(-\frac{\alpha(xe^{\alpha t}-X')^2}{2\nu(e^{2\alpha t}-1)} - \frac{\beta(ye^{\beta t}-Y')^2}{2\nu(e^{2\beta t}-1)} \right) dX'dY'$$

となる。 Burgers 渦の場合と違い $t \to \infty$ の極限で、非自明な解に漸近することはない。これは

$$u_3(x,y,t) \approx \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2\pi\nu} \left(\int u_3(x',y',0) dx'dy' \right) \exp\left(-\frac{\alpha x^2 + \beta y^2}{2\nu} \right) \exp\,(2\gamma t),$$

のように 0 に減衰する。$(\gamma = -(\alpha+\beta) < 0)$

C. 数値解法

時間に余裕があれば、流体方程式の Fourier 級数表示を解説し、数値計算法の 1 つであるスペクトル法について簡単な紹介をしたい。計算例も紹介する予定である。

この手法に興味がある方は `http://dnslab.at.infoseek.co.jp/` が参考になるかも知れない。

V. モデル方程式

> His account of the people who influenced his professional life will fascinate younger fluid dynamicists, to whom he is perhaps known as the inventor of the Burgers equation. (“A very simple equation,” he said to one of us recently with typical modesty, and we had the wit to reply: “Yes, but so is the Laplace equation.”)

M. van Dyke, W.G. Vincenti and J.V. Wehausen PREFACE to of Ann. Rev. Fluid.Mech. 7 (1975)

A. Burgers 方程式

この方程式は 1939 年に 乱流現象を表す数学的なモデルとして Burgers によって導入された。以下に見るようにこの方程式は、可積分であり乱流のもつカオス的な性質を持ち得ないという欠点はあるが、乱流などの分野の理論の発展に大変役立ってきた。もっとも簡単なバージョンは以下の通りである。通常はこの方程式をさして Burgers 方程式と呼ぶことが多いようである。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{27}$$

ここで 1 次元速度場 $u = u(x, t)$ は適当な境界条件、および初期条件 $u = u_0$ を満足するとする。この方程式 (27) の特徴を列挙すれば次のようになる。

(i)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

とおけば、つまらない解 $u = \mathrm{const.}$ しか得られないため非圧縮性条件を課すことができない。

(ii) 従属変数の変換により (27) は厳密に線形化することができる。Forsyth-Florin-Hopf-Cole 変換

$$u = -2\nu(\log\psi)_x = -2\nu\frac{\psi_x}{\psi}. \tag{28}$$

によって (27) を

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \tag{29}$$

に帰着することができる。なお、Hopf(1950) と Cole(1951) は流体力学の文脈で (28) を発見した。流体力学的以外の文脈では、この変換はすでに Forsyth(1906), Florin(1948) によって事実上知られていたことを付記する。A. Biryuk(2004), "Note on the transformation that reduces the Burgers equation to the heat equation," `http://www.ma.hw.ac.uk/~kuksin/students/bir.ps`

実際、

$$u_t = -2\nu(\log\psi)_{xt} = -2\nu(\log\psi)_{tx} = -2\nu\left(\frac{\psi_t}{\psi}\right)_x$$

を計算する。(28) および

$$u_x = -2\nu\frac{\psi_{xx}\psi - \psi_x^2}{\psi^2}$$

を

$$u_t = \left(\nu u_x - \frac{u^2}{2}\right)_x$$

に代入すると

$$u_t = \left(-2\nu^2\frac{\psi_{xx}}{\psi}\right)_x$$

が得られる。この

$$-2\nu\left(\frac{\psi_t}{\psi}\right)_x = \left(-2\nu^2\frac{\psi_{xx}}{\psi}\right)_x$$

を x について積分すれば

$$\psi_t = \nu\psi_{xx} + C(t)\psi.$$

となる。あとは、変数を

$$\psi \to \psi\exp\left(-\int^t C(t')dt'\right)$$

と置き換えればよい。

もし、1 次元渦度を

$$w = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

と定義すれば

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} = w^2 + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{30}$$

となる。この式から、粘性率を $\nu = 0$ とした場合、有限時間で爆発する解があることは明かである。

挙動が良く分からない方程式が与えられた場合、解の存在が証明できないことがある。このような場合、解の爆発を疑い、例えば自己相似性（独立変数の特定の組み合わせにのみ依存する解）を仮定して、爆発する解を探すことがよく行われる。（Navier-Stokes 方程式もそうである。）

当然ながら、粘性項をもつ Burgers 方程式の場合自己相似的に爆発する解は有り得ない。（帰着した熱拡散方程式がもつ解の具体的表現から明らかです。）ここでは、この方法の例示のためこれを直接に示そう。

$$u = \sqrt{\frac{\nu}{T-t}} U \left(\frac{x}{\sqrt{\nu(T-t)}} \right)$$

とおけば、無次元速度に対して

$$\frac{1}{2} \left(U + \xi \frac{dU}{d\xi} \right) + U \frac{dU}{d\xi} = \frac{d^2 U}{d\xi^2}$$

という方程式が得られる。ここで

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\nu(T-t)}}$$

である。

境界条件 $U(\pm\infty) = 0$ の下で ξ について積分をすれば

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{1}{2} U(U + \xi)$$

変換 $V = 1/U$ により

$$\frac{dV}{d\xi} = -\frac{1}{2}(1 + \xi V)$$

となる。これは非同次線形方程式で、その解は

$$V = \left(c - \frac{1}{2} \int_0^\xi e^{\eta^2/4} d\eta \right) e^{-\xi^2/4},$$

つまり

$$U(\xi) = \frac{1}{\left(c - \frac{1}{2} \int_0^\xi e^{\eta^2/4} d\eta \right) e^{-\xi^2/4}}$$

と書ける。

$$U \to \frac{1}{|\xi|}, \text{ as } \xi \to \pm\infty.$$

であるので、ある ξ_* について

$$c - \frac{1}{2}\int_0^{\xi_*} e^{\eta^2/4} d\eta = 0.$$

となる。よって、そこで $U \sim \dfrac{1}{\xi - \xi_*}$, であり可積分ではない。

n 次元版 Burgers 方程式

n 次元速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$、与えられた 外力 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t)$ （n 次元ベクトル）に対し

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = \nu \triangle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$$

を考える。変数変換

$$\boldsymbol{u} = -2\nu \nabla \log \phi, \ \boldsymbol{w} = -\nabla N$$

を導入すれば

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \triangle \phi + \frac{1}{2\nu} N \phi$$

と線型方程式に帰着できる。(さきほどのケースは $n = 1$, $\boldsymbol{w} = 0$ に対応する。)

VI. LERAY の理論

Navier-Stokes 方程式の数学的な研究は Leray(1934),”Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace”, Leray, J., Acta Math. **63** 193–248 によって、本格的に始まった。この古典的な論文の英訳が`http://www.math.cornell.edu/~bterrell/leray.html` にある。Navier-Stokes 方程式の弱解は、通常 Leray-Hopf の名前で呼ばれる。Hopf の論文の英訳は`http://www.dam.brown.edu/people/menon/am224/hopf-NS.pdf` にある。Navier-Stokes 方程式の弱解や未解決問題については [O01,FO02] などを参照ください。

時間に余裕があれば Rosen(1970) による簡易化されたプレゼンテーションによって概要を紹介したい。

*N-S 方程式の弱解 ($D = \mathbb{R}^3$)

solutions turbulentes =弱解

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \nu\triangle\mathbf{u},\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

$$-\int_0^T\int_D \boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t}d\boldsymbol{x}dt - \int_D \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)\cdot\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} - \int_0^T\int_D \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\psi d\boldsymbol{x}dt$$
$$= \nu\int_0^T\int_D \boldsymbol{u}\cdot\triangle\psi d\boldsymbol{x}dt + \int_0^T\int_D p\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}d\boldsymbol{x}dt,$$
$$\int_0^T\int_D \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}d\boldsymbol{x}dt = 0$$

- Leray 対流速度を filter 無限領域（全空間）

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \nu\triangle\mathbf{u},\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

$$\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{u} * \rho_\delta(\boldsymbol{x}),\ \rho_\delta(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\delta^3}\rho\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\delta}\right)$$

- Hopf (1951) ガレルキン法、 有限領域

エネルギー不等式

$$\frac{1}{2}\int|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)|^2d\boldsymbol{x} + \nu\int_0^t\int|\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)|^2d\boldsymbol{x}dt \le \frac{1}{2}\int|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)|^2d\boldsymbol{x}$$

VII. 問題の困難

以下はお話風にエッセンスのみを伝えることを目的とする。

流体方程式の解の正則性のための判定基準のいろいろをまとめておく。

A. N-S 方程式

$$\int_0^T\left(\max_{\boldsymbol{x}}|\boldsymbol{u}|\right)^2 dt < \infty, \quad \text{次元}\ [\nu]\ \text{(Serrin 1963 ほか)}$$

$$\int_0^T\left(\int|\boldsymbol{\omega}(t)|^2d\boldsymbol{x}\right)^2 dt < \infty, \quad \text{次元}\ [\nu^3]\ \text{(Leray 1934)}$$

*Euler 方程式

$$\int_0^T \max_{\boldsymbol{x}} |\boldsymbol{\omega}(t)| dt < \infty, \quad [\text{無次元}] \ (\text{Beale-Kato-Majda,1984})$$

関数解析における、堅実な手法として、補間不等式による評価がある。(あえて柔道の技に例えれば '寝技' に相当する) これによれば エンストロフィー $Q(t) \equiv \|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2}^2$ に対して、以下の様な評価が得られる。（右辺では、一番大きな項のみを残した；つまり粘性項からの負の寄与は省いてある。）以下の不等式は、次元解析から予想はできる。

＊ 2 次元

$$\frac{dQ(t)}{dt} < \nu^{-1} Q(t)^2$$

この場合

$$Q(t) \propto \frac{1}{T-t}$$

程度に発散が起きそうに見えるが

$$\int_0^T Q(t) dt < \infty \ \text{有限エネルギーの条件}$$

（“無い袖は振れない原理” と呼ぼう。）から、実はこの可能性は排除できる。つまり 2 次元粘性流は正則である。

＊ 3 次元

$$\frac{dQ(t)}{dt} < \nu^{-3} Q(t)^3$$

この場合

$$Q(t) \propto \frac{1}{(T-t)^{1/2}}$$

程度に発散が起きる可能性がある。しかし

$$\int_0^T Q(t) dt < \infty \ \text{有限エネルギーの条件}$$

を考慮しても、この可能は排除できない。

ちなみにこの評価は、以下の意味で最適ゆえこの困難は真性のものである。$\nu^a E(t)^b Q(t)^c$ が次元 $[L^3 T^{-3}]$ をもつとして最小の c は $c = 3$。ただし $E(t) \equiv \|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2$。

B. なぜ、Euler 方程式の特異性を示すことが困難なのか？

これは、基礎方程式が非線形性に加えて、非局所性をもつからです。つまり、Euler 方程式が 双曲型方程式＋圧力勾配 という形をしているためです。

圧力を持たない、非粘性 Burgers 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0$$

と比べれば良く分かります。この場合、特性曲線は直線で、有限時間で交わることを示せます。Euler 方程式では、圧力項がこれを曲げるため、 特性曲線が交わるかどうか不明です。（特性曲線の方法が有効に使えない）

C. なぜ、N-S 方程式の正則性を示すことは困難なのか？

N-S 方程式は 双曲型方程式の放物的正則化 です。

多次元 Burgers 方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \nu \triangle \boldsymbol{u}$$

の、解が正則であることは知られています。（次元が同じなので当然ですが、上に述べたノルムによる評価ではやはりダメで、正則性を示すことは出来ません。）しかし、この場合、

$$\sup_{\boldsymbol{x}} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)| \leq \sup_{\boldsymbol{x}} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0)|$$

が成り立つことが知られています。これを **最大値原理**といい、柔道の技では ’投げ’ に相当する。したがって $|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)| < M \Rightarrow$ 正則 Kiselev-Ladyzenskaya(1957)
もちろん $\boldsymbol{u} = \nabla \psi$ の場合には Forsyth-Cole-Hopf 変換を使ってもいいです。

しかし、圧力項があると **最大値原理が使えなくなる**ので N-S 方程式の正則性は未解決となります。

REFERENCES

[M86] A. Majda, “Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow,” Comm. Pure Appl. Math. **39**, S187(1986)

[M91] A. Majda, “Vorticity, turbulence, and acoustics in fluid flow,” SIAM Review **33**, 349(1991).

[C94] P. Constantin, “Geometric statistics in turbulence,” SIAM Review **36**, 73(1994).

[DG95] C.R. Doering and J. D. Gibbon, *Applied analysis of the Navier-Stokes eqiations*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

[MB02] A.J. Majda and and A.L. Bertozzi, ”Vorticity and Incompressible Flow”, Cambridge University Press, 2002.

[FO02] 岡本 久 と 藤田 宏, 数学七つの未解決問題, 森北出版, 第７章.

[O01] 岡本 久, Navier-Stokes 方程式の未解決問題, 数理科学, 2001 年５月号, pp. 67–74.

[B48] Burgers, J. M., A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Advances in Applied Mechanics*, **1** (1948), 171–199, Academic, New York.

[R58] Rott, N., On the viscous core of a vortex line, *Z. angew. Math. Phys.*, **9b** (1958), 543–553. *ibid.*, **10** (1959), 73–81.

[K84] Kambe, T., Axisymmetric vortex solution of Navier-Stokes equation *J. Phys. Soc. Jpn.*, **53** (1984), 13–15.

[M86] Majda, A. J., Vorticity and the mathematical theory of incompressible flow, *Commun. Pure Appl. Math*, **39** (1986), S187–S220.

[T91] Takaoka, M., Straining effects and vortex reconnection of solutions to the 3-D Navier-Stokes equations, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **60** (1991), 2602–2612.

[T90] Takaoka, M., Some characteristics of exact strained solutions to the Two-dimensional

Navier-Stokes equations, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **59** (1990), 2365–2373.

[R70] Rosen, G., Navier-Stokes Initial Value Problem for Boundary-Free Incompressible Fluid Flow, *Phys. Fluids*, **70**(1970), 2891–2903.