極小モデル理論の発展

川北真之

代数幾何学の扱う対象は，代数多様体と呼ばれる，連立多項式の共通零点集合として定義される図形です．極小モデル理論とは，変数変換で写り合う代数多様体たちを本質的に同じものと捉え，各々の中から代表的な代数多様体を抽出する理論です．抽出の過程で多様体上の余計な曲線を収縮させるのですが，収縮によって悪い特異点を持つ多様体が生じます．それを回復させる操作がフリップと呼ばれる変換で，極小モデル理論において中心的な役割を果たします．3 次元極小モデル理論は森によるフリップの存在を中心として 90 年代に完成しましたが，その高次元化は暫く模索段階でした．ところが 2006 年，ビルカー，カッシーニ，ヘイコン，マッカーナンは一般次元のフリップの存在を証明し，極小モデル理論は大きな前進を遂げました．講座では，このような極小モデル理論の最近の発展を，わかりやすく紹介します．

1. 代数幾何学

幾何学の対象は図形ですが，図形の種類あるいは構造によって扱い方も様々です．例えば図形の繋がり方に着目し，ティーカップもドーナツも穴が一つ空いた図形と見て同一視する，位相幾何学の立場もあれば，図形に滑らかさ，すなわち微分可能性を要求し，各点での図形の曲り方が全体の形状をどう定めるかを調べる，微分幾何学の立場もあります．代数幾何学では，例えば

$$V := \{(x,y) \mid x^n + y^n - 1 = 0\},$$
$$W := \{(x,y,z) \mid x^3 - yz = x^2y - z^2 = xz - y^2 = 0\}$$

のような，連立多項式の共通零点集合として表される図形を対象とし，それを代数多様体と呼びます．図形を基礎におくのが幾何であるように，加減乗除に代表される演算を基礎におくのが代数です．多項式とは，数と変数の和と積を有限回操作して実現される，代数の基本的な対象ですから，それを幾何的に捉える代数幾何学は，代数的な幾何学といえるわけです．実際，代数学の一つの中心である整数論でも代数幾何的な立場は非常に有効で，数論幾何学と呼ばれています．上例の代数多様体 V は，通常は (x,y) を実数の組すなわち実座標平面上の点として，$n=1$ ならば直線，$n=2$ ならば円と見るのが最も馴染みのある見方ですが，これを有理数の組 (x,y) すなわち有理点のみを考える見方も可能なわけです．このとき V の有理点は $n=1$ ならば当然無限個存在し，$n=2$ でも $(3/5,4/5),(5/13,12/13)\dots$ と無限個存在します．ところが $n \geq 3$ になると事情は一変して V の有理点は高々 $(0,\pm1),(\pm1,0)$ しか存在しません．この事実は有名な，

(フェルマーの定理) $n \geq 3$ のとき $x^n + y^n = z^n$, $xyz \neq 0$ を満たす整数の組 (x,y,z) は存在しない．

の数論幾何的な言い換えで，定理はこの視点から証明されています．

代数幾何学の考える図形は多項式で定義されますから，曲線 $y = \sin x$ のような解析関数で定義される図形は扱いません．しかしながら対象を代数多様体に限定することで，前例で V の考える範囲を実数，有理数と取り換えたように，定義式の等しい図形を範囲を変えて考えられるのです．標準的には代数多様体は複素数の範囲で考えますが，それを 1 の p 個の和 $1+\cdots+1$ が 0 になる世界で考えることによって却って強力な結果が導かれることもあり，今回の主題の極小モデル理論の基本的な定理の一つもそのように証明されます．抽象的な術語として，有理数全体，実数全体，複素数全体のように四則演算の入った集合を体と呼び，特に有理数全体，実数全体，複素数全体のなす体を $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ で表します．

代数多様体に特有のもう一つの性質は，専門用語を用いれば生成点を持つことで，平易に述べれば，ある一点の周りの様子から代数多様体全体の大域的な様子が復元されることです．例えば二つの曲線

$$C := \{(x,y) \mid xy + x^3 + y^3 = 0\},$$
$$D := \{(x,y) \mid xy = 0\}$$

は，原点の十分近くだけを見るとともに滑らかな二曲線が交叉している様子しか分かりませんが，代数幾何学の範囲では定義多項式の情報は失われず，C,D は依然として区別されます．これは代数多様体の粗さという弱みと表裏をなす性質ですが，代数多様体の局所的な尖り具合すなわち特異点の深い研究をもたらします．また生成点を持つことは，後述する，代数多様体のコンパクト化が可能なことに解釈してもよいでしょう．

これまでは一つの入れ物の中で定義される代数多様体しか考えませんでした．前頁の V は xy 平面の中で，W は xyz 空間の中で定義されます．抽象的に，体 k の n 個の元の組全体のなす空間

$$\mathbb{A}^n := \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_1,\ldots,x_n \in k\}$$

を n 次元アファイン空間といい，有限個の多項式 $f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_r(x_1,\ldots,x_n)$ の共通零点集合

$$V := \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{A}^n \mid f_1(x_1,\ldots,x_n) = \cdots = f_r(x_1,\ldots,x_n) = 0\}$$

をアファイン多様体といいます．一般には代数多様体とは，いくつかのアファイン多様体が有理式の変数変換でもって貼り合わされた図形です．具体例として n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ を導入しましょう．

$$\mathbb{P}^n := \{[x_0 : \ldots : x_n] \mid x_0,\ldots,x_n \in k,\ \text{いずれか} \neq 0\}$$

を k の $n+1$ 個の比 $[x_0 : \ldots : x_n]$ の集合とします．比が定義されるにはいずれかの x_i が 0 でないことが必要で，さらに k の 0 でない元 t に対して $[x_0 : \ldots : x_n] = [tx_0 : \ldots : tx_n]$ となります．ここで $\mathbb{P}^n$ の中で $x_0 \neq 0$ となる部分集合 U_0 を考えると，U_0 の点 $[x_0 : \ldots : x_n]$ については各元を一斉に $1/x_0$ 倍して $[1 : x_1/x_0 : \ldots : x_n/x_0]$ と表現されるので，対応

$$U_0 \ni [1 : x_1/x_0 : \ldots : x_n/x_0] \mapsto (x_1/x_0,\ldots,x_n/x_0) \in \mathbb{A}^n$$

により U_0 と $\mathbb{A}^n$ は同一視されます．これを U_0 と $\mathbb{A}^n$ は同型であるといい，$U_0 \simeq \mathbb{A}^n$ と表します．同様に $x_i \neq 0$ となる $\mathbb{P}^n$ の部分集合を U_i とすると $U_i \simeq \mathbb{A}^n$ であり，さらに比 $[x_0 : \ldots : x_n]$ のいずれかの x_i は 0 でないことから，$\mathbb{P}^n$ は $U_0, \ldots, U_n$ で覆われること，

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{0 \le i \le n} U_i$$

がわかります．従って射影空間 $\mathbb{P}^n$ は，$n+1$ 個のアファイン多様体が貼り合わされた代数多様体です．

射影空間を導入した理由は，代数多様体を射影空間に埋め込んで考えても本質が保たれる点にあります．最初の例の $n=2$ のとき，

$$V_2 := \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

を複素数体 $\mathbb{C}$ 上考えると，変数変換 $u = x + y\sqrt{-1}$, $v = x - y\sqrt{-1}$ によって

$$V_2 = \{(u,v) \in \mathbb{A}^2 \mid uv - 1 = 0\}$$

と表され，対応 $V_2 \ni (u,v) \mapsto u \in \mathbb{A}^1$ でもって V_2 は直線 $\mathbb{A}^1$ から原点 o を抜いた代数多様体 $\mathbb{A}^1 \setminus \{o\}$ と同型になります．これを V_2 はほとんど直線と等しいと解釈したいとき，V_2 を $\mathbb{P}^2$ 内の代数多様体

$$\bar{V}_2 := \{[U : V : W] \in \mathbb{P}^2 \mid UV - W^2 = 0\}$$

へ対応 $V_2 \ni (u,v) \mapsto [u : v : 1] \in \bar{V}_2$ で埋め込み，直線の射影化 $\mathbb{P}^1$ への同型対応

$$\bar{V}_2 \ni [U : V : W] \mapsto [U : W] \text{ または } [W : V] \in \mathbb{P}^1$$

を見ればよいのです．射影空間内の代数多様体を射影多様体といい，それは例えば $\mathbb{C}$ 上の射影直線の形状が実は球面であるように，閉じた図形となっています．射影空間への埋め込みは図形に境界を付して閉じた図形にする操作であり，コンパクト化と呼ばれます．閉じた性質はしばしば図形全体の様子を研究する際の前提となります．極小モデル理論が扱うのも射影多様体です．

上例で V_2 を直線引く一点と同一視できたのは，$\mathbb{C}$ 上の変数変換 $u = x + y\sqrt{-1}$, $v = x - y\sqrt{-1}$ を通してであって，例えば実数体 $\mathbb{R}$ 上ではこの変換は定義できません．代数幾何学ではこうした変数変換によって定義多項式を取り換えて調べることが基本的なので，通常は複素数体 $\mathbb{C}$ のような多項式の分解に差し支えない体，代数的閉体と呼ばれる体上で考えます．私たちも今後は代数多様体はすべて $\mathbb{C}$ 上で考えることとします．

2. 双有理幾何学

代数多様体はどれくらいあるのでしょうか．それは図形であって，例えば曲線や曲面であったりします．曲線は 1 次元，曲面は 2 次元であるように，図形に対して次元が定まることが直感的にわかります．例えば初めの例

$$W := \{(x,y,z) \mid x^3 - yz = x^2y - z^2 = xz - y^2 = 0\}$$

は，媒介変数表示 (t^3,t^4,t^5) を持ちますから 1 次元です．また

$$Y := \{(x,y,z,w) \mid xy - zw = 0\}$$

は，4 次元空間の中の一つの式で表されるので 3 次元です．ところで上の曲線 W は原点で尖った曲線ですが，対応 $\mathbb{A}^1 \ni t \mapsto (t^3,t^4,t^5) \in W$ により直線とほぼ等しいわけです．尖ったり折れたりしている代数多様体はいくらでも構成できますから，分類の際には滑らかな多様体に置き換えて出発することは自然です．この手続きは特異点解消と呼ばれ，広中により存在が証明されました．

前例の曲線

$$C := \{(x,y) \mid xy + x^3 + y^3 = 0\}$$

は最も単純な特異点の例で，原点の近くで滑らかな二曲線が交叉しています．その特異点解消は，交叉点で交わる二本の道路を立体交叉にして滑らかにする手続きを数学的に構成して得られます．代数多様体 B を，

$$B := \{\langle (x,y), [X:Y] \rangle \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid xY - yX = 0\}$$

とします．すなわち $\mathbb{A}^2$ の点と $\mathbb{P}^1$ の点の組 $\langle (x,y), [X:Y] \rangle$ で，比 $[X:Y]$ が点 (x,y) から与えられるものの集合です．B から $\mathbb{A}^2$ への射影 π を

$$B \ni \langle (x,y), [X:Y] \rangle \mapsto (x,y) \in \mathbb{A}^2$$

として定義すると，$\mathbb{A}^2$ の原点 o 以外の点では x,y の比が定まるため，π は同型 $B \setminus \pi^{-1}(o) \simeq \mathbb{A}^2 \setminus \{o\}$ を与えます．一方 $x = y = 0$ ならばすべての比 $[X:Y]$ は関係式 $xY - yX = 0$ を満たすので，原点 o の逆像 $\pi^{-1}(o)$ は $\mathbb{P}^1$ と同型になります．従って B は，平面 $\mathbb{A}^2$ の一点を直線 $\mathbb{P}^1$ に膨らませた代数多様体です．さて $\mathbb{A}^2$ 内の曲線 C を B の中へ移して得られる曲線を $\bar{C}$ とすると，原点における C の交叉は $\bar{C}$ では分離され，π は特異点解消 $\bar{C} \to C$ を誘導します．

上の構成において，写像 $\pi \colon B \to \mathbb{A}^2$ は曲面上の一点を射影直線に膨らませる操作で，爆発と呼ばれます．一般に代数多様体の任意の部分多様体の爆発が可能であり，爆発によって新しい多様体が無限に構成されます．そこで分類の視点では爆発は非本質的な操作と見るべきです．すなわち，上例の $\mathbb{A}^1$ と W，あるいは B と $\mathbb{A}^2$ のように，ほとんどの部分で同型となる代数多様体たちを双有理同値と呼んで本質的に同じものと捉えるべきで，それが双有理幾何学の立場です．ほとんどの部分で同型とは，有理関数という，各点のまわりで有理式で定義される関数の集合が等しいことであり，従って双有理同値性とは変数変換で互いに写り合うことを意味します．双有理幾何学では，写像はしばしばほとんどの部分で定義されていれば十分であり，これを有理写像と呼びます．コンパクト化，特異点解消，爆発は，一つの双有理同値類の中の多様体の取り換えに当ります．

3. 曲面の極小モデル理論

双有理幾何学における代数多様体の分類とは，各双有理同値類から良い代数多様体を抽出して調べることです．すなわち，代数多様体 X から出発してそれを双有理同値な多様体で取り換えて行

き，同値類を代表する簡単な多様体 X' を構成すること，さらにそれら性質の良い多様体 X' たちを詳細に研究することです．コンパクト化と特異点解消により，各同値類には滑らかな射影多様体が含まれるので，それを X としましょう．曲線の場合，滑らかな曲線間の同型と双有理同値の概念は一致するため，双有理幾何は 2 次元以上で意味を持ちます．曲面では任意の点は爆発によって $\mathbb{P}^1$ に膨らみますから，そのような $\mathbb{P}^1$ は余計な曲線です．そこで X 上の $\mathbb{P}^1$ のうち爆発で得られるものを逆の操作で点に収縮させることで，なるべく小さい曲面 X' を作ればよいのです．後述の通り，実際に X' は良い性質を備えた，同値類を代表する多様体になっています．

ところで，曲面 X の中のどの $\mathbb{P}^1$ が爆発で得られたものかを判定できないと，現実的には X' が構成できません．その判定を与える次の定理は，極小モデル理論の出発点といえます．

(カステルヌオヴォの収縮定理) 滑らかな曲面上の曲線 C が滑らかな曲面の点に収縮される条件は，C が $\mathbb{P}^1$ と同型で自己交叉数 $(C^2)=-1$ を持つことである．

自己交叉数という術語が出てきましたが，難しいものではありません．一般に曲面 X 上の異なる二曲線 C,D に対して，その交わり $C\cap D$ は高々有限個の点の集合になりますから，重複度も込めて数えたその個数を C,D の交叉数といい，$(C\cdot D)$ で表します．この定義は X 上の曲線の形式和の空間 $Z_1(X):=\{\sum r_iC_i \mid r_i\in\mathbb{R}\}$ へ自然に拡張され，自己交叉数 (C^2) が定まります．自己交叉数は，収縮可能な曲線については負になることが，次の観察からわかります．一般に収縮可能な曲線 C は，曲面の中で連続的に動かせられず，C と交わる別の曲線 C' を付け加えて $C\cup C'$ を考えて初めて動かせられ，それは C と交わらない曲線 D へと動きます．$C\cup C'$ から D へは連続的に動くので，交叉数の等式 $(C\cdot C+C')=(C\cdot D)=0$ が成り立ち，$(C^2)=-(C\cdot C')<0$ が得られます．

カステルヌオヴォの定理の利点は，より小さい曲面をつくるための条件を数値的に記述しているところです．しかし次元が高い代数多様体の中の二曲線は，一般には捩れの位置にあって交わらないので，交叉数は定義されません．n 次元代数多様体 X 上で，曲線 C との交叉数 $(C\cdot D)$ が定義される D は，$n-1$ 次元部分多様体です．X の $n-1$ 次元部分多様体を素因子と呼び，その整係数形式和を因子と呼びます．実係数へ拡張して $Z^1(X):=\{\sum d_iD_i \mid d_i\in\mathbb{R}\}$ とおくと，交叉数は双線形写像

$$Z_1(X)\times Z^1(X)\to\mathbb{R}$$

で定まります．これは，常に同じ交叉数を与える，数値的に同値な元を同一視した世界 $N_1(X)=Z_1(X)/\equiv$，$N^1(X)=Z^1(X)/\equiv$ 上の非退化双線形写像

$$N_1(X)\times N^1(X)\to\mathbb{R}$$

を誘導します．この視点から定理を振り返ると，自己交叉数の条件を曲線 C と X の因子との交叉数の術語で再解釈する必要が生じます．このとき，代数多様体上に自然に定まる唯一の因子であって，極小モデル理論の核となる，標準因子が現れます．

代数多様体 X 上の標準因子 K_X とは，X 上の最高次微分形式に伴う因子のことで，それは X の曲がり具合を表現します．滑らかな n 次元多様体は，各点のまわりで局所座標 $x_1,\dots,x_n$ を持つ n 次元空間とみなせますが，その上の最高次微分形式とは，形式的な記号 $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ と関数

$f(x_1,\dots,x_n)$ を用いて表現される，$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ たちです．直感としては，積分に現れる記号 dx を変数変換 $dx = \frac{dx}{dt}dt$ の性質を保って抽象的に記述するものと捉えて下さい．この ω はあくまで局所的な対象ですから，ω を X 全体に延ばそうとすると障害が現れます．例えば $\mathbb{P}^1 = \{[X:Y]\}$ のとき，点 $P = [0:1]$ の近くでは $Y \neq 0$ より座標 $x := X/Y$ を持ち，微分形式 $\omega = dx$ が考えられます．これを点 $Q = [1:0]$ まで延ばすとき，ω を Q での座標 $y := Y/X$ を用いて表すと $x = y^{-1}$ から $\omega = \frac{dx}{dy}dy = -y^{-2}dy$ となり，Q で 2 重の極を持つ (-2 重の零点を持つ) 関数 $-y^{-2}$ が現れます．延ばされた ω は極を許すので，有理微分形式と呼ばれます．この有理微分形式に対応して，$\mathbb{P}^1$ の標準因子を $K_{\mathbb{P}^1} = -2Q$ として定めます．一般に X の有理微分形式 ω から各素因子 D_i で n_i 重の零点を持つ関数が現れるとき，$\operatorname{div}\omega := \sum n_i D_i$ と定義して，これを X の標準因子 K_X とします．もちろんこの定義は ω の取り方に依存し，上例の $\mathbb{P}^1$ の場合も dy から出発すれば $K_{\mathbb{P}^1} = -2P$ となります．大切なのは，この差は X 上のある有理関数 f の差，すなわち f が各素因子 D_i で f_i 重の零点を持つとすると $\operatorname{div} f := \sum f_i D_i$ の差であることです．差が有理関数で表現される因子たちは線形同値と呼ばれます．線形同値は特に数値的同値であって，任意の曲線 C との交叉数 $(K_X \cdot C)$ が ω によらず定まります．

標準因子 K_X を用いると，カステルヌオヴォの定理に現れる曲線 C は，交叉数 $(K_X \cdot C)$ が負となる収縮可能な曲線です．従って曲面 X から良い曲面 X' を得る手続きは，標準因子との交叉数が負となる曲線を収縮させて標準因子に関して極小な多様体を得る手続きといえます．従って最終的な曲面 X' は次のいずれかになります．

(i) もともと標準因子との交叉数が負となる曲線が少ない場合，X' の標準因子 $K_{X'}$ はすべての曲線と非負の交叉数を持つ．K_X' のこの性質をネフといい，X' を X の極小モデルという．

(ii) もともと標準因子との交叉数が負となる曲線が多い場合，X' から次元の低い多様体 S への写像 $f\colon X' \to S$ が存在し，f で収縮する曲線はすべて標準因子 $K_{X'}$ と負の交叉数を持つ．X' は $\mathbb{P}^1$ で覆われる．f を森ファイバー空間という．

この流れでもって発展した曲面の分類理論はほぼ満足の行く形に完成され，これを曲面の極小モデル理論といいます．

4. 極小モデルプログラム

さて曲面の極小モデル理論の高次元化を考えると，出発点である収縮定理の一般化がまず問題となります．森はその解答を錐定理として定式化し，現在の高次元極小モデル理論を拓きました．錐定理の錐は，$N_1(X)$ の中で曲線たちの数値的同値類が張る閉凸体 $\overline{NE}(X)$ のことで，クライマン・森錐と呼ばれます．$\overline{NE}(X)$ の角は一般には丸いのですが，標準因子 K_X との交叉数が負となる部分では尖っていることを森は発見しました．尖っている限りは情報があるはずで，事実そのような角は，有理曲線すなわち $\mathbb{P}^1$ と双有理な曲線で生成され，収縮可能な曲線群を与えます．数学的に記述すると，

(錐定理)

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}_{K_X \geq 0}(X) + \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[C_i],$$

ここで各 C_i は $(K_X \cdot C_i) < 0$ となる有理曲線で，半直線 $\mathbb{R}_{\geq 0}[C_i]$ に属する曲線群を収縮させる写像 $\pi_i \colon X \to Y_i$ が存在する．半直線 $\mathbb{R}_{\geq 0}[C_i]$ を端射線という．

と表現されます．よって代数多様体 X が極小モデルでない，つまり標準因子 K_X がネフでない場合，K_X と負の交叉数を持つ曲線群を収縮させて X より小さい多様体 Y が構成されます．

次に新しい代数多様体 Y 上で議論したいのですが，3 次元以上の場合，ここで本格的な問題が生じます．それは Y が滑らかな多様体とは限らないことです．もっとも高次元で特異点が問題となることは指摘されていて，上野は，アーベル群の構造を備えた 3 次元代数多様体の各点 x と $-x$ を同一視して得られる商多様体は，有理曲線で覆われないにも関わらず，それと双有理同値な滑らかな極小モデルを持たないことを示しました．従って逆に極小モデル理論を，錐定理の収縮写像で現れる特異点を許した枠組へと拡げることがふさわしくなります．

最も単純に，滑らかな 3 次元代数多様体 X からの収縮写像 $\pi \colon X \to Y$ を考えると，π は X の素因子 E を収縮させる，因子収縮写像になります．Y は滑らかとは限りませんが，標準因子 K_Y の定義は可能です．このとき π が因子収縮写像であることから，X と Y との標準因子の差を，

$$K_X = \pi^* K_Y + aE$$

のように E の差として記述できます．ここで π^* は因子の引き戻しを意味し，E の係数 a は K_Y に関する E の食い違い係数と呼ばれます．π が K_X と負の交叉数を持つ曲線群を収縮させる性質は，E の食い違い係数 a が正であることと同値です．ここで極小モデル理論とは標準因子に関して極小な多様体を得る手続きである原則に立ち返ると，食い違い係数がすべて正である特異点を許せばよく，これを端末特異点と呼びます．極小モデル理論に現れる特異点の理解と並行して，錐定理も川又，コラール，リード，ショクロフらによりコホモロジーの手法で特異点付き多様体へと拡張されました．

特異点のさらに致命的な障害は，収縮写像 $\pi \colon X \to Y$ が全く因子を収縮しない，小さい収縮と呼ばれる写像となるときに生じます．このとき Y の標準因子 K_Y は曲線との交叉数が定義できない因子となって，比較の概念が成立しないからです．その障害を回復させる操作がフリップです．$\pi \colon X \to Y$ に対するフリップとは，やはり小さい収縮 $\pi^+ \colon X^+ \to Y$ であって，π と対称的に K_{X^+} と正の交叉数を持つ曲線群を収縮させる写像のことです．これで因子と曲線の交叉数が常に定義される多様体 X^+ に戻ります．X, X^+ のこの性質を $\mathbb{Q}$-分解的といいます．

フランチアによる，フリップの最初の例を紹介します．2 節で挙げた 3 次元代数多様体

$$Y := \{(x,y,z,w) \mid xy - zw = 0\}$$

を原点で爆発させると，原点の逆像が射影曲面 $Q := \{[X:Y:Z:W] \mid XY - ZW = 0\}$ と同型な，滑らかな多様体 B が得られます．このとき Q の二つの直線族 $\{l_t \colon [X:Z] = [W:Y] = t\}_{t \in \mathbb{P}^1}$ 及び $\{l_t^+ \colon [X:W] = [Z:Y] = t\}_{t \in \mathbb{P}^1}$ を収縮させる写像 $B \to X$，$B \to X^+$ が構成できて，$X \to Y$, $X^+ \to Y$

で収縮する曲線は K_X, K_{X^+} との交叉数が 0 になります．この構成において，各点 (x,y,z,w) と $(-x,y,z,-w)$ を同一視して得られる商を取ると，$X \to Y \leftarrow X^+$ の商はフリップとなります．

高次元極小モデル理論の流れをまとめましょう．考える多様体の族 $\mathscr{S}$ は，端末特異点を許した $\mathbb{Q}$-分解的な射影多様体のなす族です．$X \in \mathscr{S}$ とします．

(i) K_X がネフならば，X 自身が極小モデルである．

(ii) K_X がネフでないならば，錐定理より K_X と負の交叉数を持つ曲線群を収縮させる写像 $\pi\colon X \to Y$ が存在する．

(ii-1) Y の次元が X の次元よりも低いとき，π は森ファイバー空間である．X は有理曲線で覆われる．

(ii-2) π が因子収縮写像のとき，$Y \in \mathscr{S}$ なので X を Y に取り換えて議論を続ける．

(ii-3) π が小さい収縮のとき，$Y \notin \mathscr{S}$ なのでフリップ $\pi^+\colon X^+ \to Y$ を構成する．$X^+ \in \mathscr{S}$ なので X を X^+ に取り換えて議論を続ける．

各双有理同値類の極小モデルあるいは森ファイバー空間を構成するこのアルゴリズムが，極小モデルプログラムです．このプログラムが機能する条件を考えると，フリップにまつわる二つの問題が生じます．一つはもちろん，

(フリップの存在) フリップは存在するか．

です．もう一つはプログラムが有限回の操作で終了するかどうかです．因子収縮写像は素因子の減少に伴って有限次元線形空間 $N^1(X)$ の次元を下げるので高々有限回しか現れませんが，フリップではその次元が保たれます．よって，

(フリップの終止) フリップの列は有限で停止するか．

の問題が生じます．これらが解決されて極小モデルプログラムは完成します．

5. 3 次元極小モデルプログラムの完成とプログラムの対数化

3 次元フリップの終止は簡単に得られます．ショクロフは，特異点に対してその上の素因子の食い違い係数の極小値を極小食い違い係数と名付け，3 次元フリップが極小食い違い係数 1 未満の特異点の個数を減少させることに気付きました．これから終止が従います．一方，3 次元フリップの存在は，リードと森の 3 次元端末特異点の分類を用いて，小さい収縮で収縮する曲線上の端末特異点の分布の様子を非常に精密に調べ上げ，各々の場合にフリップの存在を確めることで，森が 80 年代後半に証明しました．これによって 3 次元極小モデルプログラムが完成しました．

一方でコホモロジーの手法による錐定理の定式化に伴い，多様体のみを考えるよりも，対象を X と境界因子 Δ の組 (X,Δ) へと拡げることが望ましいとわかってきました．X は $\mathbb{Q}$-分解的な代数多様体，Δ は $\mathbb{R}$-因子という素因子の実係数形式和で，各係数は正とします．各係数が正である $\mathbb{R}$-因子 Δ を有効といい，$\Delta \geq 0$ と表します．組 (X,Δ) においては，標準因子 K_X の代わりに対数的標準因子 $K_X+\Delta$ を考えます．一連の拡張は対数化と呼ばれて，拡張されたプログラムは対数的極小モデルプログラムとも呼ばれます．対数化の下では食い違い係数に 1 を加えた対数的食い違い係数を

考える方が自然で，考える族も，対数的食い違い係数がすべて正である，対数的端末特異点を持つ組のなす族へと拡げられます.

対数化がコホモロジーの視点からもたらされる理由は，その手法の基礎にある小平型の消滅定理を見ればわかります．代数幾何学において因子 D の大域切断の空間

$$H^0(X,D) := \{f \mid \operatorname{div} f + D \geq 0\}$$

は基本的な研究対象です．およそ射影多様体の間の有理写像はすべて，射影空間への有理写像と考えると，有理関数の比で表されます．有理写像 $\pi\colon X \to Y$ を埋め込み $Y \subset \mathbb{P}^r$ を通して $\pi\colon X \to \mathbb{P}^r$ と見れば，それは具体的には X の適当な有理関数 $f_0,\dots,f_r$ の比 $[f_0:\dots:f_r]$ で与えられます．このとき $\mathbb{P}^r$ の超平面 $H = \mathbb{P}^{r-1}$ の因子としての引き戻し π^*H を考えると，π は抽象的には，$H^0(X,\pi^*H)$ の中の $f_0,\dots,f_r$ で張られる線形部分空間 V でもって定まるのです．小平型の消滅定理とは，ある種の対数的標準因子 $K_X+\Delta$ に対して，その大域切断の障害を表現する高次コホモロジー $H^i(X,K_X+\Delta)$ が消滅することを主張します.

(小平の消滅定理) 滑らかな射影多様体 X と豊富な因子 A に対して，$H^i(X,K_X+A) = 0$ $(i \geq 1)$.

ここで因子が豊富であるとは，正数倍によって，ある射影空間への埋め込み写像による超平面の引き戻しと線形同値になることです.

対数化はまた次元に関する帰納的な議論を可能にします．代数多様体 X と素因子 S に対して $(X,S+B)$ の形の組を考えると，S 上に新しい組 (S,B_S) が，因子の制限の関係式 $K_X+S+B|_S = K_S+B_S$ を満たすように自然に導入されます．よって B を通常の因子として，完全列

$$0 \to H^0(X,K_X+B) \to H^0(X,K_X+S+B) \to H^0(S,K_S+B_S) \to H^1(X,K_X+B)$$

が得られて，組 $(X,S+B)$ の情報を次元の低い組 (S,B_S) のそれから引き出すことができます．この立場から主にショクロフの努力で，3 次元対数的極小モデル理論は 90 年代に一通り完成しました.

6. ショクロフの高次元化とヘイコン，マッカーナンの結果

3 次元の研究が一段落すると，一般次元への拡張の模索段階が暫く続きました．ショクロフは対数化の枠組でフリップの問題の次元に関する帰納的な議論を追及し，フリップの存在を特別なフリップの存在に帰着させました．それは pl フリップと呼ばれる，ある種の組 $(X,S+B)$ に対するフリップです．彼が 21 世紀の除幕に発表した 200 ページにわたる 4 次元 pl フリップの存在の証明は，彼以外は真偽を判定しかねる程の難解なものでした．そこへ 2005 年，ヘイコンとマッカーナンは，次元の低い極小モデル理論から pl フリップの存在を導き，高次元極小モデル理論は新展開を迎えました.

(ヘイコン，マッカーナン) $n-1$ 次元極小モデル理論を仮定すれば，n 次元 pl フリップは存在する.

彼らの成功は，シュウによる多重標準因子の延長定理を拡張してショクロフの議論へ応用させた点にあります．延長定理とは，ある種の組 $(X,S+B)$ とそれから誘導される組 (S,B_S) の間の写像

$$H^0(X,m(K_X+S+B)) \to H^0(S,m(K_S+B_S))$$

が，$m(K_X+S+B)$ が良い因子となるすべての正整数 m で全射になるという主張です．それでは延長定理がどのように用いられるかを，簡単に見てみましょう．

pl フリップで考える B は，各係数が有理数である $\mathbb{Q}$-因子です．$(X,S+B)$ に対するフリップの存在は，次数付き環

$$R_X := \bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, m(K_X+S+B))$$

の有限生成性に等しいことが，フリップの定義から従います．環とは，整数全体のように加減乗の三演算の入った集合です．R_X は，$H^0(X,m(K_X+S+B))$ を m 次の部分として，積構造を自然な写像

$$H^0(X,m(K_X+S+B))\times H^0(X,m'(K_X+S+B))\to H^0(X,(m+m')(K_X+S+B))$$

で入れることで，次数付きの環となります．同様にして次数付き環

$$R_S := \bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, m(K_S+B_S))$$

とおくと，次数付き環の制限写像 $\rho\colon R_X\to R_S$ が定まります．ここで pl フリップの性質を用いると，R_X の有限生成性が像 $\rho(R_X)$ のそれと同値になります．低次元の極小モデル理論から R_S は有限生成なので，もしも ρ が全射ならば R_X も有限生成です．そこで制限写像が全射となるモデルを作ることになります.

それは各 m ごとには，X,S の特異点解消 X_m,S_m と境界因子 S_m+B_m を上手に選べば,

$$H^0(X,ml(K_X+S+B)) = H^0(X_m, ml(K_{X_m}+S_m+B_m)),$$

かつ，延長定理によって制限写像

$$H^0(X_m,ml(K_{X_m}+S_m+B_m))\to H^0(S_m,ml(K_{S_m}+B_{m,S_m}))$$

は全射になります．l は $l(K_X+S+B)$ が良い因子となるように選ぶので m に依存しません．X_m は m によりますが，実は S_m は m によらないようにできるのです．その共通の S_m を T とおくと，次数付き環の全射

$$R_X^l := \bigoplus_{m\geq 0} H^0(X,ml(K_X+S+B)) \to R_T^l := \bigoplus_{m\geq 0} H^0(T,ml(K_T+B_{m,T}))$$

が得られます．ここで低次元極小モデル理論を用いて，$R_T^l\simeq\rho(R_X^l)$ の有限生成性が得られます. $\rho(R_X^l)$ と $\rho(R_X)$ の有限生成性は同値です.

7. ビルカー，カッシーニ，ヘイコン，マッカーナンの結果

ヘイコンとマッカーナンの衝撃的な結果からわずか一年後，彼らはビルカー，カッシーニと一緒に，ショクロフの帰納的な議論を境界因子が巨大な場合に完全に機能させました．巨大な $\mathbb{R}$-因子とは，豊富 $\mathbb{R}$-因子と有効 $\mathbb{R}$-因子の和で書けるものです．豊富性，線形同値性の定義は $\mathbb{R}$-因子へ拡

張されます．少し分かりづらい条件ですが，彼らの仮定は対数的標準因子が大域切断をたくさん持つ状況であると解釈できます．まずはその結果を述べましょう．

(ビルカー，カッシーニ，ヘイコン，マッカーナン) 組 (X,Δ) は対数的端末特異点を持ち，境界因子 Δ は巨大とする．

(i) (極小モデルの存在) $K_X+\Delta$ がある有効 $\mathbb{R}$-因子と $\mathbb{R}$-線形同値ならば，(X,Δ) の対数的極小モデルが存在する．

(ii) (モデルの有限性) Δ に近い境界 Δ' と (X,Δ') の弱対数的標準モデル Y をすべて考えるとき，Y は高々有限個である．

(iii) (非消滅定理) $K_X+\Delta$ が擬有効ならば，ある有効 $\mathbb{R}$-因子と $\mathbb{R}$-線形同値である．

$\mathbb{R}$-因子が擬有効であるとは，その数値的同値類が有効 $\mathbb{R}$-因子のそれの極限で表されることです．(i) と (iii) から，$K_X+\Delta$ が擬有効ならば，(対数的) 極小モデルが存在します．逆は定義から従うので，Δ が巨大な場合の極小モデル理論が得られました．(ii) の役割は込み入っていて，証明段階では対数的標準特異点を持つ組 $(X,\Delta'=A+B')$ たちのモデルの有限性の形で使用します．A は固定された豊富 $\mathbb{R}$-因子で B' が動きます．対数的標準という術語は対数的端末のそれの拡張です．この形の有限性から，pl フリップの特殊な列の終止が導かれます．

今までは簡単のため射影多様体 X の上で話を進めてきましたが，実際は射影多様体の族を与える写像 $X\to S$ の上の相対的な話にすべて拡張できます．相対化の術語を用いれば，$X\to Y$ のフリップとは X の Y 上相対的な標準モデルです．従ってこの設定の (i) の系として，

(フリップの存在) 対数的端末特異点を持つ組のフリップは存在する．

が得られます．これだけでも十分に強力ですが，定理はさらに極小モデルプログラムを多くの場合に保障する点ではるかに実用的です．例えば特異点解消のように，相対化 $X\to S$ が等次元の多様体間の写像のときは，境界因子の巨大性はいつでも成り立つので，この場合の相対的極小モデル理論は完成したことになります．

もう一つ大事な系として，

(標準環の有限生成性) 組 (X,Δ) は対数的端末特異点を持ち，境界因子 Δ は $\mathbb{Q}$-因子とする．このとき対数的標準環 $\bigoplus_{m\geq 0}H^0(X,m(K_X+\Delta))$ は有限生成である．

が挙げられます．この主張では Δ の巨大性の仮定が外れていますが，これは藤野と森の標準因子の公式によります．すでに強調した通り，代数幾何学では大域切断の空間は基本的な対象であること，そして標準因子は代数多様体上に自然に定まる唯一の因子であることから，(対数的) 標準環の重要性は察せられるでしょう．標準環の有限生成性は今後多くの応用をもたらすはずです．

定理の証明の流れを簡単にまとめましょう．(pl_n) で n 次元 pl フリップの存在を，(i_n), (ii_n), (iii_n) で各々定理 (i), (ii), (iii) の n 次元の主張を表すものとします．中間段階として (ii) の特殊な場合の弱対数的標準モデルの有限性が現れるので，それを (ii') とします．

(i) (i_{n-1}), (ii_{n-1}), $(\mathrm{iii}_{n-1})\Rightarrow(\mathrm{pl}_n)$．前節で紹介した証明の細部を見れば，仮定する低次元極小モ

デル理論は (i_{n-1}), (ii_{n-1}), (iii_{n-1}) で十分なことがわかる．

(ii) $(\mathrm{ii}_{n-1}) \Rightarrow (\mathrm{ii}'_n)$．$(\mathrm{ii}'_n)$ で考える弱対数的標準モデルを別の組 $(X', S'+B')$ のモデルとして実現し，組 $(S', B'_{S'})$ のモデルの有限性に帰着させる．

(iii) (pl_n), $(\mathrm{ii}'_n) \Rightarrow (\mathrm{i}_n)$．目盛付き極小モデルプログラムという，与えられた方向へ走らせる極小モデルプログラムを実行する．現れるフリップは pl フリップで，さらに終止性は (ii'_n) の有限性から従う．

(iv) (iii_{n-1}), (i_n), $(\mathrm{ii}'_n) \Rightarrow (\mathrm{iii}_n)$．先行のショクロフの非消滅定理の証明の流れに沿って示す．Δ が $\mathbb{R}$-因子のときは，ディオファントス近似を用いて $\mathbb{Q}$-因子に帰着させる．

(v) (i_n), $(\mathrm{iii}_n) \Rightarrow (\mathrm{ii}_n)$．考える弱対数的標準モデルを別の組の対数的標準モデルとして実現する．そして区間 $[0,1]\times\cdots\times[0,1]$ のコンパクト性を用いて対数的端末及び標準モデルの有限性を示す．有理数列の極限は一般には実数のため，ここで $\mathbb{R}$-因子の本格的な導入が必要となる．

専門用語が並んでいますが，次元に関する帰納法のからくりはわかって頂けると思います．

証明の一つの鍵である，目盛付き極小モデルプログラムを紹介します．X を $\mathbb{Q}$-分解的な射影多様体，(X,Δ) を対数的端末特異点を持つ組とします．その上の目盛 C とは，ある非負実数 t に対して $(X,\Delta+tC)$ が対数的端末特異点を持ち，かつ $K_X+\Delta+tC$ がネフとなる，有効 $\mathbb{R}$-因子です．例えば一般の豊富 $\mathbb{R}$-因子が目盛になります．このとき，(X,Δ) の目盛 C 付き極小モデルプログラムとは，以下の手順で収縮写像を選んで実行する極小モデルプログラムです．

(i) $K_X+\Delta+tC$ がネフとなる最小の非負実数 t を取る．

(ii) $t=0$ ならば，$K_X+\Delta$ がネフなので X は極小モデルである．

(iii) $t>0$ ならば，$\overline{NE}(X)$ の $K_X+\Delta$ に関する端射線で，$K_X+\Delta+tC$ と交叉数 0 を持つものが存在する．それに対応する収縮写像 π を取る．

 (iii-1) π が森ファイバー空間ならばそれでよい．

 (iii-2) π が因子収縮写像または小さい収縮のとき，プログラムの手続きで取り換えた組 (X',Δ') 上への C の変換 C' が新しい目盛となる．

要するに多様体の取り換える方向を目盛でもって指定するだけです．定理にはフリップの終止は含まれませんが，このようにプログラムの特別な方向を定めればそれが機能することが，系として得られます．

(目盛付き極小モデルプログラム) 境界因子 Δ が巨大ならば，任意の目盛 C に対して (X,Δ) の目盛 C 付き極小モデルプログラムを走らせられる．

(X,Δ) において $K_X+\Delta$ の擬有効性は，極小モデルが存在するための必要条件でした．上の結果から，その条件を満たさないときのプログラムが得られます．

(森ファイバー空間) $K_X+\Delta$ が擬有効でないならば，任意の巨大な目盛 C に対して，(X,Δ) の目盛 C 付き極小モデルプログラムを走らせて森ファイバー空間が構成できる．

8. 今後の展望

最後に，高次元極小モデル理論の残された重要な課題をいくつか挙げましょう．

ビルカー，カッシーニ，ヘイコン，マッカーナンの定理では，境界因子 Δ の巨大性が証明の様々なところで効いています．Δ を豊富 $\mathbb{R}$-因子 A と有効 $\mathbb{R}$-因子 B の和で表し，必要に応じて A を取り換える議論を行うからです．よって依然として，標準因子が大域切断をあまり持たないときに，極小モデルをいかに構成するかが問題です．

(極小モデルの存在予想) $K_X+\Delta$ が擬有効ならば，(X,Δ) の極小モデルが存在する．

もちろんこれはフリップの終止から従います．

(フリップの終止予想) フリップの列は有限で停止する．

フリップも標準因子を小さくする手続きなので，この操作で食い違い係数が増加します．ショクロフはこの視点からフリップの終止を食い違い係数のある性質に還元させ，特異点の問題に書き換えています．

極小モデル (X',Δ') が構成されたとき，それを詳細に研究することが次の課題です．その手掛りとなるのが，5 節で述べた，大域切断の空間 $H^0(X',m(K_{X'}+\Delta'))$ に伴う有理写像 $\Phi_m\colon X'\to\mathbb{P}^{r_m}$ です．アバンダンス予想は，$m(K_{X'}+\Delta')$ が良い因子となる十分大きい m に対して，Φ_m は通常の写像になることを保証します．

(アバンダンス予想) $K_X+\Delta$ はネフならば半豊富である．

半豊富とは，ある射影空間への写像による豊富 $\mathbb{R}$-因子の引き戻しと $\mathbb{R}$-線形同値になることです．アバンダンス予想は 3 次元で既知ですが，その証明を見る限りは，フリップの問題とは別種の難しさを有するようにも思われます．

今までは対数化を対数的端末特異点の中で考えてきましたが，さらに対数的食い違い係数に 0 も許した対数的標準特異点の中で極小モデル理論が展開されることが，期待されています．

(対数的標準への拡張) 極小モデル理論は対数的標準特異点の中で展開できる．

先の予想をより一般的な枠組で捉えられる点でも，この拡張は自然です．なお，3 次元極小モデル理論は対数的標準特異点の中ですべて完成しています．

9. 参考文献

代数幾何学の平易な入門書の一つとして，

上野健爾，代数幾何入門，岩波書店

が挙げられます．双有理幾何学を解説する日本語の参考書は，

川又雄二郎，代数多様体論，共立出版

J. Kollár，森重文，双有理幾何学，岩波書店

の二つです．最近の極小モデル理論の解説記事として，

藤野修，極小モデル理論の新展開，数学 **61** (2009), 162-186

があります．ビルカー，カッシーニ，ヘイコン，マッカーナンの原論文は,

C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon and J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, J. Am. Math. Soc. **23** (2009), 405-468

C. Hacon and J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type II, J. Am. Math. Soc. **23** (2009), 469-490

です.