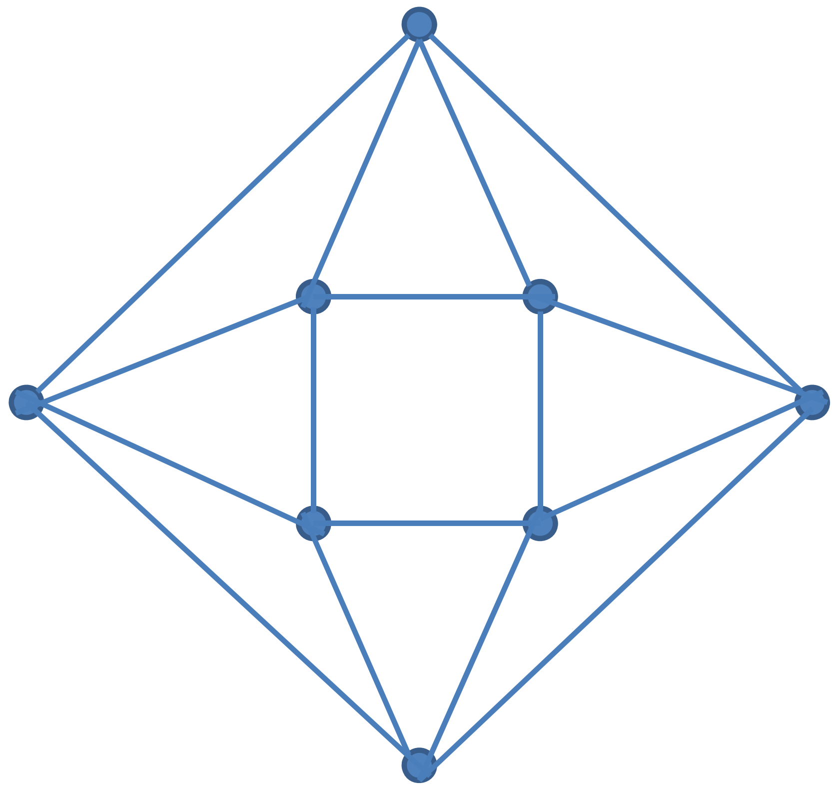
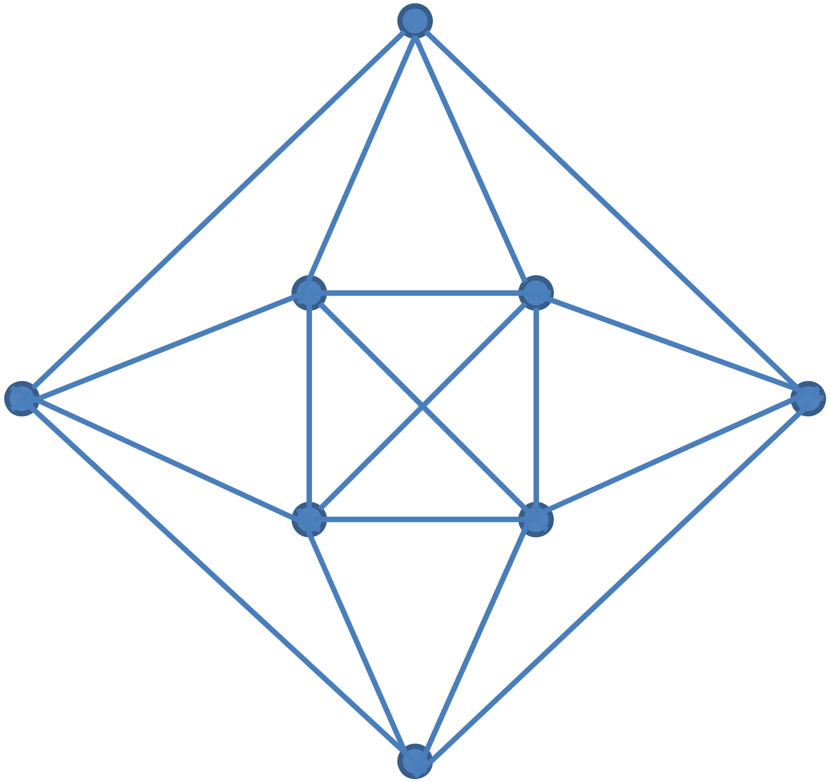
# グラフ理論から組合せ最適化へ

京都大学数理解析研究所
岩田　覚

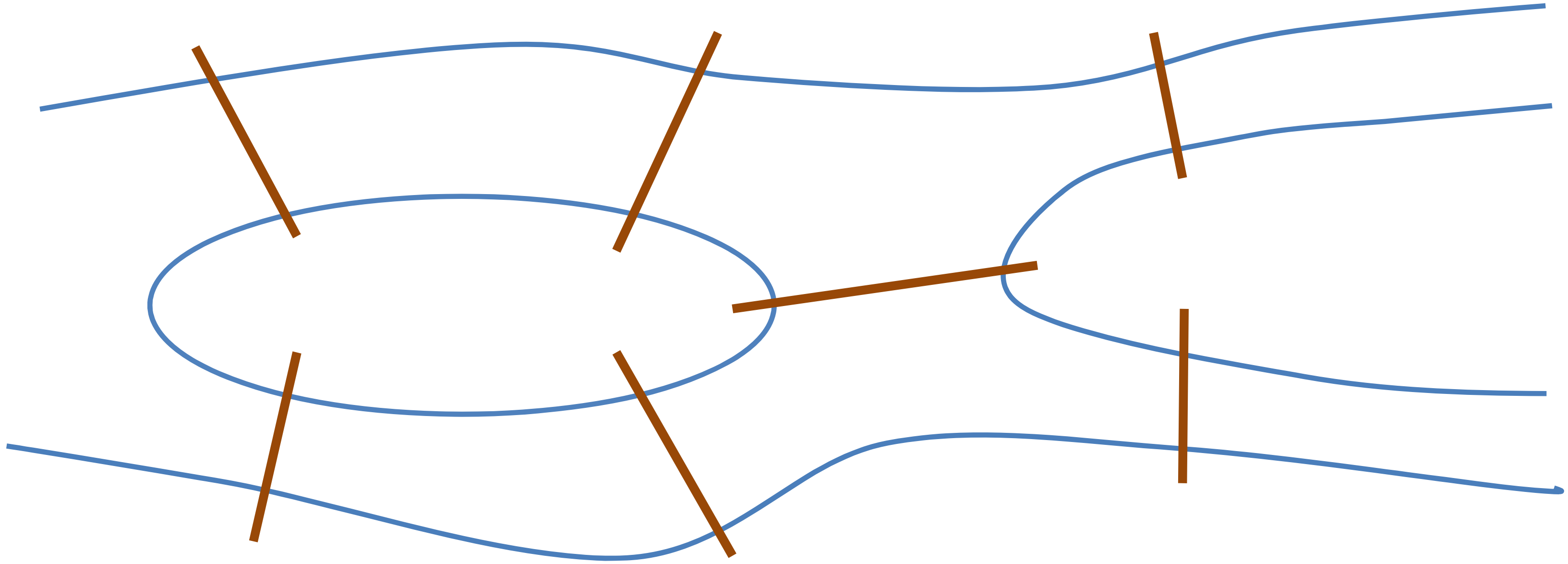
# グラフ



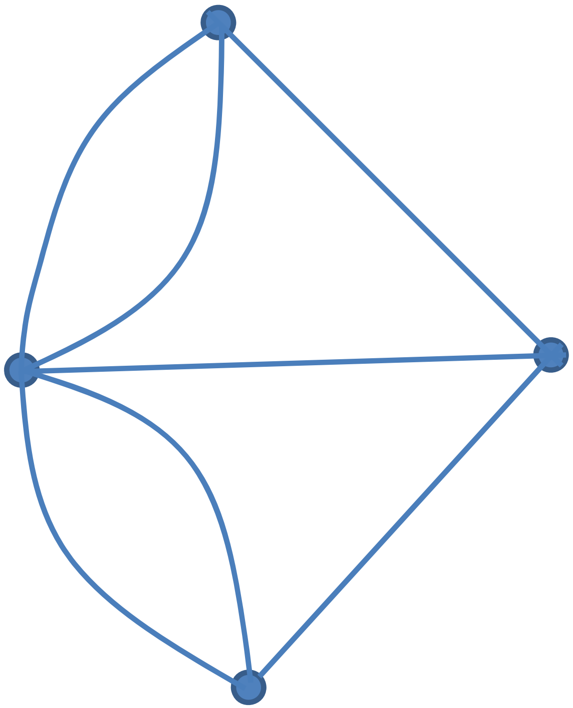
# グラフ



# ケーニヒスベルグの７本の橋



# ケーニヒスベルグの７本の橋



# Eulerの定理

$G=(V,E)$　連結グラフ

すべての枝を1回ずつ通る閉路

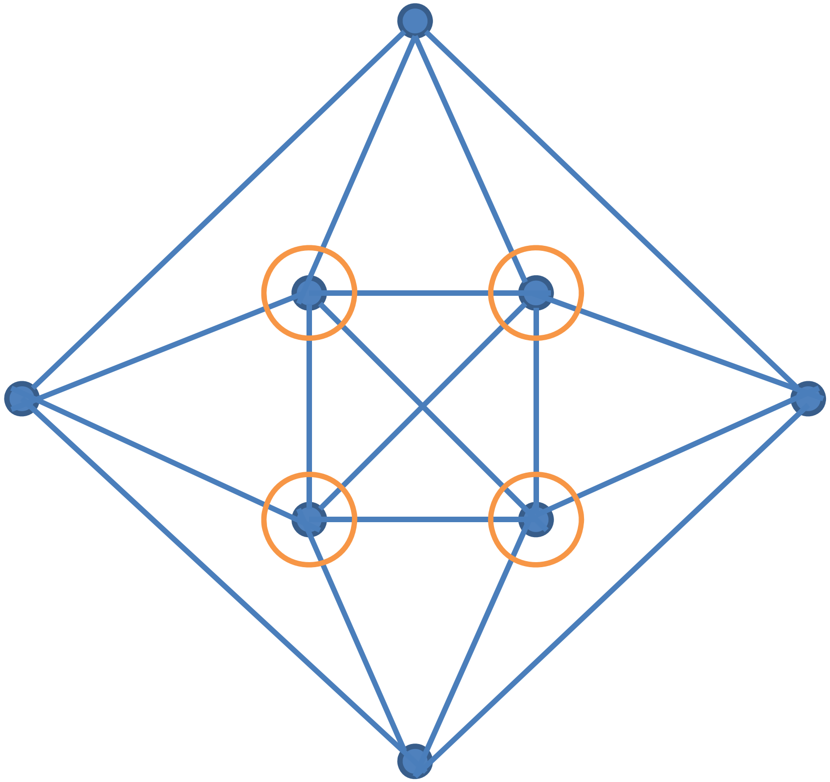
Euler 閉路が存在する

$\Updownarrow$

すべての点で次数が偶数

接続する枝の本数

# Eulerの定理



# 良い特徴付け

判定問題【答えは，Yes/No】

NP: Yesのときに簡潔な証拠が存在

co-NP: Noのときに簡潔な証拠が存在

良い特徴付け (Good Characterization)

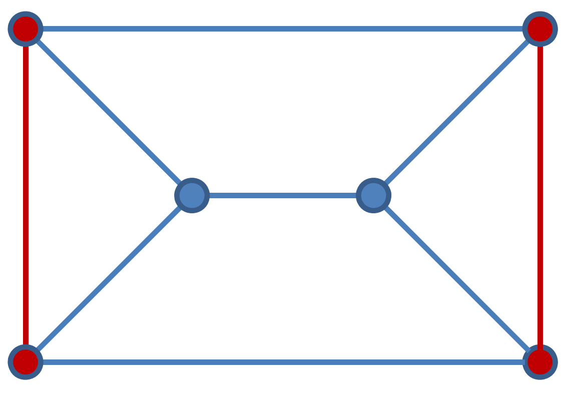
$\mathrm{NP} \cap \mathrm{co\text{-}NP}$ を保証する特徴付け

# マッチング

$G=(V,E)$

端点集合

$M \subseteq E$: マッチング $\Longleftrightarrow$ $|\partial M| = 2|M|$



完全マッチング

$\partial M = V$

# Tutteの定理

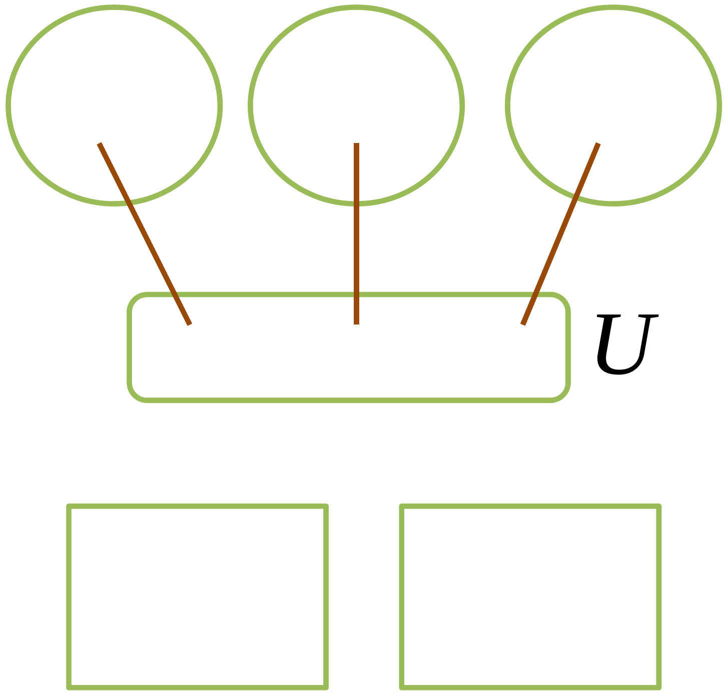
$G=(V,E)$

完全マッチングが存在する

$$\Updownarrow$$

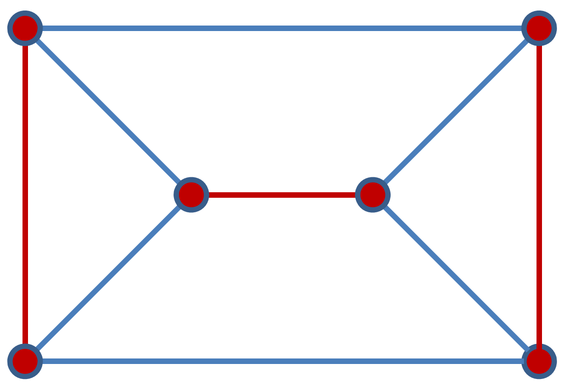
$$\underline{\mathrm{odd}(G-U)} \leq |U|,\ \forall U \subseteq V$$

$G-U$ の連結成分で点数が奇数の個数



# Petersenの定理

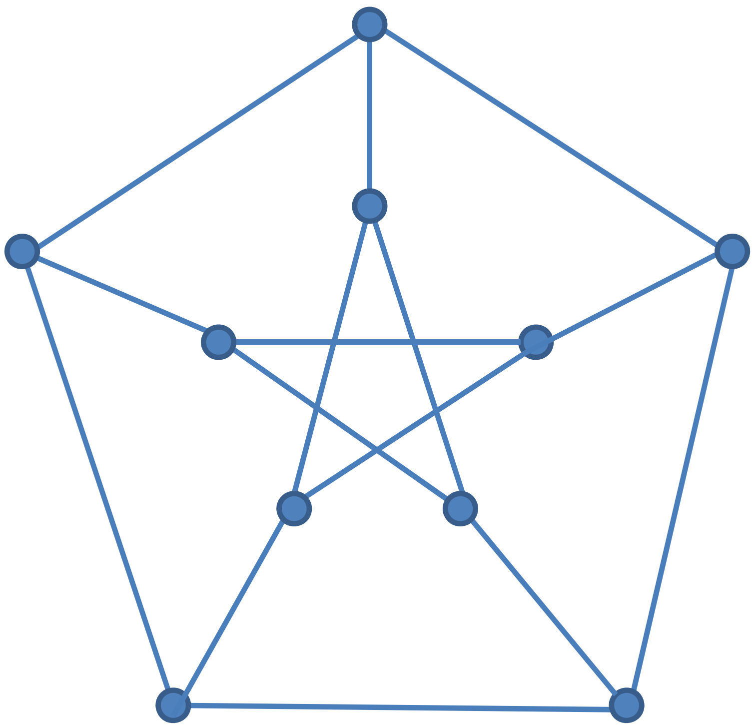
3正則2枝連結グラフには
完全マッチングが存在する.



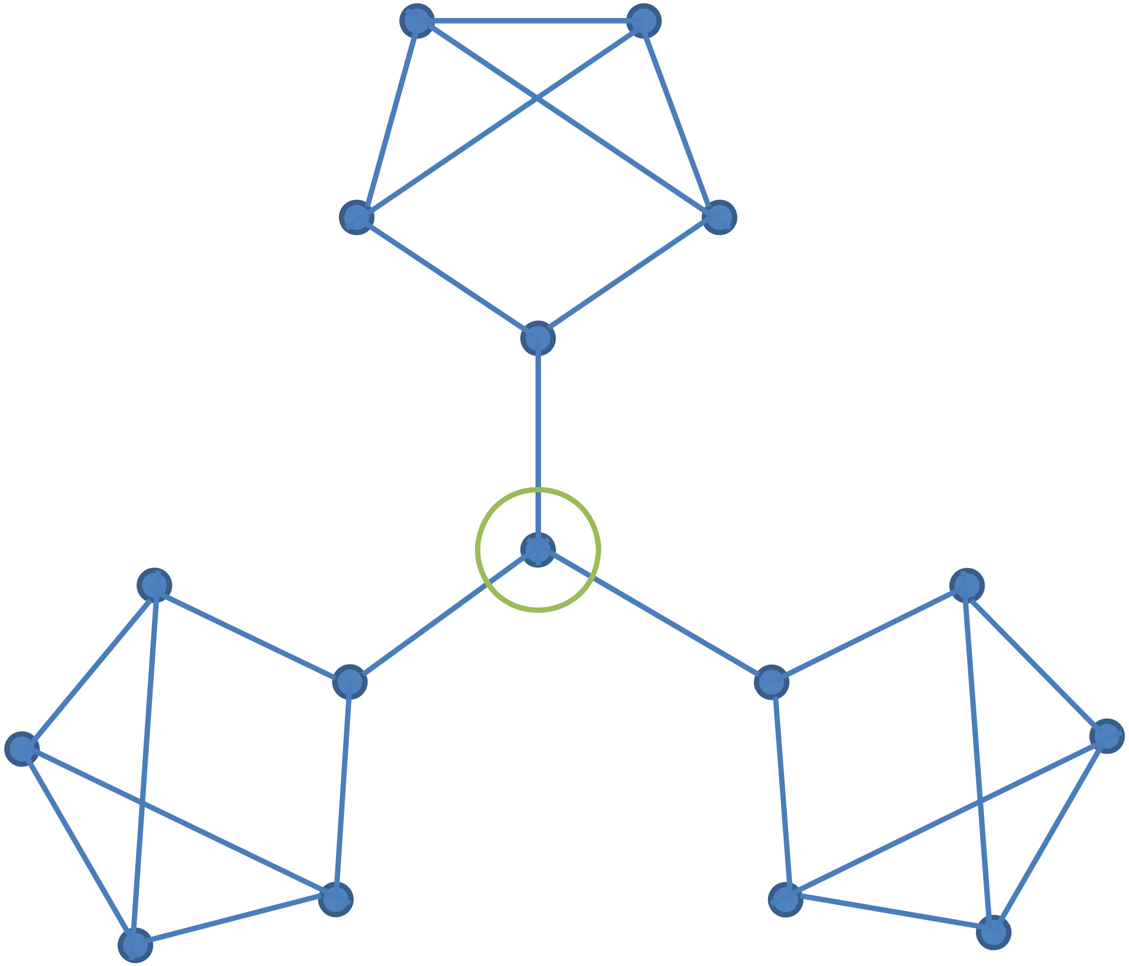
$d$ 正則: すべての点で次数が $d$

$k$ 枝連結: どの $k-1$ 本の枝を削除しても連結

# Petersenの定理



# Petersenの定理



# Petersenの定理

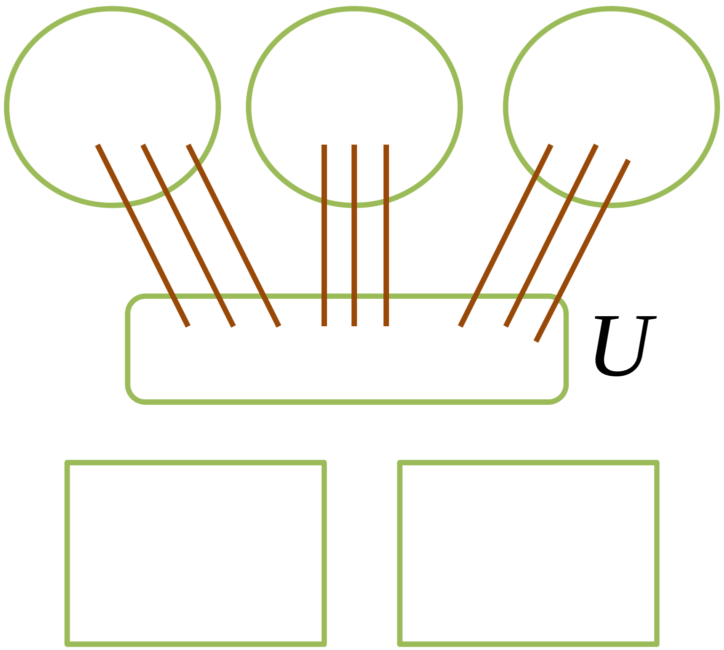
3正則2枝連結グラフ $G=(V,E)$

$F$: $U$ と$G-U$ の奇成分を結ぶ枝の集合

$$|F| \geq 3\,\mathrm{odd}(G-U)$$

$$|F| \leq 3|U|$$

$$\therefore\ \mathrm{odd}(G-U) \leq |U|$$

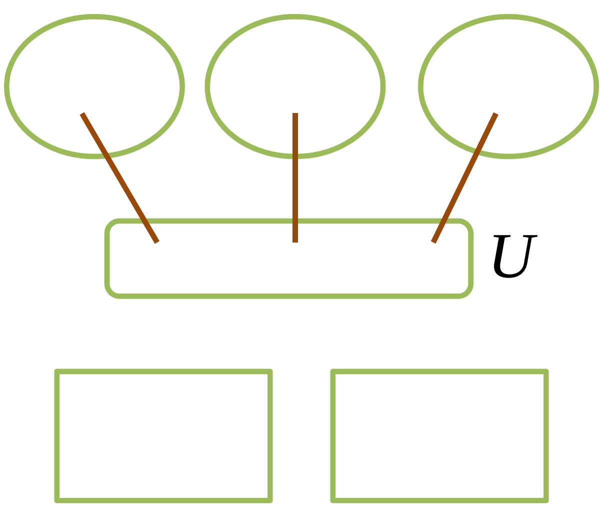



Tutteの定理より, 完全マッチングが存在する.

# Tutte-Berge公式

$G=(V,E)$ 　　　$\mu(G)$： マッチングの最大枝数

$$\boxed{\mu(G)=\frac{1}{2}\min\{|V|-\mathrm{odd}(G-U)+|U| : U\subseteq V\}}$$




$$\ell := \max_{U\subseteq V}\{\mathrm{odd}(G-U)-|U|\}$$

$\ell$ 個の点を追加. 各点から $V$ の
すべての点に枝を張る.

Tutteの定理を適用.

# Edmondsのアルゴリズム

最大マッチングの計算法

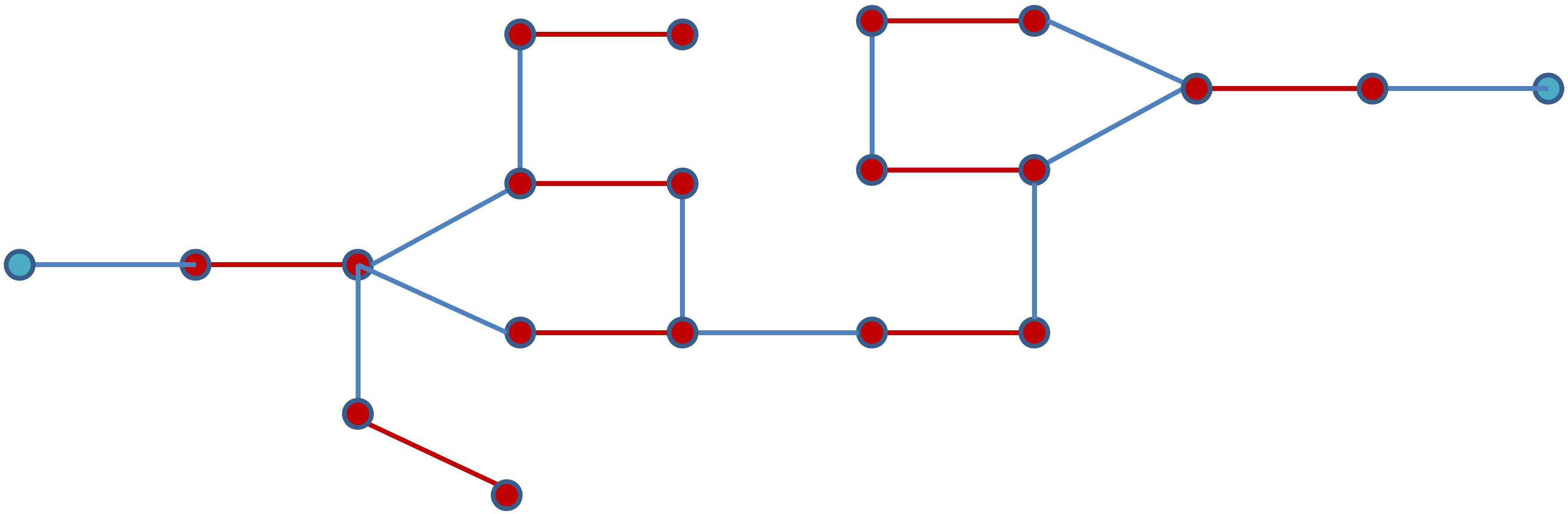
$M := \phi.$

増加道 $P$ を見出し, $M := P \Delta M.$

増加道 が存在しなければ, 終了.

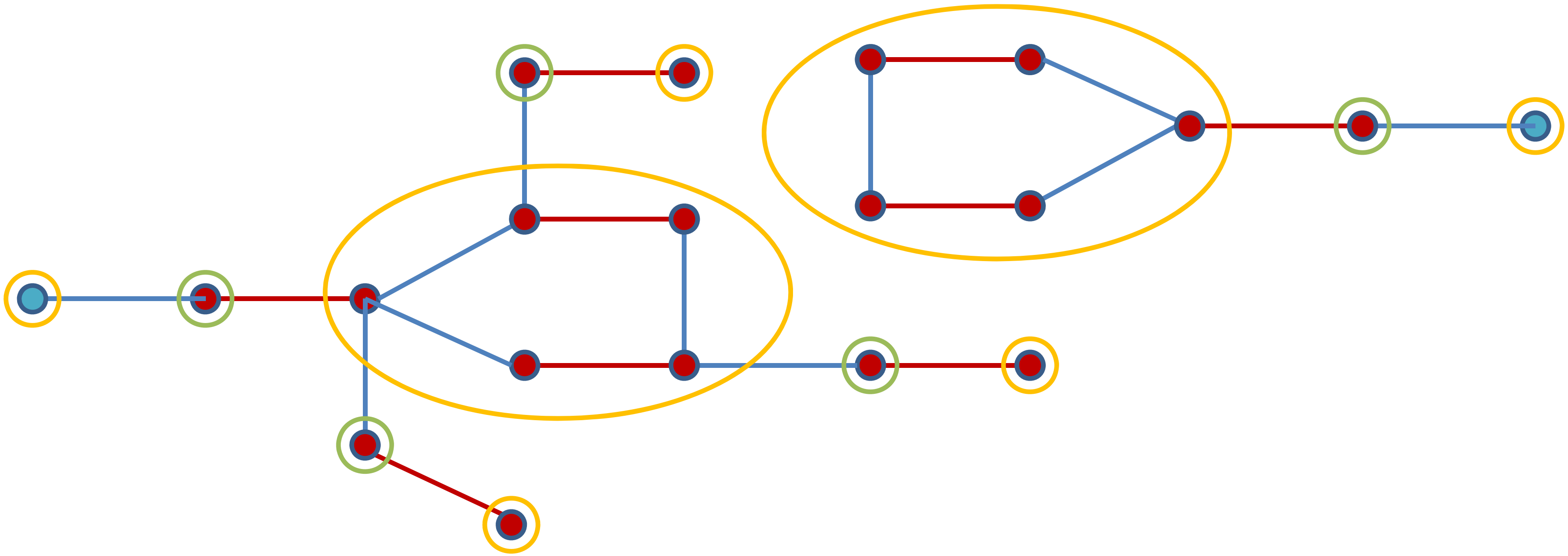
# Edmondsのアルゴリズム

増加道の探索法



# Edmondsのアルゴリズム

増加道が見つからない場合



$$2|M| = 2|U| + |V-U| - \mathrm{odd}(G-U)$$
$$= |V| - \mathrm{odd}(G-U) + |U|.$$

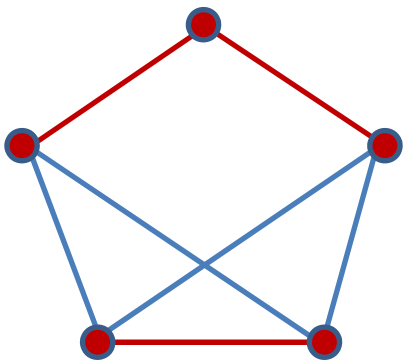
# Gallaiの補題

$$G=(V,E)$$

$H \subseteq E$: 枝被覆 $\Longleftrightarrow$ $\partial H = V$

$\eta(G)$: 枝被覆の最小枝数

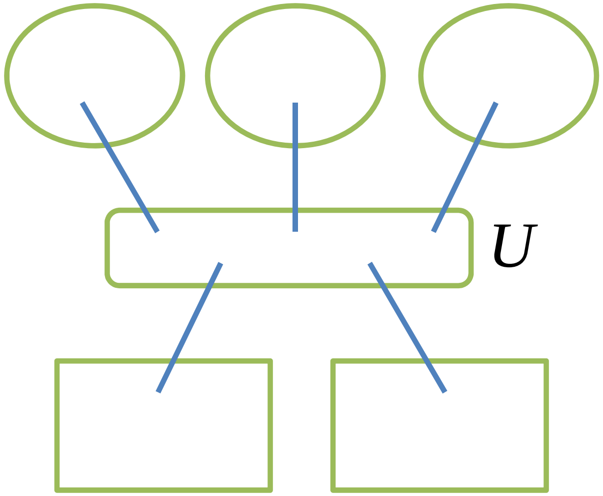
$$\boxed{\mu(G)+\eta(G)=|V|}$$



# Tutte-Berge公式

$G=(V,E)$ $\mu(G)$： マッチングの最大枝数

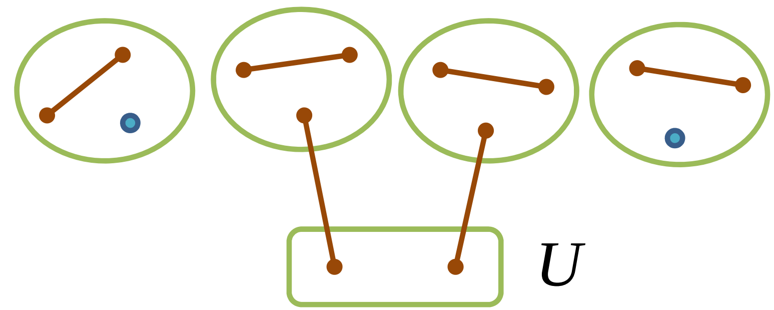
$$\boxed{\mu(G)=\frac{1}{2}\min\{|V|-\mathrm{odd}(G-U)+|U|:U\subseteq V\}}$$



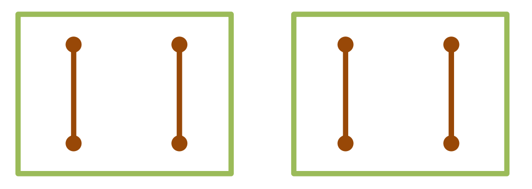
# Tutte-Berge公式

$$G = (V, E) \qquad U \subseteq V$$

$M \subseteq E$： マッチング




$$|V - \partial M| \geq \mathrm{odd}(G-U) - |U|$$



$$|V| - 2|M| \geq \mathrm{odd}(G-U) - |U|$$

$$\boxed{|M| \leq \frac{1}{2}\{|V| - \mathrm{odd}(G-U) + |U|\}}$$

# Edmondsのアルゴリズム

最大マッチングの計算法

$M := \phi.$

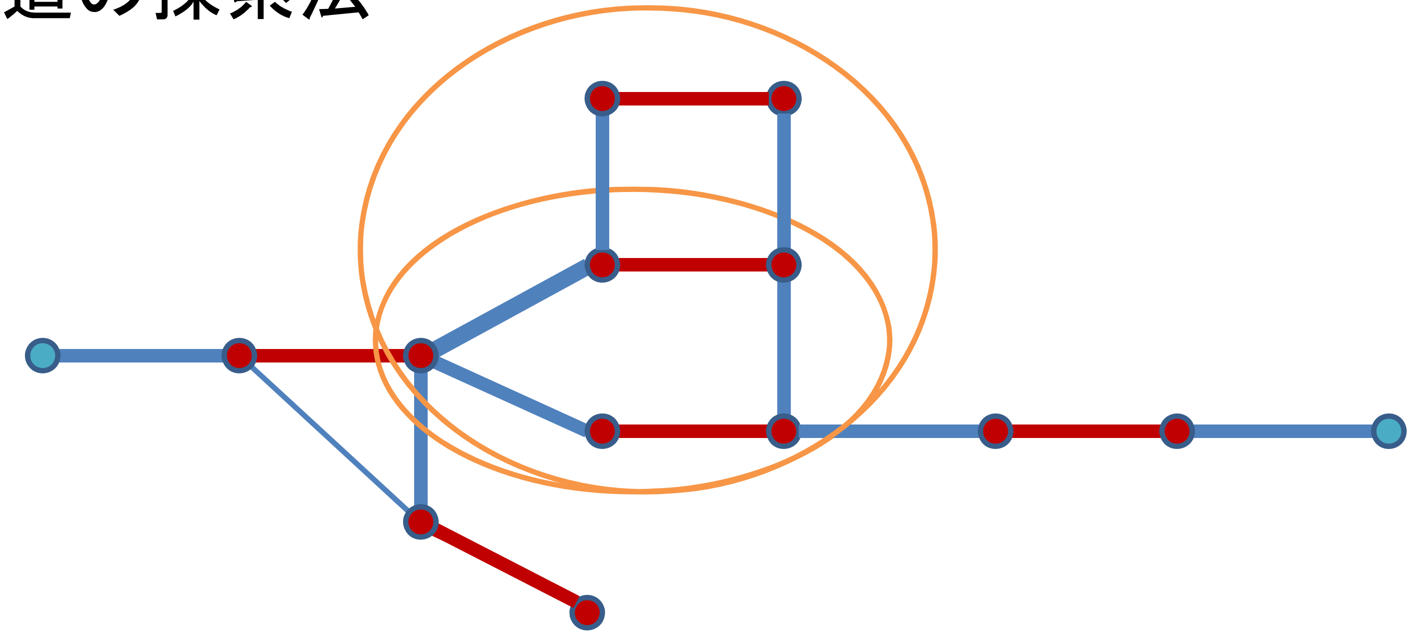
以下を繰り返す.

増加道 $P$ を見出し, $M := P \Delta M.$

増加道 が存在しなければ, 終了.

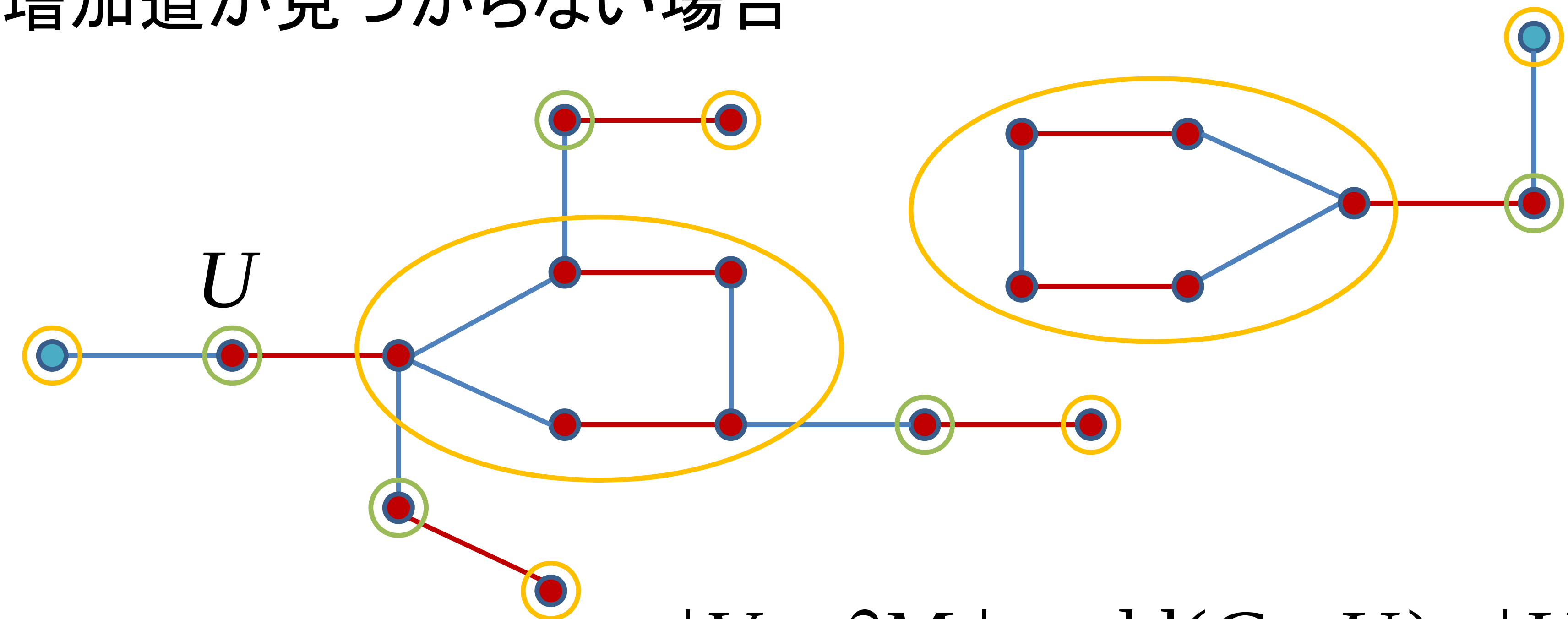
# Edmondsのアルゴリズム

増加道の探索法



# Edmondsのアルゴリズム

増加道が見つからない場合




$$|V-\partial M| = \mathrm{odd}(G-U) - |U|$$

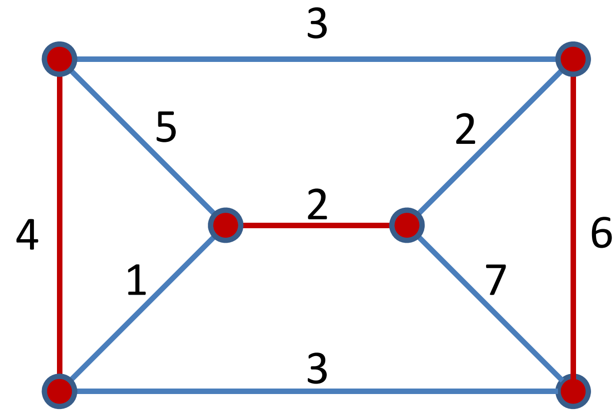
$$\boxed{|M| = \frac{1}{2}\{|V| - \mathrm{odd}(G-U) + |U|\}}$$

# 最大重みマッチング

$$G = (V, E)$$

$$w : E \to \Re$$

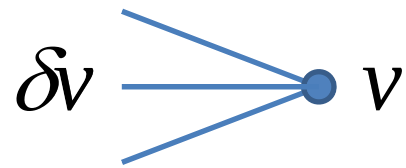
$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$$




$\max\{w(M) \mid M$： マッチング $\}$?

# 最大重みマッチング

$$G=(V,E)$$




整数線形計画問題

| | |
|---|---|
| Maximize | $\sum_{e\in E} w(e)x(e)$ |
| subject to | $\sum_{e\in \delta v} x(e) \le 1 \quad (v\in V),$ |
| | $x(e)\in\{0,1\} \quad (e\in E).$ |

$$M=\{e \mid x(e)=1\}$$

# 最大重みマッチング

線形計画緩和問題

Maximize $\displaystyle\sum_{e \in E} w(e)x(e)$

subject to $\displaystyle\sum_{e \in \delta v} x(e) \le 1 \quad (v \in V),$

$x(e) \ge 0 \quad (e \in E).$

# 線形計画法

線形計画問題

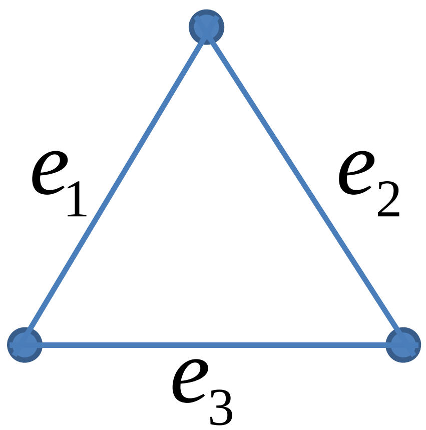
$$\begin{aligned}\text{Maximize} \quad & cx \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b, \\ & x \ge 0.\end{aligned}$$

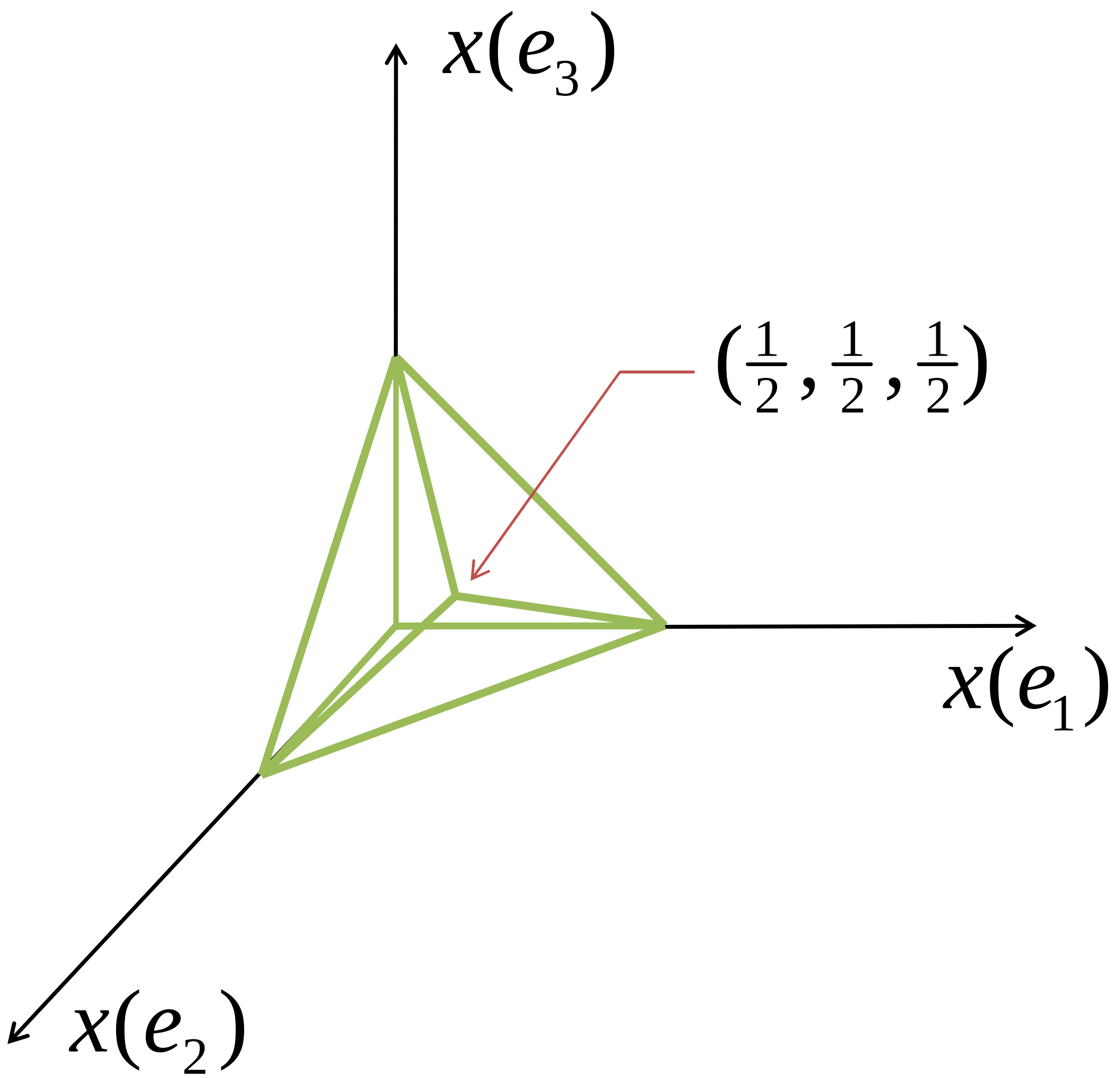
単体法 Dantzig (1947)

楕円体法 Khachiyan (1979)

内点法 Karmarkar (1984)

# 最大重みマッチング



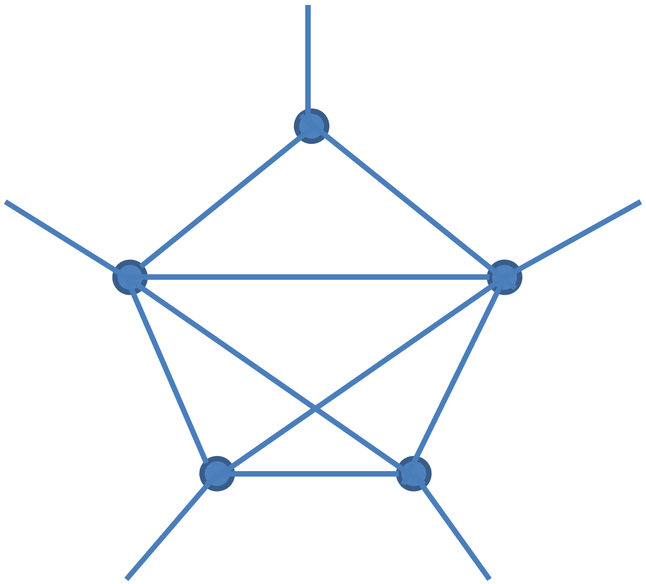



# 最大重みマッチング

$$S \subseteq V,\ |S|: \mathrm{odd} \geq 3$$

$$E[S] = \{e \mid e \in E, \partial e \subseteq S\}$$

$$\boxed{\sum_{e \in E[S]} x(e) \leq \frac{|S|-1}{2}}$$



妥当不等式 $\longrightarrow$ 切除平面

# 最大重みマッチング

線形計画問題　　$Q = \{S \mid S \subseteq V,\ |S| : \mathrm{odd} \geq 3\}$

Maximize $\displaystyle\sum_{e \in E} w(e)x(e)$

subject to $\displaystyle\sum_{e \in \delta v} x(e) \leq 1 \quad (v \in V),$

$$\sum_{e \in E[S]} x(e) \leq \frac{|S|-1}{2} \quad (S \in Q),$$

$x(e) \geq 0 \quad (e \in E).$

$\mathrm{MP}(G)$

# マッチング多面体

実行可能領域 $\mathrm{MP}(G)$ の端点は,
マッチングの特性ベクトル

特性ベクトル

$$\chi_M(e) = \begin{cases} 1 & (e \in M) \\ 0 & (e \notin M) \end{cases}$$

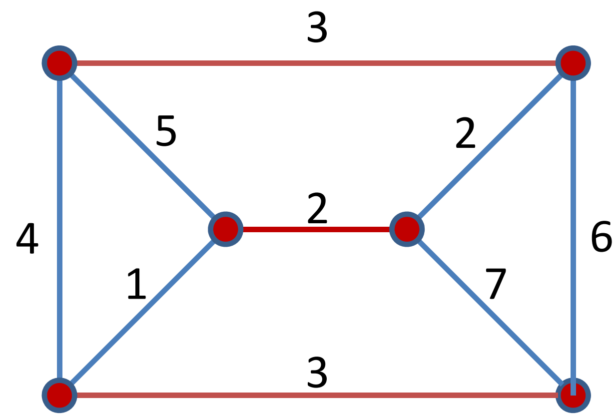
$$\mathrm{MP}(G) = \mathrm{conv}\{\chi_M \mid M：\text{マッチング}\}$$

# 最小重み完全マッチング

$$G = (V, E)$$

$$w : E \to \Re$$

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$$



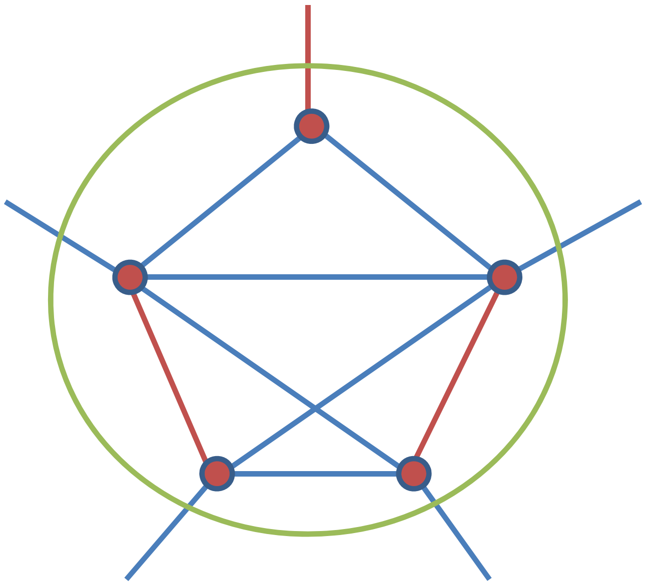

$$\min\{w(M) \mid M : \text{完全マッチング}\}?$$

# 最小重み完全マッチング

$$Q = \{S \mid S \subseteq V,\ |S|: \mathrm{odd} \geq 3\}$$

$$D[S] = \{e \mid e \in E, |\partial e \cap S| = 1\}$$

$$\boxed{\sum_{e \in D[S]} x(e) \geq 1}$$



妥当不等式

# 最小重み完全マッチング

線形計画問題

Minimize $$\sum_{e \in E} w(e)x(e)$$

subject to

$$\sum_{e \in \delta v} x(e) = 1 \quad (v \in V),$$

$$\sum_{e \in D[S]} x(e) \geq 1 \quad (S \in Q),$$

$$x(e) \geq 0 \quad (e \in E).$$

$\mathrm{PMP}(G)$

# 完全マッチング多面体

実行可能領域 $\mathrm{PMP}(G)$ の端点は,
完全マッチングの特性ベクトル

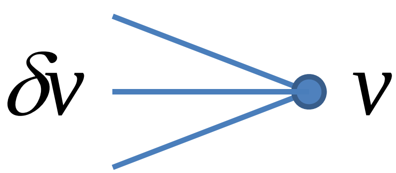
$$\mathrm{PMP}(G) = \mathrm{conv}\{\, \chi_M \mid M \ \text{:完全マッチング} \,\}$$

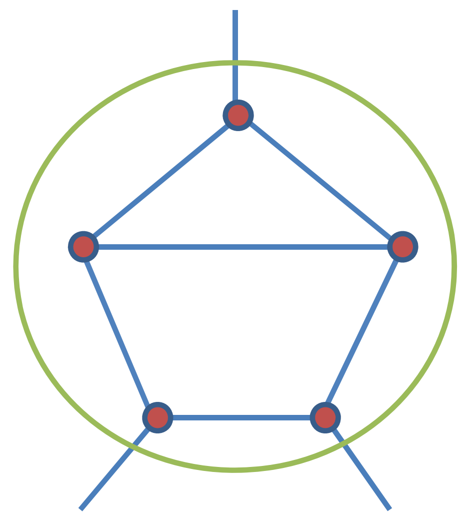
$\mathrm{PMP}(G) \neq \phi \Rightarrow$ 完全マッチングが存在

# Petersen の定理

3正則2枝連結グラフには完全マッチングが存在する.

$$x(e) = 1/3 \quad (e \in E)$$



$$\sum_{e \in \delta v} x(e) = 1$$

$$\sum_{e \in D[S]} x(e) \geq 1$$

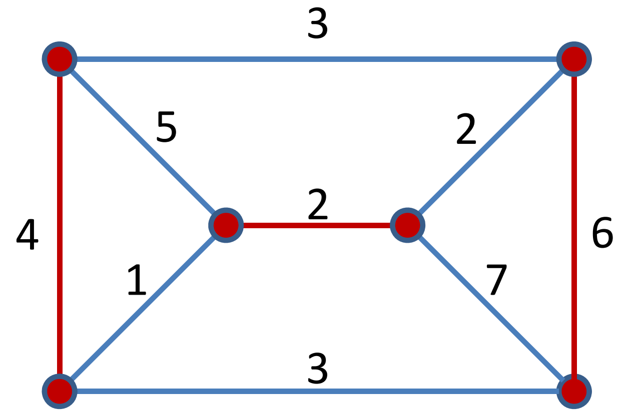
$$\therefore x \in \mathrm{PMP}(G) \neq \phi$$

# 最大重みマッチング

$$G = (V, E)$$

$$w : E \to \Re$$

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$$




$$\max\{w(M) \mid M：\text{マッチング}\}?$$

# 最大重みマッチング

線形計画問題　　$Q = \{S \mid S \subseteq V, \ |S| : \mathrm{odd} \geq 3\}$

Maximize $$\sum_{e \in E} w(e) x(e)$$

subject to $$\sum_{e \in \delta v} x(e) \leq 1 \quad (v \in V),$$

$$\sum_{e \in E[S]} x(e) \leq \frac{|S| - 1}{2} \quad (S \in Q),$$

$$x(e) \geq 0 \quad (e \in E).$$

# 線形計画法の双対理論

主問題

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & cx \\ \text{subject to} \quad & Ax \le b, \\ & x \ge 0. \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & yb \\ \text{subject to} \quad & yA \ge c, \\ & y \ge 0. \end{aligned}$$

弱双対定理

任意の実行可能解の組に対して，$cx \le yb.$

$$\because) \quad cx \le yAx \le yb.$$

# 線形計画法の双対理論

主問題

Maximize $cx$

subject to $Ax \le b,$

$x \ge 0.$

双対問題

Minimize $yb$

subject to $yA \ge c,$

$y \ge 0.$

強双対定理

主問題と双対問題に実行可能解が存在するならば，の組に対して，両者に最適解が存在して，$cx = yb.$

# 線形計画法の双対理論

主問題

Maximize $cx$

subject to $Ax \leq b,$

$x \geq 0.$

双対問題

Minimize $yb$

subject to $yA \geq c,$

$y \geq 0.$

$x, y$：最適解

⇕

$x$：実行可能解

$y$：実行可能解

相補性条件

↓

$y(Ax - b) = 0,$

$(yA - c)x = 0.$

# 最大重みマッチング

双対変数 $y(v)$

主問題

Maximize $\displaystyle\sum_{e\in E} w(e)x(e)$

subject to $\displaystyle\sum_{e\in\delta v} x(e) \le 1 \quad (v \in V),$

双対変数 $z(S)$

$$\sum_{e\in E[S]} x(e) \le \frac{|S|-1}{2} \quad (S \in Q),$$

$$x(e) \ge 0 \quad (e \in E).$$

# 最大重みマッチング

双対問題

Minimize $$\sum_{v\in V} y(v) + \sum_{S\in Q} \frac{|S|-1}{2} z(S)$$

subject to $$\sum_{v\in\partial e} y(v) + \sum_{S\supseteq\partial e} z(S) \geq w(e) \qquad (e\in E),$$

$$y(v)\geq 0 \quad (v\in V),$$

$$z(S)\geq 0 \quad (S\in Q).$$

# 最大重みマッチング

相補性条件

(i) $$x(e) > 0 \Rightarrow \sum_{v \in \partial e} y(v) + \sum_{S \supseteq \partial e} z(S) = w(e).$$

(ii) $$z(S) > 0 \Rightarrow \sum_{e \in E[S]} x(e) = (|S| - 1)/2.$$

(iii) $$y(v) > 0 \Rightarrow \sum_{e \in \delta v} x(e) = 1.$$

# 主双対アルゴリズム

$M$ ：マッチング　　$(y,z)$: 双対問題の実行可能解

相補性条件　　$x=\chi_M$

(i) $\displaystyle\sum_{v\in\partial e} y(v)+\sum_{S\supseteq\partial e} z(S)=w(e),\quad \forall e\in M.$

(ii) $z(S)>0 \Rightarrow |M\cap E[S]|=(|S|-1)/2.$

(iii) $y(v)=0,\quad \forall v\in V-\partial M.$

条件 (i), (ii) を保持. 条件 (iii) が達成されたら終了.

# 主双対アルゴリズム

$$c(e) = \sum_{v \in \partial e} y(v) + \sum_{S \supseteq \partial e} z(S) - w(e) \geq 0 \quad (e \in E).$$

$$E^* = \{e \mid e \in E, c(e) = 0\}.$$

相補性条件

(i) $M \subseteq E^*$

(ii) $z(S) > 0 \Rightarrow |M \cap E[S]| = (|S| - 1)/2.$

(iii) $y(v) = 0, \quad \forall v \in V - \partial M.$

# 主双対アルゴリズム

初期解の設定

$$M := \phi,$$

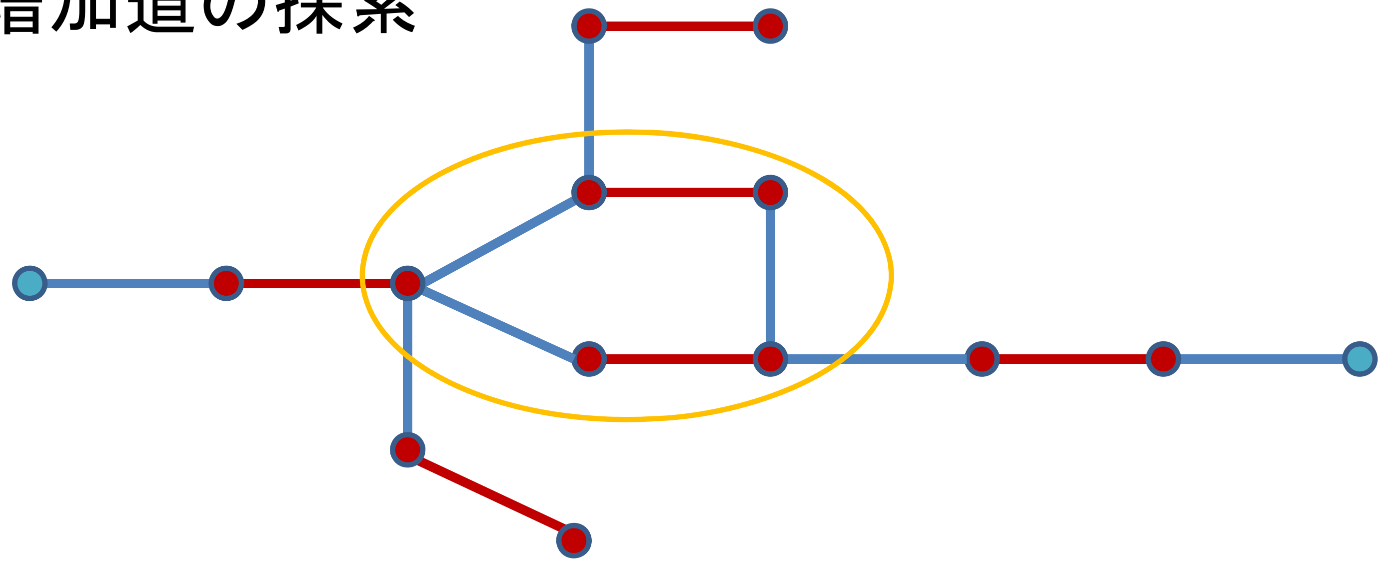
$$y(v) := \frac{1}{2}\max\{\, w(e) \mid e \in E \} \quad (v \in V),$$

$$z(S) := 0 \quad (S \in Q).$$

# 主双対アルゴリズム

$G^* = (V, E^*)$

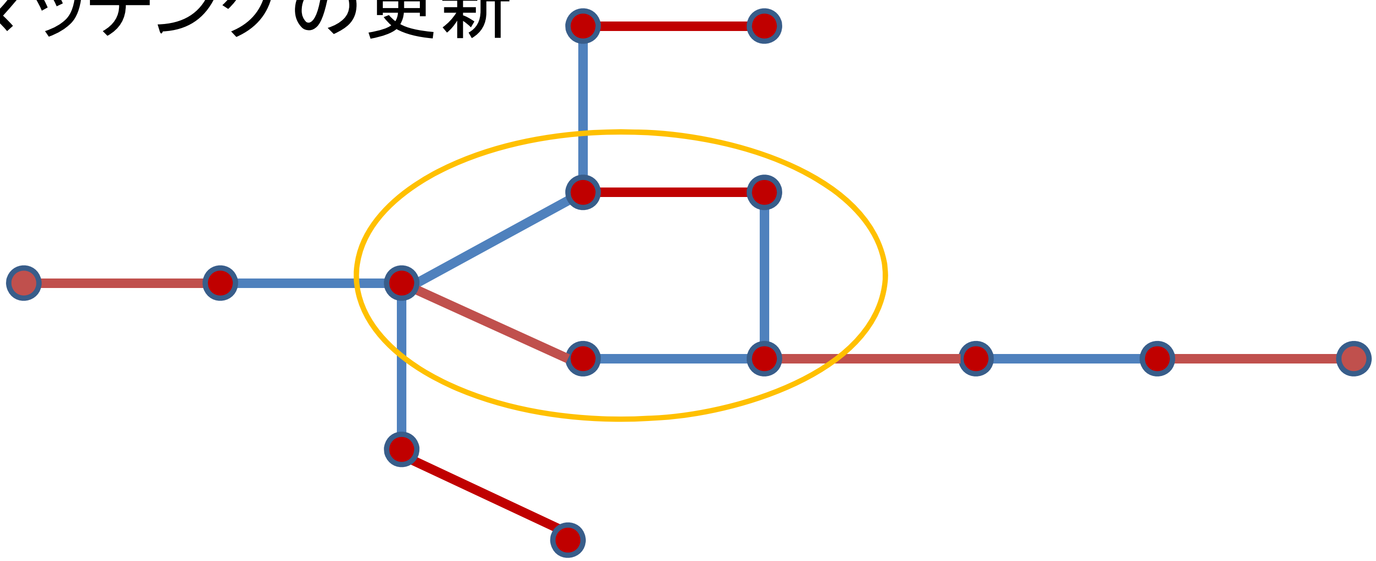
増加道の探索



# 主双対アルゴリズム

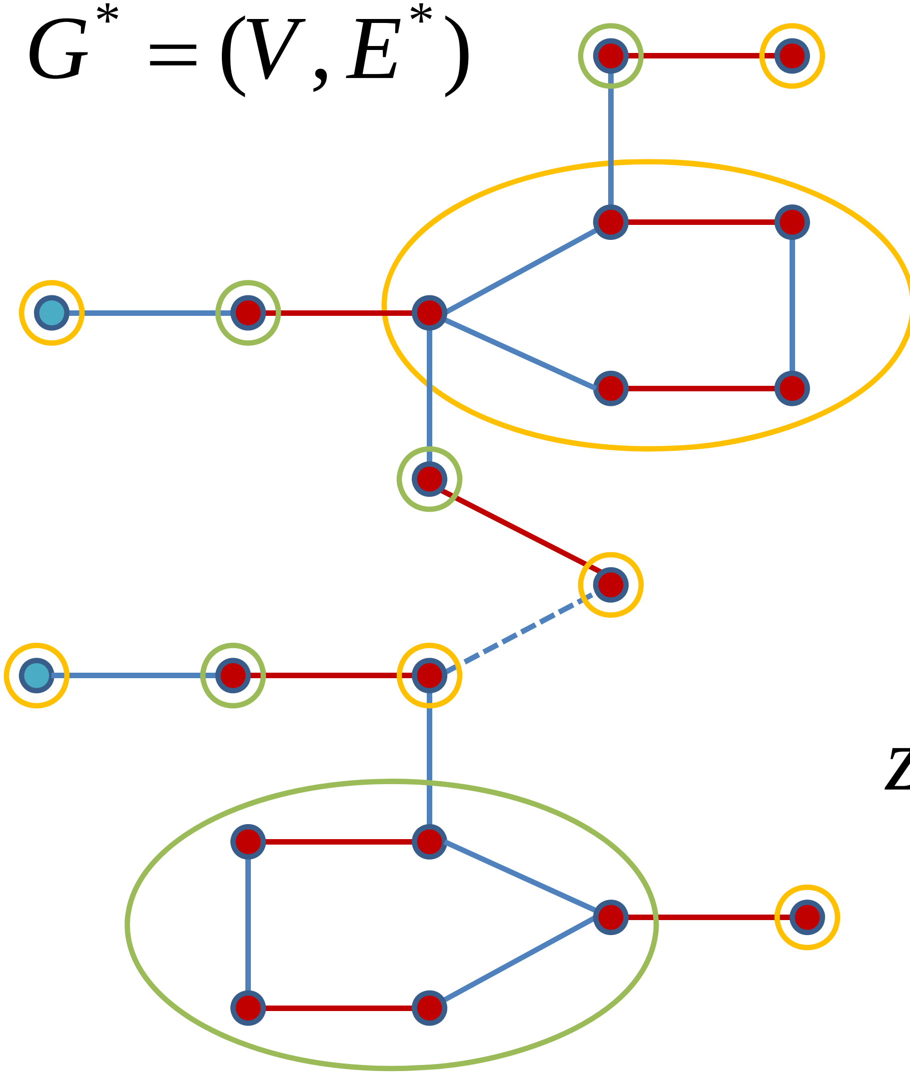
$G^* = (V, E^*)$

マッチングの更新



# 主双対アルゴリズム

$G^* = (V, E^*)$



双対実行可能解の更新

$$y(v) := \begin{cases} y(v) - \varepsilon & (v \in \bigcirc) \\ y(v) + \varepsilon & (v \in \bigcirc) \end{cases}$$

$$z(S) := \begin{cases} z(S) + 2\varepsilon & (S : \bigcirc) \\ z(S) - 2\varepsilon & (S : \bigcirc) \end{cases}$$

# 主双対アルゴリズム

ステップ幅

$$\varepsilon := \min\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} > 0$$

$$\alpha := \min\{y(v) \mid v \in \bigcirc\}$$

$$\beta := \tfrac{1}{2}\min\{z(S) \mid S : \bigcirc\}$$

$$\gamma := \tfrac{1}{2}\min\{c(e) \mid \bigcirc \quad \bigcirc\}$$

$$\delta := \min\{c(e) \mid \bigcirc \quad\}$$

# 主双対アルゴリズム

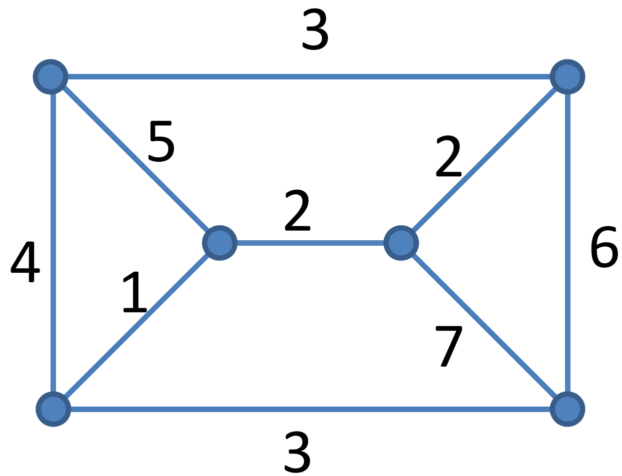
計算量　$O(|E|\cdot|V|^2)$

増加道が見つかるまでの間に
双対変数の更新は $O(|V|)$ 回.

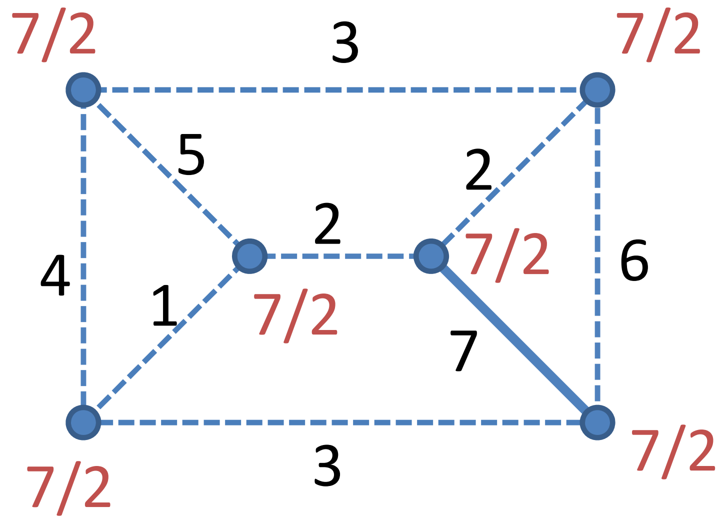
$$z(S), z(T) > 0 \Rightarrow$$
$$S \subseteq T, T \supseteq S, \text{or } S \cap T = \phi.$$

$w$： 整数値の場合, $y$：半整数値, $z$： 整数値.

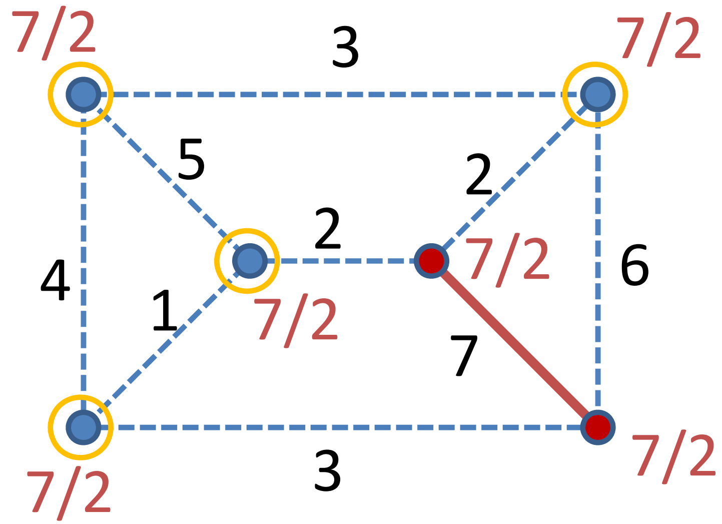
# 主双対アルゴリズム



# 主双対アルゴリズム

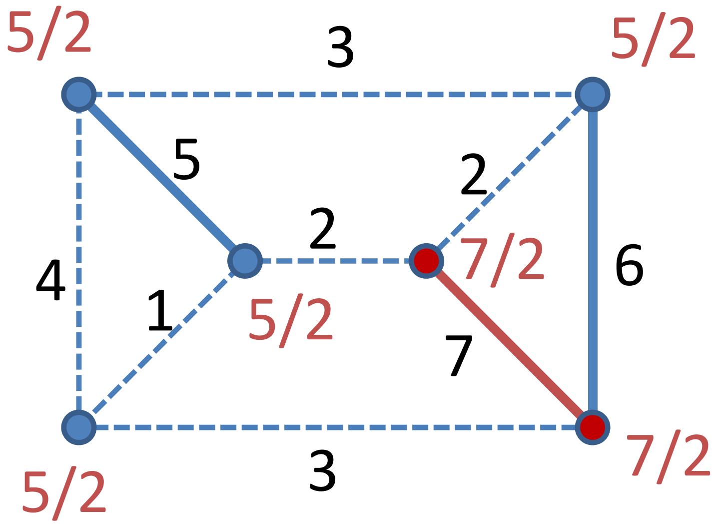


# 主双対アルゴリズム

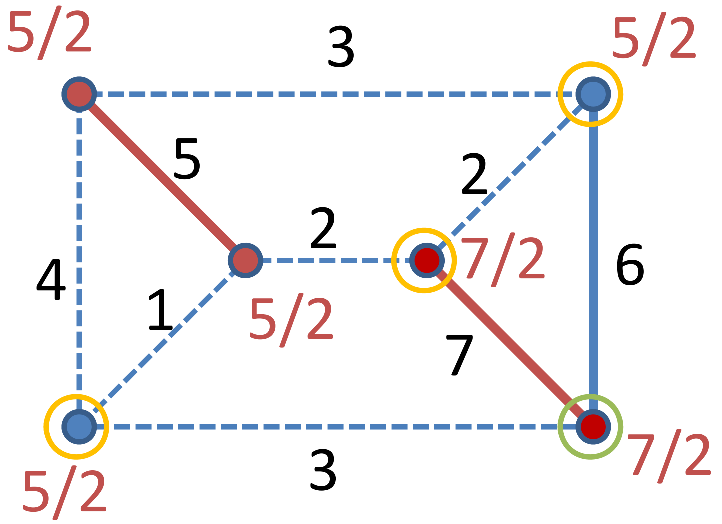



$$\varepsilon = 1$$

# 主双対アルゴリズム

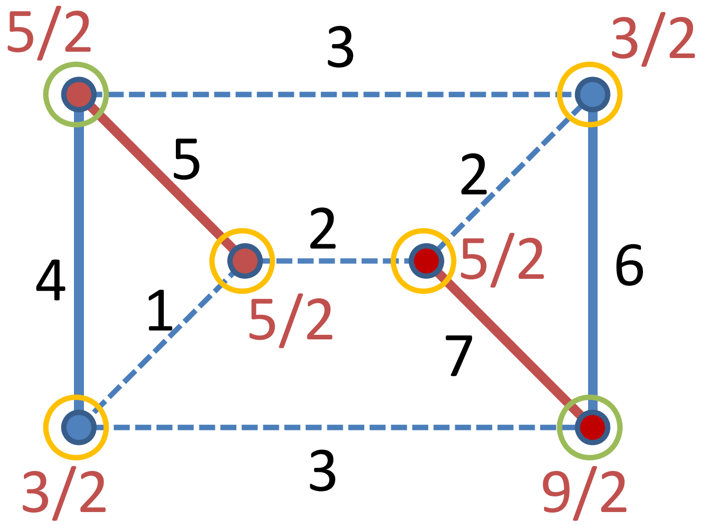


# 主双対アルゴリズム



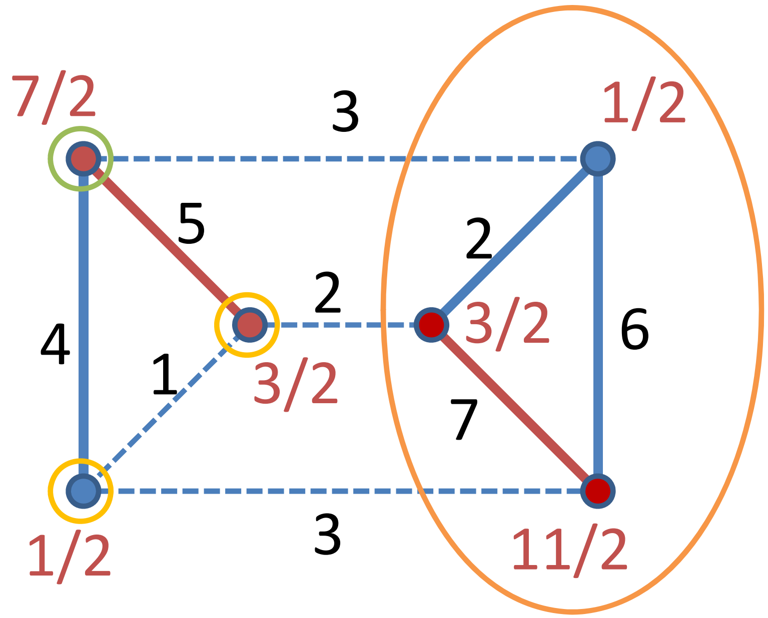

$$\varepsilon = 1$$

# 主双対アルゴリズム



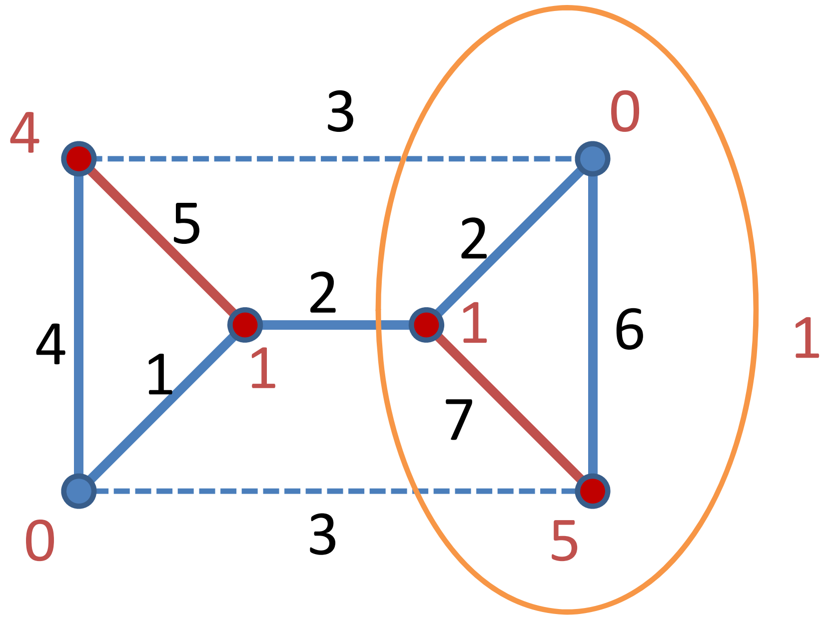

$\varepsilon = 1$

# 主双対アルゴリズム




$$\varepsilon = 1/2$$

# 主双対アルゴリズム

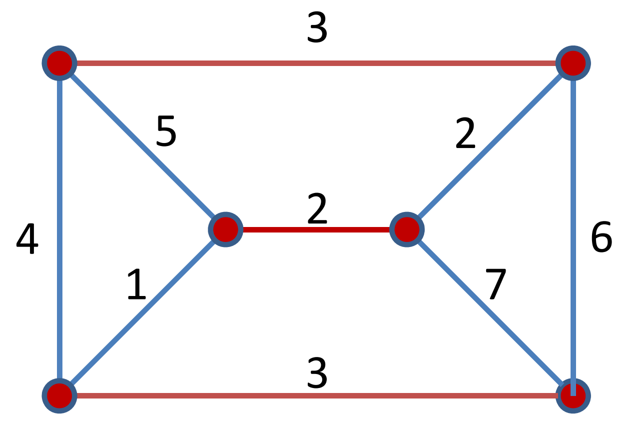


# 最小重み完全マッチング

$$G = (V, E)$$

$$c : E \to \Re$$

$$c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$$




$\min\{c(M) \mid M$ : 完全マッチング $\}$?

# 最小重み完全マッチング

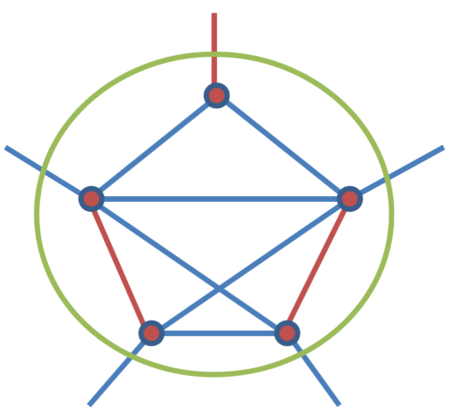
線形計画問題

Minimize $\displaystyle\sum_{e \in E} c(e)x(e)$

subject to $\displaystyle\sum_{e \in \delta v} x(e) = 1 \quad (v \in V),$

$\displaystyle\sum_{e \in D[S]} x(e) \geq 1 \quad (S \in Q),$

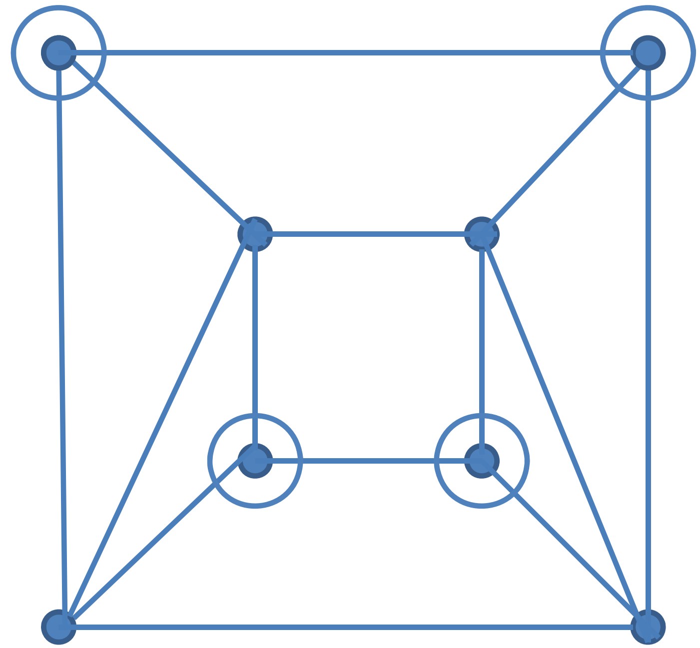
$x(e) \geq 0 \quad (e \in E).$



# 郵便配達人問題

$$G=(V,E)$$

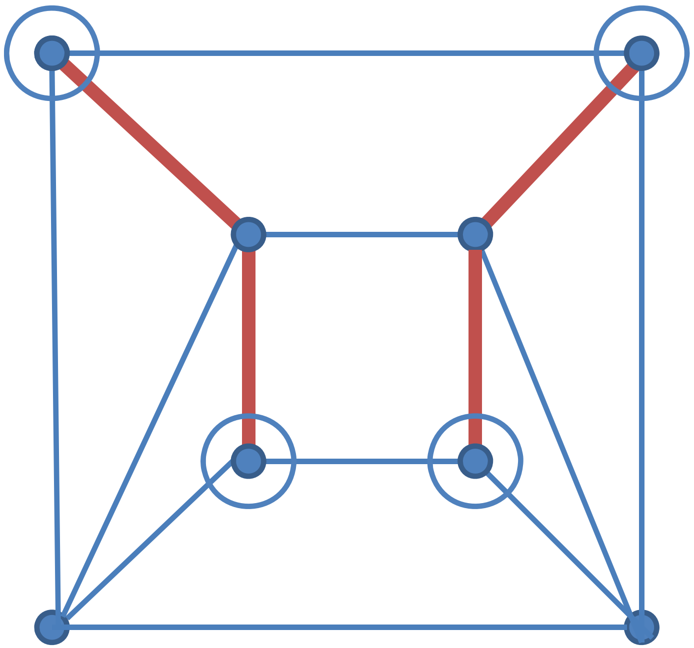
$$\ell : E \to \Re_+$$



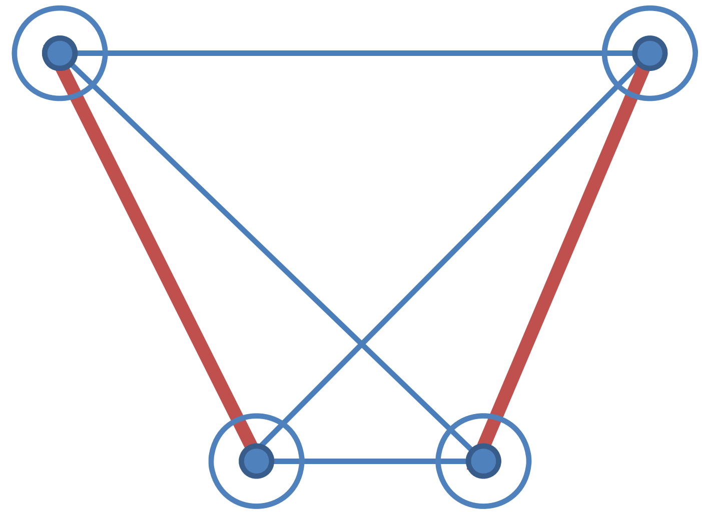
すべての枝を少なくとも1回通って
出発点に戻る最短経路

# 郵便配達人問題

$G=(V,E)$



$\hat{G}=(W,F)$



$c(a)$：両端点を結ぶ
最短路長

最小重み完全マッチング

# 計算困難問題への挑戦

NP困難問題への対処法

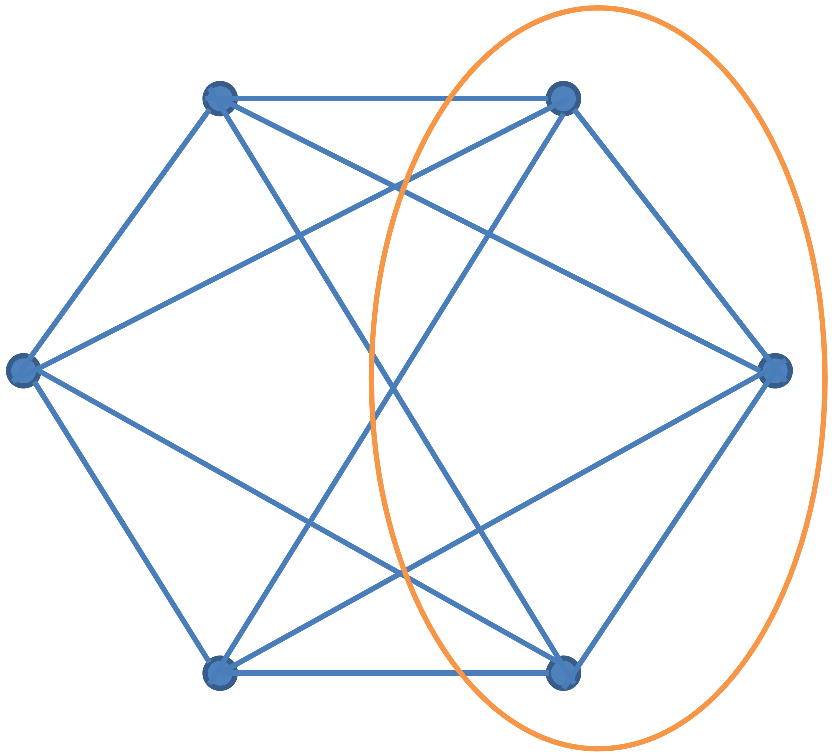
- 効率的に解ける特殊ケース
- 精度保証付き近似アルゴリズム

⋮

# 最大カット問題

$$G = (V, E)$$

$$w : E \to \Re_+$$



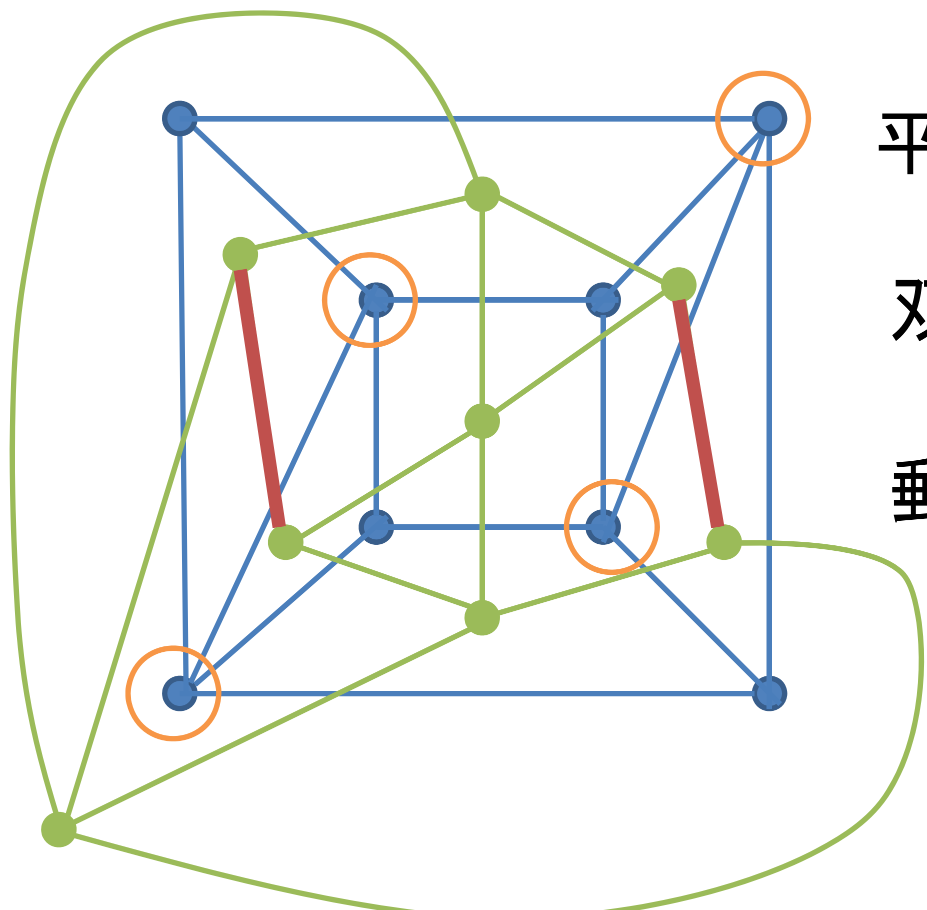
$$w(D[X]) = \sum_{e \in D[X]} w(e)$$

$$\boxed{\max_{\phi \neq X \subset V} w(D[X])\,?}$$

NP困難

# 最大カット問題

平面グラフ上の最大カット問題は，
双対グラフ上の郵便配達人問題に帰着可能．



平面グラフ

双対グラフ

郵便配達人問題

# 巡回セールスマン問題

$G=(V,E)$　完全グラフ

$d: E \rightarrow \Re_{+}$　距離（三角不等式）

$H \subseteq E:$　Hamilton閉路
（すべての点を1度ずつ通る）

$$d(H)=\sum_{e \in H} d(e)$$

NP困難

$\min\{d(H) \mid H:$ Hamilton閉路$\}?$

# 巡回セールスマン問題

Christofidesの近似アルゴリズム

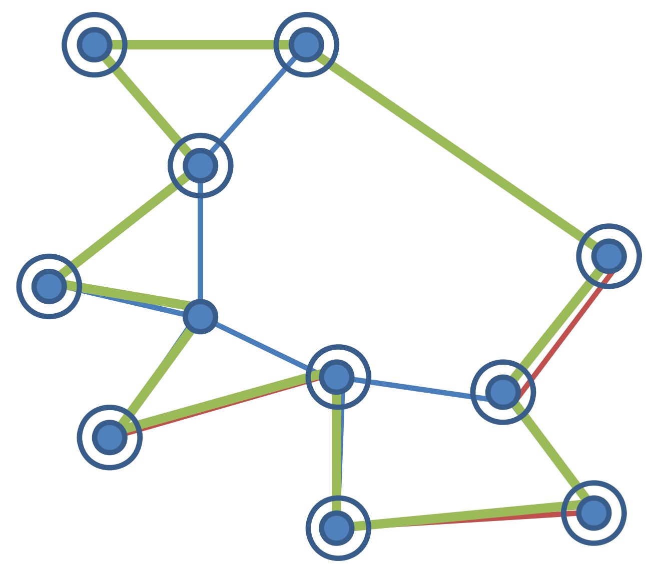
近似比　3/2

最小全域木　$T \subseteq E$

$W$：$T$の奇次数点の集合

$M$：$G[W]$の最小重み完全マッチング

$H$：最適巡回路



$$d(T) \le d(H)$$

$$d(M) \le d(H)/2$$

$$d(T \cup M) \le \frac{3}{2} d(H)$$