特異点解消入門

川ノ上 帆

Abstract. 局所的に幾つかの多項式の零点で定義される図形を代数多様体と言い, その性質を調べる分野を代数幾何学と言います. 廣中平祐先生によって 1960 年代に証明された標数 0 の特異点解消は, 代数幾何学において今や基本的な道具となっています. 本講義ではこの特異点解消について説明し, その証明のアイディアを紹介します.

1. 基礎知識

1.1. **代数多様体.** 代数多様体の説明をします. まず, 体 k を一つ固定します. 体とは加減乗除で閉じている数の集まりのことです. 有理数全体 $\mathbb{Q}$ や実数全体 $\mathbb{R}$, 複素数全体 $\mathbb{C}$ 等が体の例です. ここでは k は $\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$ の何れかとします. 実は体 k に付随して k の標数という概念が定まります. 上記の体は何れも標数 0 の体です. k の元 n 個の組全体のなす空間

$$\mathbb{A}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in k\}$$

を n **次元アフィン空間**と呼びます. 所謂 n 次元空間です.

次に k 係数の n 変数多項式全体を $k[\mathbf{x}] = k[x_1, \dots, x_n]$ と書きます. $k[\mathbf{x}]$ の元は $\mathbb{A}^n$ の上の関数を定めます. さて, 有限個の多項式の集合 $I \subset k[\mathbf{x}]$ に対し, I の元の共通零点

$$V(I) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{A}^n \mid f(\mathbf{x}) = 0,\ \forall f \in I\} \subset \mathbb{A}^n$$

を**アフィン多様体**と呼びます. 一般の代数多様体とは有理関数を貼り合わせ関数として使ってアフィン多様体を貼り合わせたものです. 以下に少し例を挙げてみます.

例 1 (超曲面)**.** 特に一つの既約多項式 $0 \neq f \in k[\mathbf{x}]$ で定義されている多様体

$$V(f) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n \mid f(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$$

を $\mathbb{A}^n$ の超曲面と呼びます. 例えば $x^2 + y^2 - 1 = 0$ で定まる平面上の円は $\mathbb{A}^2$ の超曲面です.

例 2 (射影空間)**.** $n+1$ 個の k の元（但しいずれかは $\neq 0$）の比全体の集合

$$\mathbb{P}^n = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}\}$$

を n 次元射影空間と呼びます. 各元は比と思っているので, $[x_0 : \dots : x_n] = [x'_0 : \dots : x'_n]$ とはある $t \in k \setminus \{0\}$ が存在して $x'_0 = tx_0, \dots, x'_n = tx_n$ となるという意味です. $\mathbb{P}^n$ が代数多様体であることは次のようにして確かめられます. $\mathbb{P}^n$ の x_i-chart U_i $(0 \le i \le n)$ を

$$U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$$

と定めます. U_i の点は $[x_0 : \dots, x_n] = [\frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i}]$ と表せるので

$$\mathbb{A}^n \ni (y_1, \dots, y_n) \mapsto [y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n] \in U_i$$

により各 U_i は $\mathbb{A}^n$ と同型です ($U_i \cong \mathbb{A}^n$ と表します). 更に貼り合わせ関数 $\phi_{ij}\colon U_i \dashrightarrow U_j$ は

$$\phi_{ij}(y_1, \dots, y_n) = (1/y_j) \cdot (y_1, \dots, y_i, 1, y_{i+1}, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \quad (i < j \text{ の場合})$$

などと有理関数達で与えられ, $\mathbb{P}^n = \bigcup_{0 \le i \le n} U_i$ と書けるので $\mathbb{P}^n$ は代数多様体です.

1.2. **特異点.** 代数多様体の特異点の説明をします. 代数多様体 V が, ある点の近傍でアフィン空間の様な座標を持つ時, V はその点で**非特異（滑らか）**であるといい, そうでない点を**特異点**といいます. 特に超曲面 $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ の場合は, $V(f)$ が接超平面を持つ点が非特異点, 持たない点が特異点です. 全ての点が非特異な多様体は**非特異多様体**と呼ばれます. 例えば, $V(x^2+x^3-y^2) \subset \mathbb{A}^2$ は原点で交差しており, $V(x^3-y^2) \subset \mathbb{A}^2$ は原点で尖っているので, これらは原点を特異点に持ちます (他の点では非特異になっています).

超曲面の特異点は微分 $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ を使って定義できます. 実際, 点 $P \in V(f) \subset \mathbb{A}^n$ に対し

$$P \text{ が } V(f) \text{ の特異点} \Leftrightarrow \partial_{x_i} f(P) = 0 \quad (1 \le i \le n)$$

と定義します（非特異点では $\sum_{1\le i\le n} \partial_{x_i} f(P)(x_i - P_i)$ が接超平面の定義式を与えます）.

超曲面の特異点の悪さは重複度で測れます. $f \in k[\mathbf{x}]$ の点 $P \in \mathbb{A}^n$ における <u>重複度</u>$\mathrm{ord}_P(f)$ とは, $f(x+P)$ を展開した時に現れる単項式の次数の最小値 ($f=0$ の時は ∞) です. また, $I \subset k[\mathbf{x}]$ に対し $\mathrm{ord}_P(I) = \min\{\mathrm{ord}_P(f) \mid f \in I\}$ と定めます. $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ と点 $P \in \mathbb{A}^n$ について

$$\mathrm{ord}_P(f) \ge 1 \Leftrightarrow P \in V(f), \quad \mathrm{ord}_P(f) \ge 2 \Leftrightarrow P \text{ が } V(f) \text{ の特異点}$$

が成り立ちます. $\mathrm{ord}_P(f)$ が大きいほど $V(f)$ の悪い特異点と考えることにします.

例 3. $f = x_1^2 x_2 + x_3^3$ の $P = (P_1, P_2, P_3) \in V(f) \subset \mathbb{A}^3$ における重複度は

$$f(x_1+P_1, x_2+P_2, x_3+P_3) = x_1^2x_2 + x_3^3 + 2P_1x_1x_2 + P_2x_1^2 + 3P_3x_3^2 + P_1^2x_2 + 2P_1P_2x_1 + 3P_3^2x_3$$

より原点で $\mathrm{ord}_O(f) = 3$, $P = (0,t,0)$ $(t \ne 0)$ で $\mathrm{ord}_P(f) = 2$, 他の点では $\mathrm{ord}_P(f) = 1$(非特異).

重複度を計算するには微分が有用です. 単項式 $x^J = x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}$ に対する微分作用素 ∂_{x^J} を

$$\partial_{x^J} = (j_1!j_2!\cdots j_n!)^{-1}\, \partial_{x_1}^{j_1}\partial_{x_2}^{j_2}\cdots\partial_{x_n}^{j_n}$$

で定めます. この時 $f(x+P)$ に現れる x^J の係数は $(\partial_{x^J} f)(P)$ で計算できるので

$$\mathrm{ord}_P(f) \ge m \Leftrightarrow |J| = \sum_i j_i < m \text{ なる全ての } J \text{ について } (\partial_{x^J} f)(P) = 0$$

が成り立ちます. 故に f の重複度が m 以上になる点の集合 $V(f,m)$ は次のように表せます.

$$V(f,m) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid \mathrm{ord}_P(f) \ge m\} = V(\partial_{x^J} f \mid |J| < m)$$

例 4. $f = x_1^2x_2 + x_3^3$ の場合 $\partial_1 f = f$ $(|J|=0)$, $\partial_{x_1} f = 2x_1x_2$, $\partial_{x_2} f = x_1^2$, $\partial_{x_3} f = 3x_3^2$ $(|J|=1)$, $\partial_{x_1^2} f = x_2$, $\partial_{x_1x_2} f = 2x_1$, $\partial_{x_3^2} f = 3x_3$ $(|J|=2)$ となり, 重複度 3 の点は原点のみ.

1.3. **爆発.** 超曲面 $V(x^2+x^3-y^2) \subset \mathbb{A}^2$ では, $y = \pm x$ を接線とする二つの曲線が原点で交わって特異点になります. ここで, 同じ原点でも近付く方向によって違う点と考えるとどうでしょう. $y = x$ 方向から近付く曲線と $y = -x$ 方向から近付く曲線が交わらなくなり, めでたく特異点が無くなります. この様な操作を爆発と呼びます. 以下で爆発を定義します.

$C = V(x_1, x_2, \ldots, x_m) \subset \mathbb{A}^n$ $(1 \le m \le n)$ を非特異なアフィン多様体とします. $C \cong \mathbb{A}^{n-m}$ に注意しましょう. $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{m-1} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{A}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{P}^{m-1}\}$ の部分集合 $W \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{m-1}$ を

$$W = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, [y_1 : \ldots : y_m]) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{m-1} \mid x_i y_j = x_j y_i \ (1 \le i, j \le m)\}$$

と定めます. また, $\phi\colon W \to \mathbb{A}^n$ を第一成分の射影 $\phi(x,y) = x$ とおきます. この時, W 又は射 ϕ を $\mathbb{A}^n$ の**中心** C に沿った**爆発**(blowup) と呼びます. $x \in \mathbb{A}^n$ に対し逆像 $\phi^{-1}(x) \subset W$ を考えると, $x \notin C$ の時は $[x_1 : \ldots : x_m] = [y_1 : \ldots : y_m] \in \mathbb{P}^{m-1}$ が定まり $\phi^{-1}(x)$ は 1 点です. $x \in C$ の時は条件が消えるので $\phi^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{P}^{m-1}$ です. よって ϕ は $\mathbb{A}^n \setminus C$ の上で同型です (このように殆どの点で同型な写像を**双有理射**と呼びます). また, $E = \phi^{-1}(C) = C \times \mathbb{P}^{m-1} \cong \mathbb{A}^{n-m} \times \mathbb{P}^{m-1}$ となります. この E を W 又は ϕ の**例外因子**と呼びます.

なお, 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の場合と同様にして爆発 W が多様体になることが分かります. 実際, x_i-chart $U_i = \{(x, y) \in W \mid y_i \neq 0\}$ により $W = \bigcup_{1 \leq i \leq m} U_i$ と書け, 写像 $\psi_i \colon \mathbb{A}^n \to U_i$ を

$$\psi_i(x') = (x'_i \cdot (x'_1, \ldots, x'_{i-1}, 1, x'_{i+1}, \ldots, x'_m), x'_{m+1}, \ldots, x'_n, [x'_1 : \ldots : x'_{i-1} : 1 : x'_{i+1} : \ldots : x'_m])$$

と定めると, ψ_i が同型を与えます. 特に爆発 ϕ の x_i-chart での記述 $\phi \circ \psi_i \colon \mathbb{A}^n \cong U_i \to \mathbb{A}^n$ は $x_j = x'_i x'_j$ $(1 \leq j < i,\ i < j \leq m)$, $x_j = x'_j$ $(j = i,\ m < j \leq n)$ という変数変換で得られます. また $(\phi \circ \psi_i)^{-1}(C) = V(x'_i)$ なので, x_i-chart U_i 上では例外因子は x'_i によって定義されます.

$\phi \colon W \to \mathbb{A}^n$ を非特異な中心 $C \subset \mathbb{A}^n$ に沿った爆発, $V \subset \mathbb{A}^n$ を $\mathbb{A}^n$ の閉集合とします. この時 V の引き戻し $\phi^{-1}(V) = \{P \in W \mid \phi(P) \in V\}$ を V の ϕ による**全変換**$V^* \subset W$ と呼びます. また, $V \setminus C$ の引き戻しの閉包 $\overline{\phi^{-1}(V \setminus C)}$ を V の**狭義変換**$V^{\mathrm{st}} \subset W$ と呼びます (V^*, V^{st} は本講義中のみの用語です). 特に超曲面 $V = V(f)$ の場合, V^* は引き戻し $f^* = f \circ \phi$ によって定義され, V^{st} は f^* から例外因子の定義式を可能な限り括り出して残る式 f^{st} で定義されます.

例 5. 本節冒頭に述べた $V(f = x^2 + x^3 - y^2)$ の原点に沿った爆発を計算で検証します.

U_x 上では $x = x'$, $y = x'y'$ なので $f^* = x'^2 + x'^3 - (x'y')^2 = x'^2(1 + x' - y'^2)$ が $V(f)^*$ を定めます. 例外因子は $V(x')$ ゆえ $f^{\mathrm{st}} = 1 + x' - y'^2$ が $V(f)^{\mathrm{st}}$ を定め, これは非特異です.

U_y 上では $x = x'y'$, $y = y'$ なので $f^* = (x'y')^2 + (x'y')^3 - y'^2 = y'^2(x'^2 + x'^3y' - 1)$ が $V(f)^*$ を定めます. 例外因子は $V(y')$ ゆえ $f^{\mathrm{st}} = x'^2 + x'^3y' - 1$ が $V(f)^{\mathrm{st}}$ を定め, これも非特異です.

以上より $V(f)^{\mathrm{st}} \subset W$ は $W = U_x \cup U_y$ 上で特異点を持たないので, 非特異多様体です.

一般の非特異なアフィン多様体 $C \subset \mathbb{A}^n$ に対し, C に沿った $\mathbb{A}^n$ の爆発が同様に定義できます. アフィン多様体 $V \subset \mathbb{A}^n$ と非特異な閉部分集合 $C \subset V$ に対し, C の $\mathbb{A}^n$ に沿った爆発 ϕ の V^{st} への制限 $\phi|_{V^{\mathrm{st}}} \colon V^{\mathrm{st}} \to V$ を V の C に沿った爆発と呼びます. 一般の多様体の非特異な中心に沿った爆発は, このアフィン多様体の爆発を貼り合わせたものと思えば良いです.

1.4. **特異点解消.** 代数多様体 V の特異点解消の一番簡単な定義は「非特異多様体から V への固有双有理射」ですが, 本講義ではより強く以下のように定義します. 有限回の爆発の列

$$V_r \xrightarrow{\phi_r} V_{r-1} \xrightarrow{\phi_{r-1}} \cdots V_1 \xrightarrow{\phi_1} V_0 = V$$

が以下の条件を満たす時に, V_r 又は写像 $V_r \to V$ を V の**特異点解消**と呼びます.

(1) V_r は非特異多様体,

(2) 各爆発 $\phi_i \colon V_i \to V_{i-1}$ の中心は非特異で V_{i-1} の特異点集合 $\mathrm{Sing}(V_{i-1})$ に含まれる.

アフィン多様体 $V \subset \mathbb{A}^n$ のように V が非特異な多様体の閉集合として含まれている場合は,「全空間の爆発を考え狭義変換を取る操作を繰り返し, 狭義変換を非特異にする」という定式化でも同じです. 例 5 は特異点解消の例になっています.

非特異多様体では各点で座標系が取れ様々な概念がうまく定義されます. そこで特異多様体では特異点解消を通じてそれらを定義します. この意味で特異点解消は大変有用です.

定理 6 (廣中先生)**.** 標数 0 の体上定義された代数多様体は常に特異点解消を持つ.

本講義では, $\mathbb{A}^n$ の超曲面 $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ の場合に限って上記の定理の証明 (正確には Bierstone 氏-Milman 氏, Villamayor 氏らにより簡易化された証明) のアイディアを紹介します.

1.5. **1 章のまとめ.** （スローガンは「武狼圧風なくして解消なし」です）

- 代数多様体: 多項式の共通零点 (アフィン多様体) を貼り合わせた図形.
- 特異点: 接 (超) 平面がちゃんと決まらない点. 重複度や微分で記述できる.
- 爆発: 非特異な中心の点を, 外から近付く方向毎に違う点と思って膨らませる操作.
- V の狭義変換: V の入っている全空間を忘れて V 自体を爆発したもの.
- 特異点解消: 爆発を繰り返して非特異にすること. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上の多様体なら常に可能.

2. 証明の構造

2.1. 証明の方針. $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ を超曲面とします. 目標は, 有限回の爆発の列

$$W_r \xrightarrow{\pi_r} W_{r-1} \xrightarrow{\pi_{r-1}} \cdots W_1 \xrightarrow{\pi_1} W_0 = \mathbb{A}^n$$

であって以下の条件を満たすものを構成する方法を与えることです.

(1) $V_0 = V(f) \subset W_0$, $V_i = V_{i-1}^{\mathrm{st}} \subset W_i$ $(1 \le i \le r)$ とおく. V_r は非特異.
(2) 爆発 $\pi_i \colon W_i \to W_{i-1}$ の中心 $C_{i-1} \subset W_{i-1}$ は非特異で $C_{i-1} \subset \mathrm{Sing}(V_{i-1})$ $(1 \le i \le r)$.

証明の方針を説明します. $V(f)$ 上の重複度の最大値を $m = \max_{P \in V(f)} \mathrm{ord}_P(f)$ とおきます. 常に $m \ge 1$ です. $m = 1$ なら $V(f)$ は非特異なので, $m \ge 2$ なら m が下がっていくように爆発を繰り返せば良い筈です. 単純に考えると重複度の最大軌跡 $V(f, m)$ に沿って爆発すれば良さそうですが, $V(f, m)$ は非特異とは限らないのでこれ自体が中心に取れるとは限りません. そこで, $V(f, m)$ の中でも特に悪い点の集合を決め, 更にその中にもっと悪い点の集合を決める, という操作を繰り返して最終的に爆発の中心となる非特異な集合を決めます. 最終的な悪さの指標となる値を不変量と呼びます. 即ち, 次のような方針を採用します.

V_i の各点 $P \in V_i$ に対し重複度の拡張である**不変量** inv_P を定義し, inv_P の最大軌跡を中心 C_i として爆発 π_{i+1} を定義します. 但し不変量 inv_P には以下の条件を要請します.

(A) 不変量 inv_P の最大軌跡は非特異閉集合になる.

爆発 π_{i+1} で状況が改善していく様子もこの不変量によって測ります. $V_i \setminus C_i$ 上では同型なのでその上では不変量は変わらないことを思い出しましょう. 不変量が更に

(B) $V_{i+1} \ni P_{i+1} \overset{\pi_{i+1}}{\mapsto} P_i \in C_i$ となる時常に $\mathrm{inv}_{P_i} > \mathrm{inv}_{P_{i+1}}$

という条件を満たせば, C_i の定義より V_{i+1} 上の不変量の最大値は V_i の時より小さくなるので爆発する度に不変量が減っていきます. 更に不変量が以下の条件

(C) 不変量 inv_P の値域に最小値 ω が存在して, $P \in V_i$ が非特異点 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{inv}_P = \omega$ が成立. しかも各 V_i 上の最大値の列 $\max\limits_{P \in V_i} \mathrm{inv}_P > \max\limits_{P \in V_{i+1}} \mathrm{inv}_P > \cdots$ は有限回で ω に辿り着く.

を満たせば, 有限回の爆発後に V_i の全ての点が非特異になることが分かります.

最後にやや技術的な条件を述べます. π_j の例外因子の W_i 上の狭義変換を E_j $(j \le i)$ とおくと, 各 E_j が非特異で E_j の定義式達が各点で局所座標の一部をなすこと ($\bigcup_{j \le i} E_j$ の**正規交差性**) が後の議論で必要になります. この性質を保証する為, 以下の条件を課します.

(D) $P \in C_i$ の時 $P \in W_i$ の近傍での局所座標 $(w_1, \ldots, \ldots, w_n)$ が存在して, C_i は幾つかの w_i の共通零点, P を通る E_j 達はそれぞれある w_t の零点, と表示できる.

以下, 上記の条件を全て満たす不変量を定義することを目指します.

2.2. 爆発前の不変量. 不変量の定義を説明する為に, 前節で触れた「$V(f, m)$ の中で特に悪い点の集合」をどう決めるか説明します. 以下 $x = x_1$, $\mathbf{y} = (x_2, \ldots, x_n)$ と略記し,

$$f = x^m + a_1(\mathbf{y})x^{m-1} + \cdots + a_m(\mathbf{y})$$

で超曲面 $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ を定義します. f の形からどの点 $P \in \mathbb{A}^n$ でも重複度 $\le m$ です. さて, $x' = x + \frac{1}{m}a_1$ を x と取りかえて $a_1(\mathbf{y}) = 0$ と仮定しましょう. この時, f は点 $P = (P_x, P_{\mathbf{y}})$ で

$$f(x + P_x, \mathbf{y} + P_{\mathbf{y}}) = (x + P_x)^m + a_2(\mathbf{y} + P_{\mathbf{y}})(x + P_x)^{m-2} + \cdots + a_m(\mathbf{y} + P_{\mathbf{y}}) = x^m + mP_x x^{m-1} + \cdots$$

と展開され, $P_x \neq 0$ ならば $\mathrm{ord}_P(f) < m$ なので $V(f, m) \subset V(x)$ と分かります. これより

$$V(f, m) = V(x) \cap V(a_2, 2) \cap \cdots \cap V(a_m, m)$$

と書けます. 更に $I = \{a_2^{m!/2}, \ldots, a_m^{m!/m}\} \subset k[\mathbf{y}]$ とおくと $\mathrm{ord}_P(a_i) \geq i \Leftrightarrow \mathrm{ord}_P(a_i^{m!/i}) \geq m!$ より

$$V(f,m) = V(x) \cap V(I, m!)$$

と表せます. このように, 特別な非特異超曲面（上の例では $V(x)$）を経由することで, 組 (f,m) の情報が 1 次元低い空間 $V(x)$ 上の組 $(I,m!)$ の情報として書き換えられます. $V(x)$ 上で組 $(I,m!)$ の「重複度の最大軌跡」をとることで「より悪い集合」を定義できます.

一般に, 有限集合 $\{0\} \neq I \subset k[\mathbf{x}]$ と $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ の組 (I,m) に対し, 点 $P \in V(I,m) \subset \mathbb{A}^n$ の近傍で同様の手続きが可能です. 以下にその手続きを説明します.

(1) $\mathrm{ord}_P(I) = \ell$, $\mu_P = \ell/m$ とおきます. $I = \{0\}$ ならここで終了です.
(2) 実は P の近傍の点で I の重複度は常に ℓ 以下です (重複度の**上半連続性**). 特に, P の近傍での I の重複度や μ の最大軌跡は $V(I,\ell)$ となります .
(3) P の近傍での非特異超曲面 $V(I,\ell) \subset H$ を構成します. $\mathrm{ord}_P(I)$ の定義から, $\mathrm{ord}_P(g) = \ell$ となる $g \in I$ があります. 変数 $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, z)$ を線形変換でとり直して $\partial_{z^\ell} g(P) \neq 0$ となるようにできます. この時 $h = \partial_{z^{\ell-1}} g$, $H = V(h)$ とおくと H は P の近傍で非特異で $V(I,\ell) \subset V(g,\ell) \subset V(\partial_{z^{\ell-1}} g, 1) = H$ が成り立ちます.
(4) $u = \partial_z h$ とおくと $u(P) \neq 0$ なので, $(\mathbf{y}, h)$ は P の近傍で局所座標を与えます. $\partial_z = u\partial_h$ より $\partial_{z^i} = u^i \partial_{h^i} + \sum_{j<i} * \partial_{h^j}$ なので $f = \sum_i a_i(\mathbf{y}) h^i$ に対し $(\partial_{z^i} f)|_H = u^i a_i + \sum_{j<i} * a_j$ で

$$H \cap V(f,\ell) = H \cap \bigcap_{0 \leq i < \ell} V(a_i, \ell - i) = H \cap \bigcap_{0 \leq i < \ell} V((\partial_{z^i} f)|_H, \ell - i)$$

が成立. よって $V(I,\ell)$ は H 上の関数を用いて以下のように書けます.

$$V(I,\ell) = H \cap \bigcap_{f \in I} V(f,\ell) = H \cap \bigcap_{f \in I,\ 0 \leq i < \ell} V((\partial_{z^i} f)|_H, \ell - i).$$

(5) 最後に, $m' = \ell!$, $I' = \{(\partial_{z^i} f)^{m'/(\ell - i)}|_H \mid f \in I,\ 0 \leq i < \ell\}$, とおくと $V(I,\ell) = H \cap V(I', m')$ となり, 組 (I,m) の重複度の最大軌跡は H 上の組 (I', m') で記述できます.

以上の手続きを用いて $V_0 = V(f)$ 上の点 P における不変量 inv_P を定義します. W_0 上の組 $(f,1)$ から始めて, P の近傍で μ_P を測り超曲面 H とその上の組 (I,m) を構成する手続きを繰り返します. こうして得られた μ_P の列を $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{\rho-1}, \infty$ とおくと, P での不変量は

$$\mathrm{inv}_P = (\mu_0, 0; \mu_1, 0; \ldots; \mu_{\rho-1}, 0; \infty) \quad (\text{但し } \rho \leq n)$$

という列で定義されます. 偶数成分は「悪い例外因子の個数」なのですが, V_0 上には例外因子がないので全て 0 です. 次節で定義する爆発後の不変量も含め, inv_P 間の大小関係は通常の辞書式順序で入れます. 但し, $\mu_0 = 1$ から始まる列同士は全て等しいと約束します.

例 7. $f = x^2 + y^3 + z^7$ で決まる超平面 $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ の原点 O における不変量を計算します. まず, $\mu_0 = \mathrm{ord}_O(f,1) = 2$. $\partial_{x^2} f(P) = 1$ より $h = \partial_x f = 2x$ ととれ, $H_1 = V(2x) = V(x)$. $V(f,2) = H_1 \cap V(f|_{H_1}, 2) \cap V(2x|_{H_1}, 1) = H_1 \cap V(y^3 + z^7, 2)$. 次に H_1 上の組 $(y^3 + z^7, 2)$ について $\mu_1 = \mathrm{ord}_O(y^3 + z^7, 2) = 3/2$, $H_2 = V(y) \subset H_1$ ととれ, $V(y^3 + z^7, 3) = H_2 \cap V(z^7, 3)$. 同様に H_2 上の組 $(z^7, 3)$ について $\mu_2 = \mathrm{ord}_O(z^7, 3) = 7/3$, $H_3 = V(z) \subset H_2$. $V(z^7, 7) = H_3$ なのでこれで終了となります. よって原点での $V(f)$ での不変量は $\mathrm{inv}_O = (2, 0; 3/2, 0; 7/3, 0; \infty)$. $H_3 = V(x,y,z) = \{O\}$ なので原点近傍での不変量の最大軌跡は $\{O\}$.

2.3. **爆発後の不変量.** 上記の例 7 では $f = x^2 + y^3 + z^7$ の指数 $2,3,7$ から $\mu_0 = 2, \mu_1 = 3/2, \mu_2 = 7/3$ が読み取れます. 原点で爆発して z-chart で見ると $x = z'x', y = z'y', z = z'$ より $f^* = z'^2(x'^2 + z'y'^3 + z'^5)$ なので, 先程と同様に定義すると $\mu'_0 = 2, \mu'_1 = 4/2 > \mu_1$ となって不変量が爆発で増加してしまいます. そこで代りに各 H に制限する度に例外因子 z' を括り出して $f^* = z'^2 \cdot (\underline{x'^2} + z' \cdot (\underline{y'^3} + z'^4 \cdot \underline{1}))$ と見れば, 指数が $2,3,0$ となって爆発後に減少する不変量が定義できそうです. 以下, 爆発後の不変量の定義を与えましょう.

V_j $(0 \le j < i)$ では不変量と爆発が定義されたと仮定して $P \in V_i$ をとります. 以下 $P \in W_i$ の近傍で考えます. P の像を $P' = \pi_i(P) \in V_{i-1}$, $V_i \subset W_i$ の定義式を f_i とおきます. 各爆発 π_j の例外因子の狭義変換 $E_j \subset W_i$ で P を通るもの達を $\mathcal{E}(P) = \{E_j \mid P \in E_j\}$ とおき, $E_j \in \mathcal{E}(P)$ の定義式を e_j とおきます. 以上が状況設定です. さて, P における不変量 inv_P は

$$\mathrm{inv}_P = (\mu_0, s_0; \mu_1, s_1; \dots; \mu_{\rho-1}, s_{\rho-1}; \mu_\rho) \quad (\mu_0, \dots, \mu_{\rho-1} \in \mathbb{Q}_{\ge 0},\ \mu_\rho \in \{0, \infty\},\ s_j \in \mathbb{Z}_{\ge 0},\ \rho \le n)$$

という形です. 前節同様, $H_0 = W_i$ 上の組 $(I_0, m_0) = (f_i, 1)$ から始めて, μ_j, s_j を定める度に超曲面 H_{j+1} とその上の組 (I_{j+1}, m_{j+1}) を定めます. 今回は更に各手続きで $\mathcal{E}(P)$ の部分集合 $\mathcal{E}_P = S_0 \supset S_1 \supset \dots$ も順番に定めます. $\mathrm{inv}_P^{\le t-1} = (\mu_0, \dots, s_{t-1})$ までと $H_t, (I_t, m_t), S_t$ が定義されている時, μ_t, s_t, H_{t+1}, (I_{t+1}, m_{t+1}), S_{t+1} を以下の手続きで定義します.

まず, 上の例で見たように例外因子の寄与を無視して重複度 μ_t を定めます.

(i) $I_t = \{0\}$ なら $\mu_t = \infty$ として終了. $I_t \ne \{0\}$ の時は各 $E_j \in S_t$ に対し e_j^u が I_t の全ての元を割り切る最大の u を u_j と定め, $D_t = \prod_{E_j \in S_t} e_j^{u_j}$, $I^\vee = \{f/D_t \mid f \in I_t\}$, $\ell = \mathrm{ord}_P(I^\vee)$ とおき, $\underline{\mu_t} = \ell/m_t$ と定義します. $\mu_t = 0$ の時も終了. 以下 $0 < \mu_t < \infty$ とします.

次に μ_t の最大軌跡 $(I^\vee, \ell)$ を含む H_{t+1}, それと正規交差をする $S_{t+1} \subset S_t$ 及び悪い因子の数 s_t を定めます. P での $\mathrm{inv}_P^{\le t-1/2} = (\mathrm{inv}_P^{\le t-1}; \mu_t)$ を爆発前 P' での値と比べて場合分けします.

(ii) $\mathrm{inv}_P^{\le t-1/2} = \mathrm{inv}_{P'}^{\le t-1/2}$ の時は $\underline{H_{t+1}} = (P'$ での $H_{t+1})^{\mathrm{st}}$, $S_t \setminus \underline{S_{t+1}} = (P'$での $S_t \setminus S_{t+1})^{\mathrm{st}}$ とおき, $\mathrm{inv}_P^{\le t-1/2} < \mathrm{inv}_{P'}^{\le t-1/2}$ の時は前節の手続きを $(I^\vee, \ell)$ に適用して $H = \underline{H_{t+1}}$ を定め, $S_{t+1} = \emptyset$ とおきます. どちらの場合も $\underline{s_t} = \#(S_t \setminus S_{t+1})$ と定めます. 実は P での局所座標 $(\{e_j \mid j \in S_{t+1}\}, \mathbf{y}, z)$ と $g \in I^\vee$ がとれて $\partial_{z^\ell} g(P) \ne 0$, $H_{t+1} = V(\partial_{z^{\ell-1}} g)$ と書けます.

最後に (μ_t, s_t) の最大軌跡を Z とおくと, $\mathrm{inv}^{\le t-1}$ の最大軌跡が $V(I_t, m_t)$ なので $\mathrm{inv}^{\le t}$ の最大軌跡は $Z' = Z \cap V(I_t, m_t)$ となります. Z' の H_{t+1} 上の記述として (I_{t+1}, m_{t+1}) を定めます.

(iii) $Z = V(I^\vee, \ell) \cap \bigcap_{E_j \in S_t \setminus S_{t+1}} E_j$ と書けます. $Z \subset V(I^\vee, \ell) \subset H_{t+1}$ より前節同様

$$Z \;=\; H_{t+1} \cap \bigcap_{f \in I^\vee,\ 0 \le i < \ell} V((\partial_{z^i} f)|_{H_{t+1}}, \ell - i) \cap \bigcap_{E_j \in S_t \setminus S_{t+1}} V(e_j|_{H_{t+1}}, 1) = V(J(M), M)$$

(但し $J(M) = \{(\partial_{z^i} f)^{M/(\ell-i)}|_{H_{t+1}} \mid f \in I^\vee,\ 0 \le i < \ell\} \cup \{e_j^M|_{H_{t+1}} \mid E_j \in S_t \setminus S_{t+1}\}$)

と表せます. $\mu_t \ge 1$ $(\Leftrightarrow \ell \ge m_t)$ の時は, $Z' = Z$ なので $\underline{m_{t+1}} = \ell!$ とおき, $\underline{I_{t+1}} = J(\ell!)$ と定めます. $\mu_t < 1$ $(\Leftrightarrow \ell < m_t)$ の時は, 実は $Z' = Z \cap V(D_t, m_t - \ell) = Z \cap V(D_t|_{H_{t+1}}, m_t - \ell)$ と書けます. そこで, $\underline{m_{t+1}} = m_t!$ とおき $\underline{I_{t+1}} = J(m_t!) \cup \{D_t^{m_t!/(m_t-\ell)}|_{H_{t+1}}\}$ と定めます.

2.4. **2 章のまとめ.** （不変量の定義が複雑ですがココロを強く持って頑張りましょう）

- 基本戦略: 重複度の一般化である不変量を定め, その最大軌跡での爆発を繰り返す.
- 不変量: E_j 達の寄与を除いた重複度 μ_t の列. 超曲面 H_t を使って帰納的に定義する.
- 正規交差性: 不変量の補正項 s_t で各超曲面 H_t と例外因子の正規交差性を保証する.
- 歴史の利用: 不変量はその点の過去 (爆発前) の不変量も参照して定義される.

3. 不変量の性質

3.1. 不変量の微調整. 爆発の中心は不変量の最大軌跡で定めます. $\mu_\rho = \infty$ の時は inv_P の最大軌跡は H_ρ なのでちゃんと非特異になります. しかし実は $\mu_\rho = 0$ の時は微調整が必要です. この時 H_ρ 上で $\mathrm{ord}_P(I^\vee) = 0$ なので inv_P の最大軌跡は $V(I_\rho, m_\rho) = V(D_\rho, m_\rho)$ となり, $S_\rho = \{E_{j_1}, \ldots, E_{j_\nu}\}$ とおくと $D_\rho = \prod_{\ell=1}^{\nu} e_{j_\ell}^{u_{j_\ell}}$ と書けます. ここでちょっと考えると

$$V(D_\rho, m_\rho) = \bigcup_{L\in\Omega}\bigcap_{\ell\in L} E_{j_\ell},\ \text{但し}\ \Omega = \left\{L \subset \{1, \ldots, \nu\} \mid m_\rho \le \sum_{\ell\in L} u_{j_\ell} < m_\rho + \min_{\ell\in L} u_{j_\ell}\right\}$$

と書けることが分かります. 例えば $V(e_1^3 e_2^2 e_3 e_4^5, 4) = V(e_1, e_2) \cup V(e_1, e_3) \cup V(e_4)$ です. さて, $j_L = \{j_\ell \mid \ell \in L\}$ とおくと $j_L \subset \{1, \ldots, r+1\}$ なのでこの辞書式順序によって $\Gamma(P) := \max_{L\in\Omega} j_L$ (要するにできるだけ小さい j_ℓ が含まれる j_L) と定めます. 上の例では $\Gamma = \{1, 2\}$ です. さて, $\mu_\rho = 0$ となる時は, 組 $(\mathrm{inv}_P; \Gamma(P))$ を改めて inv_P と決め直します. こうしておけば最大軌跡が $H_\rho \cap \bigcap_{j\in\Gamma(P)} E_j$ となりめでたく非特異になります.

3.2. 条件 (A). 不変量 inv_P は $P \in V_i$ の近傍において局所的な非特異超曲面 H_t の上で μ_t, s_t, $\Gamma(P)$ などを定めることで定義されました. これらの関数は全て上半連続 (P の十分近くで見ると P で最大値を取る) という性質を持っているので, inv_P も上半連続になります. このことから inv_P の V_i 上の最大軌跡は閉集合と分かります. 前節で見た通り inv_P の最大軌跡は各点でいつでも非特異と分かっているので, 条件 (A) が成立することが分かります.

3.3. 最大接触超曲面. 関数 g の重複度 m 以上の軌跡が非特異閉集合 C を含むとしましょう. この時, $P \in C$ で $C = V(x_i \mid i)$ となる局所座標 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ をとり $g = \sum_J a_J(\mathbf{y})\mathbf{x}^J$ と展開すると, $|J| < m$ なる J に対し $C \subset V(f, m) \subset V(\partial_{\mathbf{x}^J} g)$ なので $a_J = (\partial_{\mathbf{x}^J} g)|_C = 0$ となります. つまり,

- $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$: 局所座標, $C = V(x_i \mid i) \subset V(g, m)$ とすると, $g = \sum_{|J|\ge m} a_J(\mathbf{y})\mathbf{x}^J$ と表せる.

さて, C に沿った爆発 ϕ を取り, e-chart で見ます ($e \in \mathbf{x}$ とします). $(\mathbf{x}^J)^*$ が $e^{|J|}$ で割り切れるので, g^* は e^m で割りきれます. 更に, $\mathrm{ord}_P(g) = m$ と仮定し, $P' \in \phi^{-1}(P) \subset E$ をとります. この時 $|J| = m$ かつ $a_J(P) \neq 0$ となる J が存在し, $g^{\mathrm{st}} = e^{-m} g^* = \sum_{|J|\ge m} a_J^* \cdot e^{-m}(\mathbf{x}^J)^*$ となります. また, 上のような J のうち $(\mathbf{x}^J)^{\mathrm{st}}$ の次数 (常に m 以下) が最大になる J_0 をとると $\partial_{(\mathbf{x}^{J_0})^{\mathrm{st}}} g^{\mathrm{st}}(P') = \ldots = a_{J_0}(P) \neq 0$ なので, $\mathrm{ord}_{P'} g^{\mathrm{st}} \le m$ です. 以上の議論をまとめると

- $C \subset V(g, m)$, $E = V(e)$ とすると, g^* は e^m で割り切れる. 更に, g の重複度が m 以下なら $g^{\mathrm{st}} = e^{-m} g^*$ と書け, 爆発後の g^{st} の重複度も m 以下となる.

前章の例 $f = x^m + a_2(\mathbf{y})x^{m-2} + \cdots + a_m(\mathbf{y})$ を再考します. この時 $H = V(x)$ と取れて,

$$V(f, m) = H \cap V(a_2, 2) \cap \ldots \cap V(a_m, m) = H \cap V(J, m!), \quad J = \sum_i a_i^{m!/i}$$

と表せました. 中心 $C = V(x, \mathbf{z}) \subset V(f, m)$ (但し $\mathbf{z} \subset \mathbf{y}$) に沿って爆発すると, 上記の考察より $f^{\mathrm{st}} = (x^*/e)^m + a_2^\vee (x^*/e)^{m-2} + \cdots + a_m^\vee$ (但し $a_j^\vee = e^{-j} a_j^*$) と書け, x-/z_j-chart で表示すると

$$U_x\colon f^{\mathrm{st}} = 1 + a_2^\vee(x', \mathbf{y}') + \cdots + a_m^\vee(x', \mathbf{y}'), \quad U_{z_j}\colon f^{\mathrm{st}} = x'^m + a_2^\vee(\mathbf{y}')x'^{m-2} + \cdots + a_m^\vee(\mathbf{y}')$$

です. まず U_x 上で見ます. $C \subset V(a_i, i)$ より $a_i = \sum_{|J|\ge i} *\mathbf{z}^J$, $a_i^\vee = \sum_{|J|\ge i} *\mathbf{z}'^J$ と書けます. 故に $V(z'_j \mid j) = U_x \setminus \bigcup_j U_{z_j}$ 上 $f^{\mathrm{st}}|_{V(z'_j|j)} = 1$ なので $V(f^{\mathrm{st}}) \subset \bigcup_j U_{z_j}$ となります. 一方 U_{z_j} 上では爆発前と同じ形なので $V(f^{\mathrm{st}}, m) \subset V(x')$ となります. よって $V(f^{\mathrm{st}}, m) \subset H^{\mathrm{st}}$ が成立します.

一般に, ある点 P の近傍の非特異局所超曲面 H が「重複度の最大軌跡を含む」という性質を持ち, (重複度が下がらない限り) この性質が狭義変換でずっと保たれる時, H を**最大**

接触超曲面と呼びます. $P \in V(I)$ となる $I \neq \{0\}$ に対し P での最大接触超曲面が常に存在します ($\mathrm{ord}_P(I)$ を達成する I の元を取り, 上の例のような形に変形して証明します).

- (標数 0 では) 最大接触超曲面は常に存在する

実は, 不変量の定義の (ii) で出てきた H_{t+1} は $I^\vee$ の最大接触超曲面であり, 特に H_{t+1} を狭義変換で定義したときに $V(I^\vee, \ell) \subset H_{t+1}$ が成り立つのはこの性質によるものです.

元の例に戻ります. U_{z_j} 上で $H^{\mathrm{st}} = V(x')$ ととると, 爆発前と同様

$$V(f^{st}, m) = H^{\mathrm{st}} \cap V(a_2^\vee, 2) \cap \ldots \cap V(a_m^\vee, m) = H^{\mathrm{st}} \cap V(J', m!), \quad J' = \sum_i (a_i^\vee)^{m!/i}$$

となります. ここで, $J' = \{(e^{-i}a_i^*)^{m!/i} \mid i\} = e^{-m!}J^*$ なので, $(J', m!) = (e^{-m!}J^*, m!)$ となり, 「爆発の操作」と「1 次元低い情報に書き直す操作」がある意味で可換になっています.

実は上記の観察は常に成立します. まず用語を準備します. $C \subset V(I, m)$ での爆発 ϕ を考えると, $I^* = \{f^* \mid f \in I\}$ の元は全て e^m で割りきれました. この時, 組 (I, m) の**弱変換**を $(I, m)^\vee = (\{e^{-m}f^* \mid f \in I\}, m)$, と定義します. すると次が成り立ちます.

- H を I の点 P での最大接触超曲面, $\mathrm{ord}_P(I) = \ell$, $P \in C \subset V(I, \ell)$ とする. また, ϕ を中心 C に沿った爆発, $P' \in \phi^{-1}(P) \cap V((I, \ell)^\vee)$ とする. P で (I, ℓ) に対し前章の (3)~(5) により (I', m') を構成する. 同様に, P' で $(I, \ell)^\vee$ の最大接触超曲面として H^{st} をとり (I'', m'') を構成する. この時, $(I'', m'') = (I', m')^\vee$ となる (つまり, 爆発で重複度が変わらなければ弱変換と次元を下げる手続きの可換性が成立する).

3.4. **条件 (B).** $\mathrm{inv}_{P_i}^{\leq t-1} = \mathrm{inv}_{P_{i+1}}^{\leq t-1}$ だったと仮定します. 区別の為 P_{i+1} での情報に $'$ をつけて表します. 前節の内容から $H_t' = H_t^{\mathrm{st}}$, $(I_t', m_t) = (I_t, m_t)^\vee$ としてよいです. $\mu_t = \ell/m_t$ とおくと, 不変量の定義から $C \subset V(I_t, \ell)$ となります. よって $\mathrm{ord}_{P_{i+1}}(I_t') \leq \ell$ なので $\mu_t' \leq \mu_t$ となります. もし $\mu_t' = \mu_t$ なら $s_t' \leq s_t$ となることは s_t の定義から明らかです. よって, $\mathrm{inv}_{P_{i+1}}^{\leq \rho-1/2} \leq \mathrm{inv}_{P_i}^{\leq \rho-1/2}$ です. これが等しいと仮定しましょう. $\mu_\rho = \infty$ の場合, 爆発の中心 C は $H_1, \ldots, H_\rho$ の定義式 $h_1, \ldots, h_\rho$ によって定まり, 爆発の定義から $V(h_t)^{\mathrm{st}}$ が全て交わる点はありません. 故に $P' \notin V(h_t)$ となる $1 \leq t \leq \rho$ が存在します. この時 $P' \notin H_t^{\mathrm{st}}$ で H_t が I_t^ℓ の最大接触超曲面であることから $\mu_t' < \mu_t$ となり矛盾します. $\mu_\rho = 0$ の場合, 爆発の中心は $h_1, \ldots, h_\rho$ 及び $\{e_j \mid j \in \Gamma(P)\}$ によって定義されます. 上と同じ議論より $P' \in \bigcap_t H_t^{\mathrm{st}}$ でなければ矛盾なので P' はある e_{j_0}-chart の点です. この時 $(D_\rho', m_\rho) = (D_\rho, m_\rho)^\vee$ なので,

$$D_\rho' = e_{j_0}^{-m} D_\rho^* = e_{j_0}^{-m}(\prod_{E_j \in S_\rho} e_j^{u_j})^* = e_{j_0}^{-m+\sum_{E_j \in \Gamma(P)} u_j} \prod_{E_j \in S_\rho \setminus \{E_{j_0}\}} e_j^{u_j}$$

となります. よって, $\Gamma(P)$ の非増加が続けば $\mathrm{ord}(D_\rho)$ が減少していくことが分かるので, $\Gamma(P)$ の後ろに $\mathrm{ord}(D_\rho)$ が隠れていると思うと条件 (B) が成立していると言えます. 因みに $\Gamma(P)$ の減少が続けばいずれ $\mathrm{ord}(D_\rho) < m_\rho$ となるので $\mu_{\rho-1}$ が下がるという仕組みになっています.

3.5. **条件 (C).** $V_i = V(f_i)$ は狭義変換の繰り返しで定義されているので, f_i は e_j ($E_j \in \mathcal{E}(P)$) を因数に持ちません. よって $\mu_0 = \mathrm{ord}_P(f_i)$ です. $P \in V_i$ より常に $\mu_0 \geq 1$ なので, $\mu_0 = 1$ の列 $\mathrm{inv}_P = (1, \ldots)$ (大小関係の入れ方から全て同じ値) が inv_P の値の最小値 ω を与え, これが P での V_i の非特異性に対応します. 故に条件 (C) の前半は成立します. 後半は, まず

- 各 V_i 上で $\{\mathrm{inv}_P \mid P \in V_i\}$ の個数は有限個

であることを示します. 粗筋を書きますと, t についての帰納法で $\mathrm{inv}_P^{\leq t-1}$ が有限個しかないとした時, $\mathrm{inv}_P^{\leq t-1}$ が等しい点 P の集合を有限個の開集合に分け, 各々の上で重複度 μ_t と悪い例外因子の数 $s_t \leq n$ が有限通りしかないということを使って証明します. 更に,

- 爆発で不変量 inv_P が無限回減り続ける点の列 $P \leftarrow P' \leftarrow \cdots$ は存在しない

ことを示します. 実際, 無限に続く列があると仮定すると $\rho \le n$ より $\mathrm{inv}_P^{\le t-1}$ までが等しく (μ_t, s_t) が無限回減り続ける t が存在しますが, $m_t\mu_t = \ell$ が非負整数で m_t が $\mathrm{inv}_P^{\le t-1}$ で決定されてしまうことと s_t も n 以下の非負整数であることより (μ_t, s_t) が無限回減り続けることは不可能です. 以上の二つの主張から $\max_{P\in V_i}$ が無限に減り続けないことが分かります. 常に $\omega \le \max_{P\in V_i}$ なので, いずれ ω に到達します. よって条件 (C) の後半も成立します.

3.6. **条件 (D).** $\mu_\rho = \infty$ の時は $P \in C_i$ の近傍で $C_i = H_\rho$ でした. ここで $E_j \in \mathcal{E}(P) \setminus S_\rho$ とすると $S_0 = \mathcal{E}(P)$ よりある t に対し $E_j \in S_t \setminus S_{t+1}$ なので $H_\rho \subset V(I_{t+1}, m_{t+1}) \subset E_j$ となります. 故に $H_\rho \subset \bigcap_{E_j\in\mathcal{E}_P\setminus S_\rho} E_j$ なので, H_ρ は局所座標の一部 $\{e_j \mid E_j \in \mathcal{E}_P \setminus S_\rho\} \cup \mathbf{y}$ で定義されます. また, $H_\rho \cup \bigcup_{E_j\in S_\rho} E_j$ が正規交差であったことから, $\{e_j \mid E_j \in \mathcal{E}(P)\} \cup \mathbf{y}$ を補完して局所座標が取れます. $\mu_\rho = 0$ の時もほぼ同様です. よって条件 (D) が成立します.

3.7. **良定義性.** 以上で, 具体的に特異点の解消を計算する為の手順と仕組みを大体理解して頂けたと思います. 本講義では割愛しましたが, 証明を完成する為には更に不変量 inv_P が H_t 達の取り方に依存しないこと (**良定義性**) を示す必要があります. この部分は当初 “Hironaka’s trick” と呼ばれる難解な手法を必要とし特異点解消の証明の最難関でしたが, Włodarczyk 氏が homogenization というアイディア（H_t の取り替えによる局所同型でうまく振る舞うように (I_t, m_t) を微分で少し太らせる）を導入して大幅な簡易化を与えました.

3.8. **正標数の場合.** 一般に, 体 k に対し $\mathbb{Z} \supset K = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \cdot 1_k = 0_k\}$ とおくと, K が c の倍数全体と一致するような非負整数 $c \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ が存在します. この c を k の標数と呼びます. 標数は上の定義から 0 又は素数になります. 正の標数 $p > 0$ の体上でも代数幾何学は盛んに研究されていますが, 特異点解消は 4 次元以上では未解決です. 一番の困難は微分が役に立たず (例えば $(x^p)' = px^{p-1} = 0$ です), 最大接触超曲面が必ずしも存在しないことです.

例 8 (R. Narasimhan)**.** k を標数 2 の代数閉体とし, $f = x^2 + yz^3 + zw^3 + wy^7$ で定まる超平面 $V(f) \subset \mathbb{A}_k^4$ を考えると, $V(f)$ は原点 O で最大接触超曲面を持ちません. 実際

$$V(f, 2) = V(f, \partial_x f, \partial_y f, \partial_z f, \partial_w f) = V(f, z^3 + wy^6, yz^2 + w^3, zw^2 + y^7)$$

が f の O での重複度の最大軌跡となり, この中に以下のパラメーター表示を持つ曲線

$$C = \{(x, y, z, w) = (t^{32}, t^7, t^{19}, t^{15}) \mid t \in k\} \subset V(f, 2)$$

が含まれます (代入してみて下さい). よって f の O での最大接触超曲面 $H = V(h(x, y, z, w))$ が存在すると仮定すると $H \supset C$ 即ち $h(t^{32}, t^7, t^{19}, t^{15}) \equiv 0$ です. 一方, h は非特異なので $\mathrm{ord}_O(h) = 1$ 即ち h の O での巾級数展開には 1 次の項 ($\neq 0$) が現れます. 故に結局 $\{t^{32}, t^7, t^{19}, t^{15}\}$ のうちどれか一つが残りを使った積で表されることになり矛盾が生じます.

3.9. **参考文献.** 最後に参考文献を少しだけ紹介します. 今回の講義と一番近い内容の文献は Bierstone 氏と Milman 氏の論説 “Resolution of Singularities” です. 例に即して説明してあり, `http://arxiv.org/abs/alg-geom/9709028` から入手可能です. 但しここでの良定義性の証明は古いです. 新しい証明に関しては Włodarczyk 氏 の論文 “Simple Hironaka resolution in characteristic zero” (`http://arxiv.org/abs/0401401`) などを御参照下さい. 特異点解消についての教科書は洋書だと Kóllar 氏の “Lectures on Resolution of Singularities” (ISBN: `0691129231`) ほか幾つかありますが, 和書では残念ながらまだ無いようです.

3.10. **3 章のまとめ.** （実は超曲面以外の場合の特異点解消もほぼ同様に証明できます）

- $\mu_\rho = 0$ の時は最大軌跡の既約成分を指定するために補助的な不変量 Γ を導入.
- 本当は良定義性の証明が必要ですが, まずは気にせず例を計算しましょう.
- 最大接触超曲面が標数 0 の不変量構成の鍵. 正標数では一般に存在しません.
- 廣中先生は今年で傘寿. まだ最先端で研究をされています. さすがです.