無限の対称性をめぐって

荒川知幸

1. はじめに

次は **Eueler の五角数定理**と呼ばれる公式です.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}. \tag{1}$$

次は **Jacobi の三重積公式**と呼ばれる公式です.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-uq^{n-1})(1-u^{-1}q^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m u^m q^{\frac{m(m-1)}{2}} \tag{2}$$

Euler の五角数定理や Jacobi の三重積公式のように

$$\text{無限積} = \text{無限和}$$

の公式は, 無限次元のベクトル空間に潜む**無限の対称性**から現れることが良くあります. 数学では対称性は群やリー環などの代数系を用いて記述されることが多いですが, 無限の対称性は無限群や無限次元のリー環によって表されます. 例えば上の二つの公式の場合は無限次元リー環の表現論を用いて理解する事ができます. そこでこの講義では無限次元 Lie 環の表現論の立場からこの種の現象がどのようにして起こるかについてお話ししたいと思います[1].

2. 慣らし運転: 摩耶図形, Young 図形とフェルミオンフォック空間

2.1. 摩耶図形, 写像

$$m : \mathbb{Z} \to \{\circ, \bullet\}$$

であって

$$m(i) = \bullet \quad (i \gg 0), \quad m(i) = \circ \quad (i \ll 0)$$

を満たすものを摩耶図形と呼びます [佐 89]. $\mathcal{M}$ を摩耶図形全体のなす集合とし, $\bigwedge$ を $\mathcal{M}$ の元を基底とするベクトル空間とします:

$$\bigwedge = \bigoplus_{m\in\mathcal{M}} \mathbb{C}m.$$

$\bigwedge$ は勿論無限次元のベクトル空間になります.

[1] 勿論この種の等式が無限次元リー環の唯一の魅力というわけではありませんが...

2.2. **摩耶図形と無限変数のグラスマン代数.** 多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ は生成元 $x_1, \ldots, x_n$ と関係式

$$[x_i, x_j] = 0 \quad (\forall i, j) \tag{3}$$

を持つ代数ですが, (3) を次の関係式

$$\{x_i, x_j\} = 0 \quad (\forall i, j) \tag{4}$$

に変えた代数を n 変数のグラスマン代数と云い, $\bigwedge(x_1, \ldots, x_n)$ と書きます. ここで,

$$[A, B] = AB - BA, \quad \{a, b\} = ab + ba. \tag{5}$$

したがって (4) は

$$x_i^2 = 0, \quad x_i x_j = -x_j x_i$$

と同値です. これより, 多項式環とは異なりグラスマン代数はベクトル空間としては有限次元です[2].

例 2.1. (i) 1 変数 ψ を持つグラスマン代数 $\bigwedge(\psi)$ は基底 $1, \psi$ を持つ.
(ii) 2 変数 ψ_{-1}, ψ_{-2} を持つグラスマン代数 $\bigwedge(\psi_{-1}, \psi_{-2})$ は基底 $1, \psi_{-1}, \psi_{-2}, \psi_{-1}\psi_{-2}$ を持つ.

命題 2.2. ベクトル空間として $\bigwedge$ は無限変数を持つグラスマン代数

$$\bigwedge(\psi_{-1}, \psi_{-2}, \ldots, \psi_0^*, \psi_{-1}^*, \ldots)$$

に同型である.

$\bigwedge$ を**フェルミオンフォック空間**と云い, $1 \in \bigwedge$ を真空ベクトルと呼びます. 命題 2.2 の同型により $\bigwedge$ の元である各摩耶図形は真空ベクトルに ψ_i, ψ_j^* たちを何回か作用させたベクトル

$$\psi_{-i_1}\psi_{-i_2}\ldots,\psi_{-i_r}\psi_{-j_1}^*\psi_{-i_1}\ldots\psi_{-j_s}^* 1 \quad (r, s \geq 0,\ i_1, \ldots, i_r \geq 1,\ j_1 \ldots j_s \geq 0).$$

と同一視することができます.

フェルミオンという言葉は物理のフェルミ粒子から来ています. ψ_i $(i \geq 1), \psi_j^*$ $(j \geq 0)$ はフェルミ粒子の生成演算子に対応します. 物理では生成演算子だけではなく消滅演算子も使いますがこれは後から登場します.

2.3. **フェルミオンフォック空間の指標.** 真空ベクトル 1 は基底状態を表すと思い, エネルギー, 電荷が共に 0 であると思いましょう. また

$$\psi_{-i} \text{ はエネルギーを } i \text{ 上げ, 電荷を 1 下げる}$$
$$\psi_{-i}^* \text{ はエネルギーを } i \text{ 上げ, 電荷を 1 上げる}$$

作用素だと思いましょう. 例えば $\psi_{-1}\psi_{-2}\psi_0^*$ はエネルギー 3, 電荷 -1 を持つことになります. これにより定まる摩耶図形 $m \in \mathcal{M}$ のエネルギーと電荷をそれぞれ $e(m)$, $c(m)$ と書くことにします.

補題 2.3.

$$e(m) = \sum_{\substack{i \geq 0 \\ m(i) = \circ}} i - \sum_{\substack{i < 0 \\ m(i) = \bullet}} i, \quad c(m) = \sum_{\substack{i \geq 0 \\ m(i) = \circ}} 1 - \sum_{\substack{i < 0 \\ m(i) = \bullet}} 1.$$

---

[2]もちろん, 変数が無限個の場合はこの限りではありません.

平成24年度(第34回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 平成24年7月30日～8月2日開催)

補題 2.4. $m \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $m[n] \in \mathcal{M}$ を $m[n](i) = m(i-n)$ で定める. このとき

$$e(m[n]) = e(m) + nc(m) + \frac{n(n-1)}{2}, \quad c(m[n]) = c(m) + n$$

が成立する.

$\bigwedge_{d,m}$ をエネルギー d, 電荷 m を持つ摩耶図形で張られる $\bigwedge$ の部分空間とします. すると,

$$\bigwedge = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \bigoplus_{m-\infty}^{\infty} \bigwedge_{d,m} \tag{6}$$

となります. 従って $\bigwedge$ の (形式) **指標**$\mathrm{ch} \bigwedge$ を

$$\mathrm{ch} \bigwedge = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\dim \bigwedge_{d,m} \right) z^m q^d$$

で定義することができます.

命題 2.5.

$$\mathrm{ch} \bigwedge = \prod_{n \geq 1} (1 + zq^{n-1})(1 + z^{-1} q^n).$$

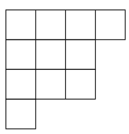
2.4. **フェルミオンフォック空間と Jacobi の３重積公式.** (2) で $z = -u$ とおいて両辺を $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ で割ることにより, Jacobi の三重積公式は次の式

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + zq^{n-1})(1 + z^{-1} q^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{z^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)} \tag{7}$$

と等価であることがわかります. 従って命題 2.5 より, $\bigwedge$ の指標が (7) の右辺の形でも表されることを示すことができれば Jacobi の３重積公式が証明できた事になります. これは以下に述べるように摩耶図形と Young 図形の関係を見る事によって可能になります.

2.5. **Young 図形.** 非負整数の減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots,)$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq 0$ が n の分割であるとは, $\sum_i \lambda_i = n$ を満たすことをいいます. このとき, $\lambda \vdash n$ と書きます. 以下 Y_n で n の分割全体の集合を表します. Y_n は箱の総数が n 個の Young 図形の集合と同一視することができます.

例 2.6. $\lambda = (4,3,3,1) \vdash 11$ に対応する Young 図形は



Y を Young 図形全体の集合とします.

$$Y = \bigsqcup_{n \geq 0} Y_n.$$

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots,) \in Y$ について $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ とおきます.

2.6. **摩耶図形と Young 図形.** 摩耶図形 $m \in \mathcal{M}$ に対して $\circ$ に対して $\uparrow$ を, $\bullet$ に対して $\rightarrow$ を対応させ左から ($m(i)$ の添字 i が小さい方から) つなげて書いていくことにより折れ線グラフを書く事ができます. この折れ線グラフに現れる Young 図形を $\lambda(m)$ とします.

例 2.7. m を $\psi_{-3}\psi_{-2}\psi^*_{-4}\psi^*_0$ に対応する摩耶図形とすると $\lambda(m)=(5,2,2)$.

定理 2.8. 対応 $m \mapsto (c(m), \lambda(m))$ は全単射写像

$$\phi : \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \times Y$$

を与える. さらに,

$$c(\phi^{-1}(m,\lambda)) = m, \quad e(\phi^{-1}(m,\lambda)) = |\lambda| + \frac{m(m-1)}{2}$$

が成立する.

補題 2.9. $|q|<1$ で次が成立する.

$$\sum_{\lambda \in Y} q^{|\lambda|} = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1-q^n}.$$

定理 2.8, 補題 2.9 より

$$\mathrm{ch} \bigwedge = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^m \sum_{\lambda \in Y} q^{|\lambda| + \frac{m(m-1)}{2}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{z^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)}$$

が従います. 以上より Jacobi の 3 重積公式を証明することができました.

問題 2.10. $\phi^{-1}(m,\phi)$ は定数倍を除いて次のベクトルに等しい事を示せ.

$$\begin{aligned} \psi_m \psi_{m+1} \dots \psi_{-1} 1 \quad & (m<0 \text{ のとき}), \\ 1 \quad & (m=0 \text{ のとき}), \\ \psi^*_{-m+1}\psi^*_{-m+2} \dots \psi^*_0 1 \quad & (m>0 \text{ のとき}), \end{aligned}$$

3. ボゾン・フェルミオン対応

以下では前節の Jacobi の 3 重積公式の証明の表現論的意味付けを与えます.

3.1. **Lie 環.** $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ が次の構造を持つとき Lie 環と呼びます: ブラケット積と呼ばれる $\mathbb{C}$ 上の双線形写像

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{g} \\ (x,y) & \mapsto & [x,y] \end{array}$$

であって

$$[x,y] = -[y,x],$$
$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

を満たすものが存在する.

例 3.1. $n \times n$ 行列全体の集合に行列の積を用いて $[A,B] = AB - BA$ と定義したものは Lie 環になります. これを $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ と書きます.

例 3.2. V を (有限次元とは限らない) ベクトル空間とし, $\mathfrak{gl}(V)$ を V から V への線形写像全体の集合とします. このとき, 写像の合成を用いて $[f,g] = f \circ g - g \circ f$ と定義すると $\mathfrak{gl}(V)$ は Lie 環になります. (勿論, $\dim V = n < \infty$ のとき $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ です.)

平成24年度(第34回)数学入門公開講座テキスト(京都大学数理解析研究所, 平成24年7月30日～8月2日開催)

例 3.3. 任意の $\mathbb{C}$ 代数 A はブラケット積 $[x, y] = xy - yx$ により Lie 環になります.

例 3.4. (無限次元の) ベクトル空間

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} b_n \oplus \mathbb{C} c$$

に交換関係

$$[b_m, b_n] = m\delta_{m+n,0} c, \quad [c, b_m] = 0$$

で Lie 環の構造を入れたものを **Heisenberg 代数**と云います.

問題 3.5. 例 3.4 により $\mathcal{H}$ に Lie 環の構造が入る事を確かめよ.

3.2. **Lie 環の表現.** Lie 環 $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への Lie 環としての準同型

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V), \quad [\pi(x), \pi(y)] = \pi([x, y]) \quad (x, y \in \mathfrak{g})$$

を $\mathfrak{g}$ の V 上の表現と云います[3]. あるい V は $\mathfrak{g}$ 加群であると云います. またしばしば写像 π を省略して $\pi(x)v = xv$ と書きます. $\mathfrak{g}$ の表現 V の部分ベクトル空間 W で $xw \in W$ ($x \in \mathfrak{g}$, $w \in W$) が成立するものを V の部分表現と呼びます. 特に自明, すなわち $\{0\}$ と V 以外に部分表現空間を持たないときその表現は**既約**であると云われます.

補題 3.6. *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ の表現 V に対し, 次の二つの条件は同値.

(i) V は既約である.
(ii) V は $\mathfrak{g}$ 上任意の非零なベクトル $v \in V$ によって生成される.

例 3.7. ベクトル空間 V は自然に Lie 環 $\mathfrak{gl}(V)$ の表現になりますが, これは既約表現です.

$\{x_i; i \in I\}$ を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の基底としたとき, $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ が生成元 $\{x_i; i \in I\}$, 関係式

$$x_i x_j - x_j x_i = [x_i, x_j] \tag{8}$$

を持つ $\mathbb{C}$ 代数として定義されます. $\mathfrak{g}$ 加群とは, $\mathbb{C}$ 代数としての $U(\mathfrak{g})$ 加群に他なりません.

次の事実が知られています.

命題 3.8. *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ に対し, 部分 *Lie* 環 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ が存在し, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ となるとき, 積写像はベクトル空間としての同型 $U(\mathfrak{g}_1) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}_2) \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{g})$ を与える.

例 3.9. 基底 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を持つベクトル空間 V を可換な Lie 環とみなしたとき,

$$U(V) \cong \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots x_n]$$

となる.

[3] Lie 環の表現論の標準的な教科書は [Hum72] です.

3.3. **ボゾンフォック空間.**

命題 3.10. $m \in \mathbb{C}$ が与えられたとき, 無限変数の多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots,]$ は次で $\mathcal{H}$ の表現になる.

$$b_{-n} \mapsto x_n \quad (n > 0), \quad b_0 \mapsto m, \quad b_n \mapsto n\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad c \mapsto 1$$

以下, 命題 3.10 によって定まる表現を B_m と書き, $1 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ に対応する B_m の元を $|m\rangle$ と書きます. これを**ボゾンフォック空間**と云います. $\mathcal{B}_m$ は $\mathcal{H}$ の不変包絡環を用いて次のように表す事もできます.

$$\mathcal{B}_m \cong U(\mathcal{H})/I_m, \quad \text{ただし } I_m = U(\mathcal{H})(b_0 - m) + U(\mathcal{H})(c-1) + \sum_{n>0} U(\mathcal{H})b_n.$$

命題 3.11. 任意の $m \in \mathbb{C}$ について表現 $\mathcal{B}_m$ は $\mathcal{H}$ の既約表現である.

Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in Y$ に対し $p_\lambda \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ を

$$p_\lambda = x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_n}$$

と定義します. すると $\{p_\lambda; \lambda \in Y\}$ は $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ の基底になります. したがって次が成立します.

補題 3.12. $\{p_\lambda|m\rangle; \lambda \in Y\}$ は B_m の基底を成す.

定理 2.8 と補題 3.12 はフェルミオンフォック空間 $\bigwedge$ の中にハイゼンベルグ代数 $\mathcal{H}$ の作用が隠れていることを示唆しています.

3.4. **スーパー Lie 環.** $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で次数付けされたベクトル空間 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} + \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ がスーパー Lie 環であるとは, $\mathbb{C}$ 上の双線形写像

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g} \\ (x, y) & \mapsto & [x, y] \end{array}$$

であって

$$[\mathfrak{g}_{\bar{i}}, \mathfrak{g}_{\bar{j}}] \subset \mathfrak{g}_{\overline{i+j}}$$

が成立し, さらに

$$[x, y] = -(-1)^{ij}[y, x], \quad (x \in \mathfrak{g}_{\bar{i}},\ y \in \mathfrak{g}_{\bar{j}})$$
$$(-1)^{ki}[x, [y, z]] + (-1)^{jk}[y, [z, x]] + (-1)^{ij}[z, [x, y]] = 0 \quad (x \in \mathfrak{g}_{\bar{i}}, y \in \mathfrak{g}_{\bar{j}}, z \in \mathfrak{g}_{\bar{k}})$$

を満たすものが存在することを云います.

スーパー Lie 環に対しても普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ が関係式 (8) を

$$x_i x_j - (-1)^{|x_i||x_j|} x_j x_i = [x_i, x_j]$$

に変えることにより定義されます. $\mathfrak{g}$ の表現も同様に定義されます.

例 3.13. 基底 $\psi_1, \ldots, \psi_n$ を持つベクトル空間 V を $V_{\bar{0}} = \{0\}$, $V_{\bar{1}} = V$, $[x, y] = 0$ $(\forall x, y \in V)$ によりスーパー Lie 環とみなすと

$$U(V) \cong \bigwedge(\psi_1, \ldots, \psi_n).$$

例 3.14. V, W をベクトル空間, $V \times W \to \mathbb{C}$, $(v, w) \mapsto (v|w)$ を双線形写像とします. このとき,

$$\mathfrak{g} = \mathbb{C} \oplus (V \oplus W), \quad \mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathbb{C}, \qquad \mathfrak{g}_{\bar{1}} = V \oplus W$$

は次でスーパー Lie 環の構造が入ります.

$$[x, y] = (x|y), \quad (x \in V, y \in W), \quad [x, x'] = [y, y'] = 0 \quad (x, x' \in V, y, y' \in W),$$
$$[k, x] = 0 \quad (k \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathbb{C}, x \in \mathfrak{g}).$$

このスーパー Lie 環の普遍包絡環を $\mathcal{C}l(V \oplus W)$ と書き, **クリフォード代数**と呼びます. 命題 3.8 より,

$$\mathcal{C}l(V \oplus W) \cong U(\mathbb{C}) \otimes U(V) \otimes U(W) \cong U(V) \otimes U(W)$$

が成立しますが, 例 3.14 より $U(V)$, $U(W)$ はグラスマン代数に他なりません.

例3.14 において, V, W をそれぞれ $\{\psi_i (i \leq -1),\ \psi_j^*, (j \leq 0)\}$, $\{\psi_i (i \geq 0),\ \psi_j^*, (j \geq 1)\}$ を基底とする (無限次元の) ベクトル空間とし, 双線形写像 $V \times W \to \mathbb{C}$ を

$$(\psi_i | \psi_j^*) = (\psi_i^* | \psi_j) = \delta_{i+j,0}$$

で定め, これに対応する Clifford 代数を $\mathcal{C}l$ と書きます. $\mathcal{C}l$ は次の生成元と関係式を持つ代数となります.

生成元: $\psi_i \quad (i \in \mathbb{Z}), \quad \psi_j^* \quad (j \in \mathbb{Z})$

関係式: $\{\psi_i, \psi_j^*\} = \delta_{m+n,0}, \quad \{\psi_i, \psi_j\} = \{\psi_i^*, \psi_j^*\} = 0.$

このとき

$$\bigwedge(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_1^*, \psi_2^*, \ldots) \otimes \bigwedge(\psi_{-1}, \psi_{-2}, \ldots, \psi_0^*, \psi_{-1}^*, \ldots) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}l$$

となりますので前節に登場したフェルミオンフォック空間 $\bigwedge$ について次が成立します.

$$\bigwedge \cong \mathcal{C}l / (\sum_{i \geq 0} \mathcal{C}l \psi_i + \sum_{j > 0} \mathcal{C}l \psi_j^*) \tag{9}$$

同型 (9) により $\bigwedge$ には Clifford 代数の表現になります. この作用は部分代数である $\bigwedge(\psi_{-1}, \psi_{-2}, \ldots, \psi_0^*, \psi_{-1}^*, \ldots)$ の $\bigwedge$ への作用の拡張したものになっています.

注意 3.15.

$$\psi_i 1 = 0 \quad (i \geq 0), \quad \psi_j^* 1 = 0 \quad (j > 0)$$

が成立しますので ψ_i $(i \geq 0)$, ψ_j^* $(j > 0)$ は消滅演算子であると云われます.

命題 3.16. $\bigwedge$ は $\mathcal{C}l$ の既約表現である.

3.5. **フェルミオンフォック空間へのハイゼンベルグ代数の作用.** ψ_i, ψ_j^* たちの母関数を

$$\psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n z^{-n-1}, \quad \psi^*(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n^* z^{-n}$$

で定義します. これらは $(\mathrm{End} \bigwedge)[[z, z^{-1}]]$ の元であると理解します. ここでこれらの積 $\psi(z)\psi^*(z)$ を考えたいのですが, これは $(\mathrm{End} \bigwedge)[[z, z^{-1}]]$ の元として well-defined ではありません. ($\psi(z)\psi^*(z)v$ には無限和が発生してしまいます.) そこで発散を繰込むため, 次の正規積を考えます.

$$: \psi_i \psi_j^* : \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \psi_i \psi_j^* & (i < 0), \\ -\psi_j^* \psi_i & (i \geq 0). \end{cases}$$

すると,

$$:\psi(z)\psi^*(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} :\psi_k \psi^*_{n-k}: \right) z^{-n-1}$$

は $\bigwedge$ 上の作用素として well-defined になります.

命題 3.17. 対応

$$b(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^{-n-1} \mapsto :\psi(z)\psi^*(z):,$$
$$c \mapsto 1$$

は $\mathcal{H}$ の $\bigwedge$ 上の表現を与える.

補題 3.18. $m \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathcal{B}_m \ni |m\rangle$ に対して次のベクトルを対応させる $\mathcal{H}$ 加群の埋め込み $\mathcal{B}_m \hookrightarrow \bigwedge$ が存在する:

$$\begin{aligned} \psi_m \psi_{m+1} \dots \psi_{-1} 1 \quad & (m < 0 \text{ のとき}), \\ 1 \quad & (m = 0 \text{ のとき}), \\ \psi^*_{-m+1} \psi^*_{-m+2} \dots \psi^*_0 1 \quad & (m > 0 \text{ のとき}). \end{aligned}$$

定理 3.19 (ボゾンフェルミオン対応)**.** $\mathcal{H}$ 加群としての次の同型が存在する.

$$\mathcal{H} \cong \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{B}_m.$$

注意 3.20. 定理 2.8 を使わなくても頂点作用素と呼ばれる作用素を使って右辺の空間にクリフォード代数の作用を直接定義することによって定理 3.19 を証明する事ができます (例えば [FBZ04, 5.3.2] を参照).

4. アフィンリー環と Virasoro 代数

この節では Jacobi の三重積公式がアフィンリー環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現論からも現れることを見ます. アフィンリー環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ を Virasoro 代数と呼ばれる無限次元リー環に変えることにより, Euler の五角数定理も現れます.

4.1. $\mathfrak{sl}_2$ の表現論.

$$\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}); \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

とします. $\mathfrak{sl}_2$ は基底

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と関係式

$$[h, e] = 2e, \quad [e, f] = h, \quad [h, f] = -2f \tag{10}$$

を持つ 3 次元の Lie 環になります.

命題 4.1. $\lambda \in \mathbb{C}$ について, 次は $\mathfrak{sl}_2$ の $V = \mathbb{C}[x]$ 上の表現を与える:

$$\pi_\lambda(e) = \frac{d}{dx}, \quad \pi_\lambda(h) = -2x\frac{d}{dx} + \lambda, \quad \pi_\lambda(f) = -x^2\frac{d}{dx} + \lambda x.$$

$\mathbb{C}[x]$ は基底 $1, x, x^2, x^3, \ldots$ を持ちますが, この基底への e, h, f の作用は次のようになります.

(11)

$$\pi_\lambda(e)(x^n) = nx^{n-1}, \quad \pi_\lambda(h)(x^n) = (\lambda - 2n)x^n, \quad \pi_\lambda(f)(x^n) = (\lambda - n)(x^{n+1})$$

このことから次が分かります.

命題 4.2. (i) λ が非負整数でないとき π_λ は $\mathfrak{sl}_2$ の既約表現である.

(ii) λ が非負整数のとき π_λ は有限次元部分表現

$$L(\lambda) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{1, x, x^2, \ldots, x^\lambda\}$$

を持つ. $L(\lambda)$ は $\mathfrak{sl}_2$ の既約表現である.

定理 4.3. 対応 $\lambda \mapsto L(\lambda)$ は非負整数全体の集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元既約表現の同型類との間に一対一対応を与える.

(11) から h は $L(\lambda)$ に半単純に作用していることが分かります:

$$L(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{C}} L(\lambda)_\mu, \quad L(\lambda)_\mu = \{v \in L(\lambda); hv = \mu v\}.$$

そこで $L(\lambda)$ の形式指標 $\mathrm{ch}\, L(\lambda)$ を次で定義することができます.

$$\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \sum_{\mu \in \mathbb{C}} (\dim L(\lambda)_\mu) e^\mu. \tag{12}$$

(11) より,

$$\mathrm{ch}\, L(\lambda) = e^\lambda + e^{\lambda-2} + \cdots + e^{-\lambda+1} + e^{-\lambda} = \frac{e^{\lambda+1} - e^{-\lambda-1}}{e - e^{-1}}. \tag{13}$$

となります. (13) より $\mathrm{ch}\, L(\lambda)$ は変換 $e \mapsto e^{-1}$ に対して不変ですが, これは次の様に理解する事ができます.

$V(\lambda)$ は有限次元表現ですので $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の $L(\lambda)$ への作用は指数写像によって $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ のリー群 $SL(2, \mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}); \det X = 1\}$ の作用に持ち上がります. 特に

$$s := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \exp(f)\exp(-e)\exp(f)$$

が $L(\lambda)$ に作用しますが, 関係式

$$s^2 = -I, \quad sh = -hs$$

が成立しますので s は同型

$$L(\lambda)_\mu \xrightarrow{\sim} L(\lambda)_{-\mu} \tag{14}$$

を誘導します.

4.2. **単純リー環の表現論.** $\mathfrak{g}$ を有限次元単純リー環とします. 例えば

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}); \mathrm{tr}(X) = 0\}$$

は A_{n-1} 型の単純リー環です. $\mathfrak{g}$ の三角分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+, \tag{15}$$

Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を固定します．$\mathfrak{sl}_{\mathfrak{n}}(\mathbb{C})$ の場合, $\mathfrak{h}$ を対角行列からなる部分リー環, $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$ をそれぞれ狭義の上三角行列, 下三角行列全体のなす部分リー環ととるのが標準的です．$\mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{h}$ の双対空間, $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{g}$ のルートの集合,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

を $\mathfrak{g}$ のルート分解とします． このとき分解 $\Delta = \Delta_+ \sqcup (-\Delta_+)$ が存在し, $\mathfrak{n}_\pm = \bigoplus_{\alpha\in\pm\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ が成立します．Δ_+ の元を正ルートと呼びます．$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の場合, $\alpha_{i,j} \in \mathfrak{h}^*$ を

$$\alpha_{i,j}(\sum_{r=1}^n h_r E_{rr}) = h_i - h_j$$

で定めると，$\Delta = \{\alpha_{i,j}; 1 \le i \ne j \le n\}$, $\Delta_+ = \{\alpha_{i,j}; 1 \le i < j \le n\}$, $\mathfrak{g}_{\alpha_{i,j}} = \mathbb{C}E_{ij}$ となります．ここで E_{ij} は i 行 j 列のみ 1 で他は 0 である行列です．W を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群とします．これは

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - (\lambda, \alpha^\vee)\alpha \tag{16}$$

で生成される $\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}^*)$ の部分群です．ここで $(\ |\ )$ は $\mathfrak{g}$ の不変内積, $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha|\alpha)$. $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の場合, $(x|y) = \mathrm{tr}(xy)$ ととることができ, W は n 次対称群 S_n と同型になります．

定義 4.4. $\mathfrak{g}$ の表現 V に次を満たすベクトル v が存在するとき, V は**最高ウエイト表現**であると云います:

(i) $\mathfrak{n}_+ v = 0$,
(ii) $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が存在して $hv = \lambda(h)v$ $(\forall h \in \mathfrak{h})$,
(iii) $V = U(\mathfrak{g})v$.

このとき λ を V の最高ウエイト, v を最高ウエイトベクトルと云います．命題 3.8, (15) より $V = U(\mathfrak{n}_-)v$ となります．

補題 4.5. $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して, 最高ウエイト λ の最高ウエイト既約表現 $L(\lambda)$ が同型を除いて唯一存在する．

$L(\lambda)$ を最高ウエイト λ の既約表現と云います．
$\mathfrak{g}$ の支配的整ウエイトの集合で P_+ を次で定めます．

$$P_+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*; \lambda(\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\ \forall \alpha \in \Delta_+\}.$$

定理 4.6. 対応 $\lambda \mapsto L(\lambda)$ は P_+ と $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現の同型類の間の一対一対応を与える．

$\mu \in \mathfrak{h}^*$ について

$$L(\lambda)_\mu = \{v \in L(\lambda); hv = \mu(h)v\ \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

とおくと, $L(\lambda)$ は $L(\lambda)_\mu$ 達の直和になります ($L(\lambda)_\mu$ をウエイト μ のウエイト空間と言います). そこで $L(\lambda)$ の形式指標を

$$\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \sum_{\mu\in\mathfrak{h}^*} (\dim L(\lambda)_\mu) e^\mu$$

定義します．すると,$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の場合と同様, 有限次元既約表現の指標は $\mathfrak{g}$ の Weyl 群 W の作用で不変であることがわかります．このことから, 次の Weyl の指標公式が導かれます．

定理 4.7 (Weyl)**.** $\lambda \in P_+$ について次が成立する.

$$\mathrm{ch}\, L(\lambda) = \frac{\sum_{w \in W} e(w) e^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})}.$$

特に $\lambda = 0$ の場合を考えてみましょう. このとき $L(\lambda)$ は $\mathfrak{g}$ の自明表現[4]となります. 従って $\mathrm{ch}\, L(\lambda) = 1$ です. このことと定理 4.7 から次の**分母公式**が従います.

系 4.8.

$$\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha}) = \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w\rho - \rho}.$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の場合, 上の分母公式は $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ の展開式を与えるものになります.

4.3. **アフィンリー環.** 有限次元単純リー環 $\mathfrak{g}$ に付随する**アフィンリー環**[5]$\widehat{\mathfrak{g}}$ とは, ベクトル空間

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D$$

に次でリー環の構造を入れたものです.

$$[x(m), y(n)] = (m-n)x[m+n] + m(x|y)\delta_{m+n,0}K, \tag{17}$$

$$[D, x(m)] = mx(m), \quad [K, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0. \tag{18}$$

ここで $x(m) = x \otimes t^m$.

問題 4.9. (17), (18) は $\widehat{\mathfrak{g}}$ に Lie 環の構造を定めることを確かめよ,

アフィンリー環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ は無限次元のリー環ですが, 有限次元リー環に対する多くの理論が $\widehat{\mathfrak{g}}$ に対してもパラレルに展開することができます. 例えば, $\mathfrak{g}$ の三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ を用いて $\widehat{\mathfrak{g}}$ の三角分解が

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{g}} =& \widehat{\mathfrak{n}}_- \oplus \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}_+, \\ & \widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}D, \quad \widehat{\mathfrak{n}}_- = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]t^{-1}, \quad \widehat{\mathfrak{n}}_+ = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]t \end{aligned}$$

で定まります. ここで, 自然な埋め込み $\mathfrak{g} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}$, $x \mapsto x(0)$, により $\mathfrak{g}$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の部分代数と見なしています. また $\widehat{\mathfrak{h}}^*$ を $\widehat{\mathfrak{h}}$ の双対空間とし, これを

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{h}}^* =& \mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \mathbb{C}\delta, \\ & \lambda(h + aK + bD) = \lambda(h), \ \Lambda_0(h + aK + bD) = a, \ \delta(h + aK + bD) = b \end{aligned}$$

と分解すると, $\widehat{\mathfrak{g}}$ のルートの集合 $\widehat{\Delta}$, 正ルートの集合 $\widehat{\Delta}_+$ は $\mathfrak{g}$ のルート Δ を用いて

$$\begin{aligned} & \widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}^{re} \sqcup \widehat{\Delta}^{im}, \\ & \quad \widehat{\Delta}^{re} = \{\alpha + n\delta; \alpha \in \Delta, \ n \in \mathbb{Z}\}, \quad \widehat{\Delta}^{im} = \{n\delta; n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\} \end{aligned}$$

と表され, ルート分解

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{g}} =& \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha, \\ & \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha + n\delta} = \mathfrak{g}_\alpha \otimes \mathbb{C}t^n, \quad \widehat{\mathfrak{g}}_{n\delta} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}t^n \end{aligned}$$

[4]Lie 環の自明表現とは全ての元が零で作用する一次元表現です.

[5]アフィン Lie 環に関する表現的な教科書は [Kac90] です.

が成立します. $\widehat{\Delta}^{re}$ の元を実ルート, $\widehat{\Delta}^{im}$ の元を虚ルートと云います. また正ルートの集合も

$\widehat{\Delta}_+ = \widehat{\Delta}_+^{re} \sqcup \widehat{\Delta}_+^{im}$,

$\widehat{\Delta}_+^{re} = \{\alpha + n\delta; \alpha \in \Delta_+,\ n \geq 0\} \sqcup \{-\alpha + n\delta; \alpha \in \Delta_+,\ n \geq 1\}, \quad \Delta_+^{im} = \{n\delta; n \geq 1\}$

で定まり, $\widehat{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \widehat{\Delta}_+} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$ が成立します. $\widehat{\mathfrak{g}}$ のワイル群 $\widehat{W}$ も, (16) を用いて

$$\widehat{W} = \langle s_\alpha; \alpha \in \widehat{\Delta}^{re} \rangle \subset \mathrm{Aut}(\widehat{\mathfrak{h}}^*),$$

と定義されます. $\widehat{W}$ は無限群で, 次が成立します.

$$\widehat{W} \cong W \ltimes Q^\vee. \tag{19}$$

ここで $Q^\vee$ は $\mathfrak{g}$ のコルート格子:

$$Q^\vee = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z}\alpha^\vee \subset \mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^*.$$

$\widehat{W}$ はアフィン Weyl 群と呼ばれます. 例えば $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}$ の場合, $Q^\vee \cong \mathbb{Z}$ であることからアフィン Weyl 群は

$$S_2 \ltimes \mathbb{Z}, \quad (w,m)(y,n) = (wy, w(m)+n) \quad (w, y \in S_2,\ m, n \in \mathbb{Z})$$

に同型になることが分かります.

4.4. **アフィン Lie 環の可積分表現.** 有限次元 Lie 環の時と同様に $\widehat{\mathfrak{g}}$ の最高ウエイト表現が定義され, 次が成立します.

補題 4.10. $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ に対して, 最高ウエイト λ の最高ウエイト既約表現 $L(\lambda)$ が同型を除いて唯一存在する.

最高ウエイト表現 V はウエイト分解

$$V = \bigoplus_{\mu \in \widehat{\mathfrak{h}}^*} V_\mu, \quad V_\mu = \{v \in V; hv = \mu(h)v\ \forall h \in \widehat{\mathfrak{h}}\}$$

を持ちます. その形式指標も有限次元 Lie 環の場合と同様に

$$\mathrm{ch}\, V = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} (\dim V_\mu) e^\mu$$

と定義されます.

ただし, 有限次元 Lie 環の場合と異なり, ほとんどの場合 $L(\lambda)$ は有限次元とはなりません. しかし, 可積分表現と呼ばれる有限次元表現と同じように振舞う表現のクラスが存在します.

定義 4.11. $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現 V が可積分表現であるとは任意の実ルートベクトル $x \in \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$ ($\alpha \in \widehat{\Delta}^{re}$) が V 上局所巾零に作用することを云う.

$\widehat{P}_+$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の支配的整ウエイトの集合とします:

$$\widehat{P}_+ = \{\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*; \lambda(\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \forall \alpha \in \widehat{\Delta}_+^{re}\}.$$

$\mathfrak{sl}_2$ の場合に帰着させることにより次が従います.

定理 4.12. 対応 $\lambda \mapsto L(\lambda)$ は $\widehat{P}_+$ と $\widehat{\mathfrak{g}}$ の既約可積分表現の同型類との間の一対一対応を与える.

有限次元表現の場合と同様に, $\widehat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現の指標はアフィン Weyl 群 $\widehat{W}$ の作用で不変となります. このことから, 次が従います.

定理 4.13 (Weyl-Kac の指標公式)**.** $\lambda \in \widehat{P}_+$ とすると

$$\operatorname{ch} L(\lambda) = \frac{\sum_{w \in \widehat{W}} \epsilon(w) e^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1-e^{-\alpha})^{\dim \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha}}.$$

特に $\lambda = 0$ の時, $L(\lambda)$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の自明表現です[6]ので次の分母公式が従います.

系 4.14.

$$\prod_{\alpha \in \widehat{\Delta}_+} (1-e^{-\alpha})^{\dim \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha} = \sum_{w \in \widehat{W}} \epsilon(w) e^{w\rho-\rho}.$$

アフィン Lie 環の分母公式は有限次元の場合と異なり, 左辺は無限積, 右辺は無限和になりますので極めて非自明な式になります. 最も簡単な $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の場合に分母公式を具体的に書き下したものは Jacobi の 3 重積公式に他なりません. 一般の $\widehat{\mathfrak{g}}$ の場合には **Macdonald の恒等式**と呼ばれるものになります ([Kac74]).

4.5. **指標のモジュラ不変性.** (19) より, $Q^\vee$ に関する和の部分をまとめることにより, Weyl-Kac の指標公式の右辺の分子を次の形に書き直すことができます.

$$\sum_{w \in \widehat{W}} \epsilon(w) w^{w(\lambda+\rho)-\rho} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) \Theta_{w(\lambda+\rho)-\rho}.$$

ここで $\Theta_{w(\lambda+\rho)-\rho}$. はある種のテータ関数. また, 分母公式から, 分母もテータ関数で書かれることが分かります. このことから, $\operatorname{ch} L(\lambda)$ は[7]上半面上の正則関数とみなすことができ, しかも $\{\operatorname{ch} L(\lambda); \lambda \in \widehat{P}_+\}$ は自然な $SL(2,\mathbb{Z})$ の作用で不変になります. この指標の $SL(2,\mathbb{Z})$ による変換公式は二次元の**共形場理論**や**モジュライ理論**において重要な意味を持ちます (Verlinde の公式, [上 99] 参照).

4.6. **Virasoro 代数.** ベクトル空間

$$Vir = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}\mathbf{c}$$

に交換関係

$$\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c,\\
&[\mathbf{c}, L_n] = 0
\end{aligned}$$

で Lie 環の構造を入れたものを Virasoro 代数と云い, Vir と書きます. Vir は弦理論や様々な数学に現れる重要なリー環です.

Vir は次の自然な三角分解を持ちます.

$$\begin{aligned}
Vir =& Vir_- \oplus Vir_0 \oplus Vir_+,\\
&Vir_- = \bigoplus_{n<0} \mathbb{C}L_n, \quad Vir_0 = \mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}\mathbf{c}, \quad Vir_+ = \bigoplus_{n>0} \mathbb{C}L_n.
\end{aligned}$$

これより Vir の最高ウエイト表現 V が

(i) $Vir_+ v = 0$,

---

[6] これが可積分既約表現が有限次元になる唯一の場合です.

[7] 正確には modified character を考えることが必要ですが

(ii) ある $(h,c) \in \mathbb{C}^2$ が存在して $L_0 v = hv$, $\mathbf{c}v = cv$,

(iii) $V = U(Vir)v$

を満たすベクトルが存在する表現として定義されます．このとき (h,c) は V の最高ウエイトと呼ばれます．$L(h,c)$ を最高ウエイト (h,c) を持つ Vir の既約な最高ウエイト表現とします．その指標は

$$\operatorname{ch} L(h,c) = \operatorname{tr}_{L(h,c)} q^{L(0)} = \sum_{d \in \mathbb{C}} (\dim L(h,c)_d) q^d,$$
$$L(h,c)_d = \{v \in L(h,c); L_0 v = dv\}$$

で定義されます．

ここまではアフィン Lie 環の場合と同じですが Vir には Weyl 群は存在しません．不変内積も存在しません．したがって Vir の表現論はアフィン Lie 環の表現論に比べ格段に難しいものになります．

しかし結論から述べれば Vir の表現論は $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現論とパラレルに展開されます．特にアフィン Lie 環の可積分表現と同様の良い性質を持つ**極少系列表現**と呼ばれる表現のクラスが存在します:

$$c_{p,q} = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq},$$
$$h_{p.q.r,s} = \frac{(rq-sp)^2 - (p-q)^2}{4pq}$$

とおきます．このとき

(20) $$(p,q) \in \mathbb{Z},\ p,q \geq 2,\ (p,q) = 1$$

について Vir の既約最高ウエイト表現

$$\{L(h_{p,q,r,s}, c_{p,q}); 0 < r < p,\ 0 < s < q\}$$

は中心電荷 $c_{p,q}$ の極少系列表現と呼ばれます．

極少系列表現に対しては Weyl-Kac 型の指標公式が成立します: (20) を満たす p,q を固定し $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のウエイト λ_r, μ_s を次で定義します．

$$\lambda_r = r\omega_1 + p\Lambda_0, \quad \mu_s = s\omega_1 + q\Lambda_0.$$

ここで ω_1 は $\mathfrak{sl}_2$ の基本ウエイトです．

定理 4.15 (Feigin-Fuchs [FF90a])**.**

$$\operatorname{ch} L(c_{p,q,r,s}, c_{p,q}) = \frac{q^{\frac{c_{p,q}-1}{24}} \sum_{w \in \widehat{W}} \epsilon(w) q^{\frac{pq}{2}|\frac{w(\lambda_r)}{p} - \frac{\mu_s}{q}|^2}}{\prod_{n \geq 1}(1-q^n)}$$

ここで $\widehat{W}$ は $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のアフィン *Weyl* 群.

特に $p=3$, $q=2$, $r=s=1$ の時 $c_{3,2} = h_{3,2,1,1} = 0$ となりますが $L(0,0)$ は Vir の自明表現です．したがってアフィン Lie 環の場合と同様に分母公式が得られます．これは分母の無限積 $\prod_{n \geq 1}(1-q^n)$ を無限和で表す公式になりますので冒頭の Euler の五角数定理 (1) に他なりません．

極少系列表現に関してはアフィン Lie 環の可積分表現と同様に指標のモジュラ不変性が成立し，その表現論とリーマン面のモジュライ理論との間の密接な関係も知られています ([BS88, BD]).

4.7. **Jacobi ⇒ Euler のアップグレード.** 上では $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現から Jacobi の三重積公式が従い, Virasoro 代数の表現論から Euler の五角数定理が従うことを見ました. 一方, Jacobi の三重積公式から Euler の五角数定理を導くことができることが知られています. この対応をアップグレードして, $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現論から Virasoro 代数の表現論を導くことが可能でしょうか?

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathfrak{sl}}_2 \text{ の表現論} \arrow[r] & \text{Jacobi の三重積公式} \arrow[d] \\
\text{Virasoro 代数の表現論} \arrow[r] & \text{Euler の五角数定理}
\end{tikzcd}$$

実はこれは**量子 Drinfeld-Sokolov 還元法**と云う方法を使えば可能です ([FF90b, Ara05, Ara07]). この方法により Virasoro 代数の表現論は $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の表現論から「自動的に[8]」従うことが分かります. Virasoro 代数の極少系列表現の指標公式に何故か $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のアフィン Weyl 群が現れたのはこのような理由があったのです.

詳しくは説明できませんが量子 Drinfeld-Sokolov 還元法は量子 Hamiltonian 還元法の一つのバージョンであり, 一般性があります. 特に $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 以外のいろいろなアフィン Lie 環から出発することにより W 代数と呼ばれる興味深い無限次元代数の表現論を研究することができます. W 代数の表現論の組織的な研究は始まったばかりですが数学的にも物理的にも興味深い内容を含んでいることが期待されています.

References

[Ara05] T. Arakawa. Representation theory of superconformal algebras and the Kac-Roan-Wakimoto conjecture. *Duke Math. J.*, 130(3):435–478, 2005.

[Ara07] T. Arakawa. Representation theory of W-algebras. *Invent. Math.*, 169(2):219–320, 2007.

[BD] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld. Quantization of hitchin's integrable system and hecke eigensheaves. *preprint, available at http://www.math.uchicago.edu/ benzvi.*

[BS88] A. A. Beĭlinson and V. V. Schechtman. Determinant bundles and Virasoro algebras. *Comm. Math. Phys.*, 118(4):651–701, 1988.

[FBZ04] Edward Frenkel and David Ben-Zvi. *Vertex algebras and algebraic curves*, volume 88 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2004.

[FF90a] B. L. Feĭgin and D. B. Fuchs. Representations of the Virasoro algebra. In *Representation of Lie groups and related topics*, volume 7 of *Adv. Stud. Contemp. Math.*, pages 465–554. Gordon and Breach, New York, 1990.

[FF90b] Boris Feigin and Edward Frenkel. Quantization of the Drinfel′d-Sokolov reduction. *Phys. Lett. B*, 246(1-2):75–81, 1990.

[Hum72] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer-Verlag, New York, 1972. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9.

[Kac74] V. G. Kac. Infinite-dimensional Lie algebras, and the Dedekind η-function. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 8(1):77–78, 1974.

[Kac90] Victor G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.

[佐 89] 佐藤幹夫. 佐藤幹夫講義録 (1984/85) (梅田亨記). 数理解析レクチャーノート刊行会, 1989.

[上 99] 清水勇二 上野健爾. モジュライ理論 3. 岩波講座 現代数学の展開, 1999.

[8] functorial にという意味です.