クラッシュアイスの数理

福島　竜輝　（京都大学数理解析研究所）

1　はじめに

液体に氷を入れて冷やすときに，同じ量の氷ならば砕いた方が冷却効率が良くなることは誰もが経験則として知っていることと思う．しかし，なぜ／どれくらい，良くなるのだろうか？例えばもっともらしい仮説として「砕くと表面積が増えるから」ということが考えられるが，この仮説が正しいかどうかは数学的にはモデルを作って検証する必要がある．本講座では熱伝導はいわゆる熱方程式によって記述されると仮定し，氷は考えている領域のある部分の温度をを0に保つ境界条件と考えたモデルを使って，クラッシュアイスの冷却効率が何に支配されているかを数学的に解析する．

2　熱方程式

熱の伝導は数学的には熱方程式と呼ばれる偏微分方程式によって記述されると考える．時間 $t \in [0, \infty)$ における空間 $x \in \mathbb{R}^3$ での温度を $u(t, x)$ と書くことにすると，熱方程式は $\partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x)$ と書かれる．ここで ∂_t は時間 t に関する微分，Δ は Laplace 作用素と呼ばれる二階の微分作用素

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{2.1}$$

である．この方程式の Fourier の法則「熱は温度が高い方から低い方へ勾配に比例した速度で伝播する」に基づく導出を簡単に述べておこう．点 $x \in \mathbb{R}^3$ を任意にとって，その周りの小さな箱 $x + [0, \delta]^3$ における時刻 t から $t + \delta$ までの熱の変化を考える．図0のように各側面からの熱の出入りを考えると，

$$\delta^3 [u(t + \delta, x) - u(t, x)] \sim \delta \sum_{k=1}^{3} \delta^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x_k}(t, x + \delta) - \frac{\partial u}{\partial x_k}(t, x) \right] \tag{2.2}$$

となるから，両辺 δ^4 で割って $\delta \to 0$ とすれば熱方程式が得られる．

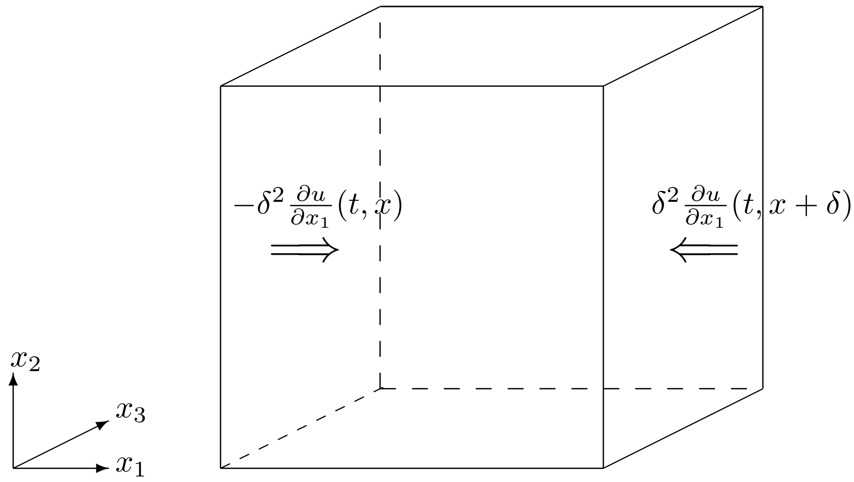

図０：$x+[0,\delta]^3$ における x_1 方向の単位時間あたりの熱の出入り

注意 1. 上の図で $\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x)$ に負号がついているのは，$\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$ のとき流出になること，つまり熱が温度の高い方から低い方へ流れることを表している．

熱方程式を $\mathbb{R}^3$ 全体で考えた場合，十分よい初期値 $u(0,x) = f(x)$ に対して，熱量保存などを満たす物理的に意味のある解は熱核

$$p(t,x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\} \tag{2.3}$$

を用いて

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} p(t,x,y) f(y) \mathrm{d}y \tag{2.4}$$

と明示的に書けることが知られている．この表示は Fourier 変換を用いると簡単に発見することができるが，実際に解になっていることを確かめるのは微積分の良い練習問題である．

演習問題 1. 上の表示が熱方程式を満たすことを，微分と積分の順序が交換できると仮定して確かめよ．さらに余力があれば十分良い（例えば何回でも微分可能で，ある有界領域の外側で０である）f に対しては順序交換が正当化できることや，$t \to 0$ で $u(t,x)$ が $f(x)$ に収束することも確かめよ．

一方で本講座ではグラスなどの容器に入った液体中での熱伝導を問題にするので，ある領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ をとってその中に制限した熱方程式を考える．このとき境界

条件を指定しなければ全空間での解を制限したものがそのまま Ω 上での解にもなるが，現実的には境界が 0 ℃に保たれていることに対応する Dirichlet 境界条件

$$u(t,x)=0 \text{ for } x\in\partial\Omega \tag{2.5}$$

や，境界の外側が空気で断熱壁と見なせることに対応する Neumann 境界条件

$$\frac{\partial}{\partial\nu}u(t,x)=0 \text{ for } x\in\partial\Omega,\ (\nu\text{は外向き法線ベクトル}) \tag{2.6}$$

（またはそれらの混合）を課すことが多い．このとき特殊な形状の Ω に対しては明示的な解の表示が知られている場合もあるが，一般の領域については極めて困難に思われる．とくにクラッシュアイスのモデルとしては，ある Ω の境界に Neumann 境界条件を課し，Ω 内に有限個の点 $\{x_k\}_{k=1}^n$ をとって各点を中心とした球の和 $\bigcup_{k=1}^n B(x_k,r)$ の境界には Dirichlet 境界条件を課したような複雑な領域を考えたいので，

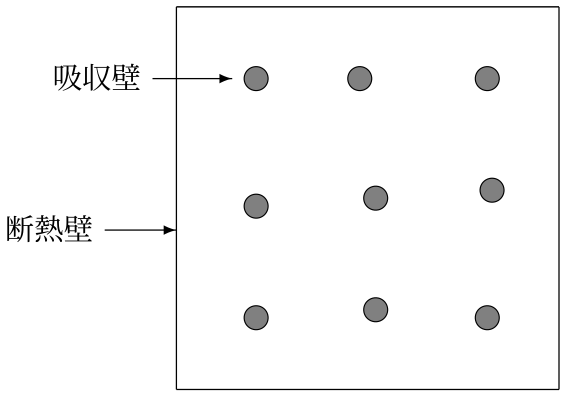

図１：クラッシュアイスを表現する領域の例

解の表示はあったとしても複雑なものになるだろうし，そこから有用な情報が読み取れるとは思えない．そこで次節では，明示的ではないが長時間挙動を調べるのには都合の良い固有関数展開による解の表示を説明する．

3　Laplace 作用素のスペクトル

熱方程式 $\partial_t u(t,x)=\Delta u(t,x)$ について，Δ を定数（または行列）のように見なして形式的に常微分方程式の解法を適用すると，初期値 f に対して $u(t,x)=e^{t\Delta}f(x)$ という表示が得られる．例えば熱方程式の空間変数を離散近似して $\mathbb{Z}^3\cap\Omega$ 上の連立常微分方程式と見れば，Ω が有界で境界条件が Dirichlet の場合には $x,y\in\mathbb{Z}^3\cap\Omega$

に対して

$$\Delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{D}}(x,y)=\begin{cases}1, & |x-y|=1,\\ -6, & x=y,\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}\tag{3.1}$$

によって定まる有限次正方行列 $\Delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{D}}$ を用いて $\partial_t u(t,x)=\Delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{D}}u(t,x)$ と近似するのが自然であり，このとき $u(t,x)=e^{t\Delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{D}}}f(x)$ は厳密に正しい表示となる．この離散版の行列 $\Delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{D}}$ は対称行列であるからとくに対角化可能であり，さらに各固有値 λ_k は実数で対応する固有ベクトル ϕ_k は直交する．従って正規直交化された固有ベクトルを用いた展開

$$e^{t\Delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{D}}}f(x)=\sum_k e^{t\lambda_k}\langle f,\phi_k\rangle\phi_k(x)\tag{3.2}$$

が成立し，とくに $t\to\infty$ での挙動は最大の固有値によって決定される．

注意 2. (1) 厳密には最大固有値を λ_1 とすると $\langle f,\phi_1\rangle\neq 0$ が必要である．これについては後で議論する．

(2) 全ての $x\in\Omega$, $y\in\mathbb{Z}^3$ に対して (3.1) のように定めた行列 Δ_{d} が Ω 上で定義された Laplace 作用素の標準的な離散版であるが，$\Delta_{\mathrm{d}}f$ の定義には Ω の一つ外の点での f の値（境界値）まで必要になる．上では y が Ω の外にあるときに $\Delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{D}}(x,y)=0$ と定めることで，境界条件を行列の定義に組み込んでいる．

演習問題 2. 行列 Δ_{d} から定まる線型写像の定義域を

$$\{\{f(x)\}_{x\in\mathbb{Z}^d}:\text{全ての }x\notin\Omega\text{について }f(x)=0\}\tag{3.3}$$

に制限すると，上で定めた $\Delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{D}}$ から定まる線型写像と同値になることを確かめよ．また Neumann 境界条件に対応する定義域と，境界条件を組み込んだ行列 $\Delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{N}}$ をそれぞれどう定めるのがよいか考えよ．

さて，以下に述べるように連続空間の場合も境界の部分ごとに Dirichlet または Neumann 境界条件を課した Laplace 作用素は対称行列に類似の性質を持つ．ここで実数成分の行列 A が対称であることは，全ての $x,y\in\mathbb{R}^n$ に対して $\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle$ が成り立つことと同値であることを思い出そう．$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 上の関数 f,g に対して $\langle f,g\rangle_\Omega=\int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x$ と定めると Euclid 空間の内積と同様に双線型性や非負定値性を持つので，これを関数空間における内積と呼ぶ（但し全ての関数の組に対して内積が定義できるとは限らないことには注意が必要である）．

命題 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を区分的に滑らかな境界を持つ有界領域とする．その境界のある部分 $\partial\Omega_{\mathrm{N}}$ では Neumann 境界条件，残りの部分 $\partial\Omega_{\mathrm{D}}$ では Dirichlet 境界条件を満たす滑らかな関数 f, g に対して

$$\langle \Delta f, g\rangle_\Omega = \langle f, \Delta g\rangle_\Omega. \tag{3.4}$$

（証明）Green の公式

$$\begin{aligned}\langle \Delta f, g\rangle_\Omega &= \int_\Omega \Delta f(x) g(x) \mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu}(x) g(x) \sigma(\mathrm{d}x)\end{aligned} \tag{3.5}$$

(ν は外向き法線，σ は面積要素) において，右辺第二項は

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = 0 \text{ on } \partial\Omega_{\mathrm{N}}, \quad g(x) = 0 \text{ on } \partial\Omega_{\mathrm{D}} \tag{3.6}$$

だから 0 である．すると第一項は f, g について対称だから結論が従う． □

この命題から境界条件付きの Δ に対しても固有ベクトルによる展開の類似が成り立つことが期待されるが，実際に次の定理が成り立つ．

定理 1. $\Omega \in \mathbb{R}^3$ を区分的に滑らかな境界を持つ有界領域とし，その境界のある部分 $\partial\Omega_{\mathrm{N}}$ では Neumann 境界条件，残りの部分 $\partial\Omega_{\mathrm{D}}$ では Dirichlet 境界条件を課した熱方程式の解 $u(t, x)$ とする．このとき Δ の境界条件を満たす固有関数は直交系をなし，有界連続な初期値 f に対する熱方程式の解について次の展開が成り立つ：

$$u(t, x) = \sum_k e^{t\lambda_k} \langle f, \phi_k\rangle_\Omega \phi_k(x). \tag{3.7}$$

注意 3. 上の定理は通常学部 3 回生くらいで学ぶ「関数解析」という学問の一つの到達点である．そこで少し一般論に関する補足をしておく．まず命題 1 に述べた作用素の対称性だけでは “固有関数展開” ができることは保証できず，自己共役性という作用素の定義域に関する条件が必要になる．また自己共役性を仮定しても，例えば Ω が有界でないときは上のように離散的な和として展開できるとは限らず，一般には Stieltjes 積分の形で

$$e^{t\Delta} f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\lambda} E_f(\mathrm{d}\lambda) \tag{3.8}$$

と表される（自己共役作用素のスペクトル分解定理という）．Ω が有界のときにこれが離散和になることは，作用素 $e^{t\Delta}$ が (2.4) のように良い積分核で表現できて完全連続という性質を持つことによる（完全連続作用素のスペクトル分解定理という）．

上の定理1はここでは証明しないが，これを認めるとクラッシュアイスの冷却効率は λ_1 によって測るのが自然であることは納得できると思う．そこで次節では λ_1 を評価するのに便利な変分公式による表現を紹介する．

4 Rayleigh-Ritz の変分公式

対称作用素の最大固有値は変分問題の解として表現される．このことをまず有限次の実対称行列の場合に説明しよう．

命題 2. S を $n \times n$ の実対称行列とし，$\mathbb{R}^n$ 上の線型変換と見なす．このとき S の最大固有値 λ_1 は次のように変分問題の解として表現される：

$$\lambda_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\langle x, Sx \rangle}{|x|^2}. \tag{4.1}$$

またこの上限は λ_1 に対応する固有ベクトルで達成される．上限をとる量 $\frac{\langle x, Sx \rangle}{|x|^2}$ は Rayleigh 商と呼ばれる．

（証明）実対称行列の固有値 $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ は実数であり，固有ベクトル $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底に取れることを思い出そう．また内積の各変数に関する線型性から上の変分問題は $\sup_{|x|=1} \langle x, Sx \rangle$ と同値である．いま任意の $x \in \mathbb{R}^n$ で $|x| = 1$ となるものを正規直交基底で

$$x = \langle \phi_1, x \rangle \phi_1 + \cdots + \langle \phi_n, x \rangle \phi_n \tag{4.2}$$

と展開すると，内積の線型性，$S\phi_l = \lambda_l \phi_l$, $\langle \phi_k, \phi_l \rangle = \delta_{k,l}$ を順に用いて

$$\begin{aligned} \langle x, Sx \rangle &= \sum_{k,l=1}^n \langle \phi_k, x \rangle \langle \phi_l, x \rangle \langle \phi_k, S\phi_l \rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^n \langle \phi_k, x \rangle \langle \phi_l, x \rangle \langle \phi_k, \lambda_l \phi_l \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle \phi_k, x \rangle^2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる．これは $\sum_{k=1}^n \langle \phi_k, x \rangle^2 = |x|^2 = 1$ に注意すると $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ の重み付き平均であるから，重みが最大値 λ_1 に集中しているときに最大となり，その値は λ_1 である． □

この命題は次のように自然に境界条件付きの Laplace 作用素にまで拡張される．以下の定理の設定のもとでは，命題 1 の証明で見たように $\langle\psi, \Delta\psi\rangle_\Omega = -\langle\nabla\psi, \nabla\psi\rangle_\Omega$ であったことに注意せよ．

定理 2. （Rayleigh-Ritz の変分公式）$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を区分的に滑らかな境界を持つ有界領域とする．このとき Δ を Ω の境界のある部分 $\partial\Omega_{\mathrm{N}}$ では Neumann 境界条件，残りの部分 $\partial\Omega_{\mathrm{D}}$ では Dirichlet 境界条件を課した関数の空間に制限した線型作用素の最大固有値は Rayleigh 商の上限として

$$\lambda_1 = \sup\left\{-\frac{\langle\nabla\psi, \nabla\psi\rangle_\Omega}{\langle\psi, \psi\rangle_\Omega} : \psi\text{は境界条件を満たす滑らかな関数}\right\} \tag{4.4}$$

と表され，この上限は λ_1 に対応する固有関数で達成される．さらに実は sup は $\partial_{\mathrm{D}}\Omega$ で Dirichlet 境界条件を満たすだけの滑らかな関数まで拡げても同じ値になる．

注意 4. (1) 実は Δ の（関数解析的に）自然な定義域は，境界条件を満たす滑らかな関数の全体よりも広い．それにも関わらず滑らかな関数の上限だけを考えればよいのは，Δ の自然な定義域の関数が滑らかな関数で近似できるからである．

(2) Nuemann 境界条件を落とせることも同様に，境界条件を満たさない関数が満たす関数で近似できることから分かる．

演習問題 3. 定理 2 と同じことを一次元の区間 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ で考える．このとき sup は，0 で Neumann, 1 で Dirichlet 境界条件を満たす境界まで含めて C^1 級の関数についてとっても，Neumann 境界条件を無視してとっても変わらないことを実際に確かめよ．また余力があれば Dirichlet 境界条件も落とすとどうなるかを検証せよ．

定理 2 の変分表現は λ_1 の値を正確に求めるのに都合の良い表現ではないが，上下からの評価を与えるのには有用である．例えば λ_1 の下からの評価を得るには適当な ψ に対して Rayleigh 商 $\langle\nabla\psi, \nabla\psi\rangle_\Omega/\langle\psi, \psi\rangle_\Omega$ を計算してみるだけでよい．もちろん良い評価を得ようと思えば ψ をうまく選ぶ必要があり，それは簡単なこととは限らないが，クラッシュアイスの問題の場合には氷の表面で Dirichlet 境界条件を満たし外側で調和関数である ($\Delta\psi = 0$ を満たす) ものが良い選択となる．次節では調和関数の二種類の表現を紹介して，「良い選択」になる理由を説明すると共に後で必要になる評価の準備をする．

5　調和関数の表現

5.1　Dirichlet 原理

ある有界閉集合 $K \subset \mathbb{R}^3$ の外側の調和関数であって，境界上では与えられた関数 f と一致して遠方で 0 に収束するものは，境界条件を満たす関数の中でエネルギー汎関数と呼ばれる

$$\mathscr{E}_K(u) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K} |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x = \langle \nabla u, \nabla u \rangle_{\mathbb{R}^3 \setminus K} \tag{5.1}$$

を最小化するものとして特徴づけられる ($\mathbb{R}^3 \setminus K$ は $\mathbb{R}^3$ から K を除いた集合)．このことは Dirichlet 原理と呼ばれている．いま Rayleigh-Ritz の変分公式が $\langle \nabla\psi, \nabla\psi \rangle_\Omega / \langle \psi, \psi \rangle_\Omega$ を最小化するものであったことを思い出すと，調和関数が良い候補になることは想像がつくと思う．具体的には容器 Ω の中のクラッシュアイス $K = \bigcup_{k=1}^n B(x_k, r)$ の冷却効率を調べる際に $f = 1$ として上で述べたような調和関数 u を考えれば，$1 - u$ は Rayleigh-Ritz の公式の上限をとる範囲に含まれ，$\langle \nabla(1-u), \nabla(1-u) \rangle_{\Omega \setminus K}$ は小さい．この $1 - u$ には遠方で 1 に近付く "境界条件" を課していることになるが，これが $\langle 1-u, 1-u \rangle_{\Omega \setminus K}$ があまり小さくならないことを保証することになる．

ここでは最小値を与える関数が存在して滑らかであることを仮定して，それが調和関数であることだけを示しておこう．調和関数であることが分かれば次の小節で紹介するような別の表現があって，それが後に Rayleigh 商を評価するときに役立つ．

（Dirichlet 原理で定まる関数の調和性の証明）境界条件を満たすある滑らかな関数 u において (5.1) が最小をとるとする．また v を滑らかな関数で K の近くと遠方では 0 であり，さらに $\partial\{x : v(x) \neq 0\}$ が滑らかであるものとする．このとき任意の $\delta > 0$ に対して u のとり方から

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathscr{E}_K(u + \delta v) - \mathscr{E}_K(u) \\ &= -2\delta \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^3 \setminus K} + \delta^2 \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^3 \setminus K} \end{aligned} \tag{5.2}$$

であるから，とくに $\delta \downarrow 0$, $\delta \uparrow 0$ を両方考えると $\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^3 \setminus K} = 0$ でなければな

らないことが分かる．ここで Green の公式を使えば

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^3 \setminus K} \\
&= \int_{\{v(x) \neq 0\}} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \mathrm{d}x \\
&= -\int_{\{v(x) \neq 0\}} \Delta u(x) v(x) \mathrm{d}x - \int_{\partial\{v(x) \neq 0\}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) v(x) \sigma(\mathrm{d}x)
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

であり，この第二項は v のとり方から 0 であるから結局 $\langle \Delta u, v \rangle_{\mathbb{R}^3 \setminus K} = 0$ を得る．この関係が上記のような全ての v に対して成り立つのは，$\mathbb{R}^3 \setminus K$ 上 $\Delta u = 0$ のときに限る． □

演習問題 4. 上の証明の最後の文に述べたことを確かめよ．（ヒント：v としては，$|x-a| < \epsilon$ では $\exp\{-(1-(x-a)^2/\epsilon^2)^{-1}\}$，その他では 0 という形の関数を考えれば十分．また Δu は連続であることに注意．）

注意 5. ここでは (5.1) を最小化する関数の存在（と滑らかさ）を仮定して議論したが，それは少しも自明なことではない．実際 Hilbert による最初の存在証明には，Lebesgue によって拡張された積分論に基づく関数空間の完備性や微分方程式の解の概念の拡張（弱解）などの大掛かりな道具が使われており，解析学の歴史における一つのハイライトである．歴史的に見ても Riemann が存在問題を気にせず Dirichlet 原理を利用して等角写像論を展開したのに対して，Weierstrass は下限を達成する関数が存在しない変分問題の例を挙げてその問題点を指摘したが，Hilbert による最終的な解決までにはその後半世紀を要している．

5.2　ポテンシャル論

電磁気学においてよく知られているように，与えられた電荷分布 ρ によって生成される点 $x \in \mathbb{R}^3$ の静電ポテンシャルは

$$
u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} \rho(y) \mathrm{d}y \tag{5.4}
$$

であり，これは Poisson 方程式 $\Delta u = -4\pi\rho$ を満たす．従ってとくに $\rho = 0$ となる領域においては u は調和関数である．いま電荷分布 ρ は必ずしも通常の意味で関数である必要はなく，ある物体の表面にのみ存在するような特異な分布であってもよい．例えば $\mathbb{R}^3$ のある有界集合の境界で恒等的に 1 でその外側で調和な関数をこの方法で作ることを考えると，これは物体に電荷を与えて無限遠から見た電位を 1 に

する問題であり，物体が導体ならばそれを実現する電荷の分布が表面に集中していることは電磁気学においてはよく知られた事実である．本小節では，この例の状況における調和関数と電荷の表面分布の関係を述べるとともに，固有値の評価において重要な役割を果たす capacity の概念を紹介する．

命題 3. $K \subset \mathbb{R}^3$ を区分的に滑らかな境界を持つ有界閉集合とする．K 上で 1 であり遠方で 0 に収束する調和関数 u について次の等式が成り立つ：

$$u(x) = \int_{\partial K} \frac{1}{4\pi|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\sigma(\mathrm{d}y). \tag{5.5}$$

ここで ν は ∂K における内向き法線ベクトルである．

注意 6. 法線 ν の向きは証明を見れば分かるように $\mathbb{R}^3 \setminus K$ で Green の公式を使うことからこのようになっている．法線の向きは多くの場合に Green の公式の使い方から明らかであるから，以後いちいち断らない．

（証明）$\epsilon > 0$ を十分小さくとって中心 x，半径 ϵ の球 $B(x,\epsilon)$ が $\mathbb{R}^3 \setminus K$ に含まれるようにする．u が少なくとも C^1 級であることに注意すると，容易に

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\partial B(x,\epsilon)} \frac{1}{4\pi|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\sigma(\mathrm{d}y) = 0 \tag{5.6}$$

が分かる．そこで $K_\epsilon = K \cup B(x,\epsilon)$ とおいて $\mathbb{R}^3 \setminus K_\epsilon$ で Green の公式を適用すると，

$$\begin{aligned} &\int_{\partial K_\epsilon} \frac{1}{4\pi|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\sigma(\mathrm{d}y) \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K_\epsilon} \frac{1}{4\pi|x-y|} \Delta u(y)\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K_\epsilon} \left\langle \nabla \frac{1}{4\pi|x-y|}, \nabla u(y) \right\rangle \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{5.7}$$

となるが，右辺第一項は u が調和関数だから 0 である．そこで右辺第二項にもう一度 Green の公式を適用すると

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3 \setminus K_\epsilon} \left\langle \nabla \frac{1}{4\pi|x-y|}, \nabla u(y) \right\rangle \mathrm{d}y \\ &\quad = \int_{\partial K_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{4\pi|x-y|} u(y)\sigma(\mathrm{d}y) - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K_\epsilon} \Delta \frac{1}{4\pi|x-y|} u(y)\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{5.8}$$

となるが，$|x-y|^{-1}$ も x 以外の点では調和関数であるから右辺第二項は再び 0 である．さらに第一項について，まず直接計算で

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\partial B(x,\epsilon)} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{4\pi|x-y|} u(y)\sigma(\mathrm{d}y) = u(x), \tag{5.9}$$

また ∂K 上 $u=1$ であることに注意して K 内で Green の公式を使えば

$$\int_{\partial K} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{4\pi|x-y|} u(y)\sigma(\mathrm{d}y) = \int_{\partial K} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{4\pi|x-y|} \sigma(\mathrm{d}y) = 0 \tag{5.10}$$

が分かる．以上をまとめると

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} \frac{1}{4\pi|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\sigma(\mathrm{d}y) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\partial K_\epsilon} \frac{1}{4\pi|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\sigma(\mathrm{d}y) \\ &= u(x)\end{aligned} \tag{5.11}$$

となって主張が示された． □

この命題は K 上で 1 であり遠方で 0 に収束する調和関数は ∂K 上の分布 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\sigma(\mathrm{d}y)$ がつくるポテンシャルとして表現できることを示している．この調和関数と分布はそれぞれ K の平衡ポテンシャル，平衡分布と呼ばれる．命題の前に述べたような物理的解釈に従って以下の用語を定義する．

定義 1. 区分的に滑らかな境界を持つ有界閉集合 $K \subset \mathbb{R}^3$ に対し，その平衡ポテンシャルを u としたとき

$$\mathrm{cap}(K) = \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\sigma(\mathrm{d}y) \tag{5.12}$$

を K の capacity という．

注意 7. 上の定義が well-defined であるためには，平衡ポテンシャルと同じ境界条件を満たす調和関数の一意性が必要である．これを示すことを以下に演習問題として提示する．

演習問題 5. 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ における調和関数 u と球 $B(x,r) \subset \Omega$ について，球面平均定理

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\sigma(\mathrm{d}y) \tag{5.13}$$

を示せ．（ヒント：$\int_{B(x,r)\setminus B(x,\epsilon)} |x-y|^{-1} \Delta u(y)\mathrm{d}y$ に Green の公式を使う．）

演習問題 6. 上の球面平均定理を用いて，調和関数は定義されている領域の内点で最大値をとることはないことを示せ（最大値原理という）．またこれを用いて平衡ポテンシャルと同じ境界条件を満たす調和関数は一意であることを示せ．

上で定義した capacity は実は Dirichlet 原理におけるエネルギー汎関数の最小値と一致する．実際平衡ポテンシャル u の定義と Green の公式により

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}(K) &= \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)u(y)\sigma(\mathrm{d}y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3\setminus K} |\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^3\setminus K} u(x)\Delta u(x)\mathrm{d}x \\ &= \mathscr{E}_K(u)\end{aligned} \tag{5.14}$$

であるが，Dirichlet 原理により最後の量はエネルギー汎関数の最小値である．言い換えると capacity は変分表現

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}(K) = \inf\{\mathscr{E}_K(u) : u \text{ は } \partial K \text{ 上で } 1 \text{ であり} \\ \text{遠方で } 0 \text{ に収束する滑らかな関数}\}\end{aligned} \tag{5.15}$$

を持つということである．さらにここでは議論しないが，上の表現において u の滑らかさは少し弱めて $u \in$“$\mathscr{E}_K$ の自然な定義域” とすることができる．このことから次の capacity の有用な性質が導かれる．

系 1. (1) **単調性**：$K_1 \subset K_2 \subset \mathbb{R}^3$ のとき $\mathrm{cap}(K_1) \le \mathrm{cap}(K_2)$.

(2) **劣加法性**：$K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ のとき $\mathrm{cap}(K_1 \cup K_2) \le \mathrm{cap}(K_1) + \mathrm{cap}(K_2)$.

（証明の概略）(1) は (5.15) の下限をとる範囲の包含関係を考えれば明らか．(2) を示すため K_1, K_2 の平衡ポテンシャルをそれぞれ u_1, u_2 とする．$\max\{u_1, u_2\}$ は $K_1 \cup K_2$ 上で 1 であり，遠方で 0 に収束する．（演習問題 6 で示した最大値原理から $0 \le u_1, u_2 \le 1$ であることに注意.）これは滑らかとは限らないものの実は上の “$\mathscr{E}_K$ の自然な定義域” には含まれているので

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}(K_1 \cup K_2) &\le \mathscr{E}_{K_1\cup K_2}(\max\{u_1, u_2\}) \\ &= \mathscr{E}_{K_1\cup K_2}\left(\frac{u_1+u_2}{2} + \frac{|u_1-u_2|}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3\setminus(K_1\cup K_2)} |\nabla(u_1+u_2) + \nabla|u_1-u_2||^2\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3\setminus(K_1\cup K_2)} |\nabla(u_1+u_2)|^2 + |\nabla|u_1-u_2||^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\mathscr{E}_{K_1\cup K_2}(u_1+u_2) + \frac{1}{2}\mathscr{E}_{K_1\cup K_2}(|u_1-u_2|).\end{aligned} \tag{5.16}$$

ここで 2 行目から 3 行目への変形では $x, y \in \mathbb{R}^3$ に対して $|x+y|^2 \le 2(|x|^2 + |y|^2)$ であることを用いた．さて一般に $||f|(x) - |f|(y)| \le |f(x) - f(y)|$（$|f|$ は f より

も変動が小さい）であることに注意すると，

$$\mathscr{E}_{K_1\cup K_2}(|u_1-u_2|)\leq \mathscr{E}_{K_1\cup K_2}(u_1-u_2) \tag{5.17}$$

であることが期待される（もちろん $|u_1-u_2|$ は微分可能とは限らないので明らかではない）．これを認めれば

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathscr{E}_{K_1\cup K_2}(u_1+u_2)+\frac{1}{2}\mathscr{E}_{K_1\cup K_2}(|u_1-u_2|)\\
&\leq \frac{1}{2}\mathscr{E}_{K_1\cup K_2}(u_1+u_2)+\frac{1}{2}\mathscr{E}_{K_1\cup K_2}(u_1-u_2)\\
&\leq \mathscr{E}_{K_1}(u_1)+\mathscr{E}_{K_2}(u_2)\\
&=\mathrm{cap}(K_1)+\mathrm{cap}(K_2)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

となって劣加法性が従う． □

最後に後で使うために球の capacity を計算しておこう．半径 r の閉球 $B(x,r)$ の平衡ポテンシャルが $u(y)=r|x-y|^{-1}$ であることは計算で確かめられる．ここで capacity の定義により

$$\begin{aligned}
\mathrm{cap}(B(x,r))&=\int_{\partial B(x,r)}\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}\sigma(\mathrm{d}y)\\
&=r\int_{\partial B(x,r)}\frac{1}{|x-y|^2}\sigma(\mathrm{d}y)\\
&=4\pi r
\end{aligned} \tag{5.19}$$

である．すなわち球の capacity は半径に比例し，中心の位置にはよらない．

6　クラッシュアイスの冷却効率

最終節である本節では，いよいよクラッシュアイスの冷却効率が何に支配されているかを議論する．クラッシュアイスのモデルとしては，区分的に滑らかな境界を持つ有界領域 Ω の境界に Neumann 境界条件を課し，Ω 内に有限個の点 $\{x_k\}_{k=1}^n$ をとって各点を中心とした球の和 $\bigcup_{k=1}^n B(x_k,r)$ の境界には Dirichlet 境界条件を課した熱方程式を考える．Ω は例えば立方体や円柱（コップ）だと思っておいてよい．このとき第 3 節で議論したように冷却効率は同じ境界条件のもとでの Δ の最大固有値 $\lambda_1(n,r)$ によって記述されると考えられ，とくに氷を細かく砕く極限 $n\to\infty, r\downarrow 0$ に興味がある（固有値は点の個数だけでなく配置に依存するから $\lambda_1(\{x_k\}_{k=1}^n,r)$ と書くべきであるが，点の配置の詳細にはよらない評価をするので

単純化した記法を使う）．Rayleigh-Ritz の変分公式を見ても分かる通り，$\lambda_1(n,r)$ の下からの評価と上からの評価の技法はかなり異なる．具体的には

- 下からの評価は一つの関数に対してエネルギー汎関数を評価すればよいが，その関数はうまく選ぶ必要があり，
- 上からの評価は上限をとる対象となる全ての関数に対して一様にエネルギー汎関数を評価する必要がある．

そこで以下ではそれぞれの評価を小節に分けて行う．Ω から $\bigcup_{k=1}^n B(x_k,r)$ を除いた集合を $\Omega(n,r)$ と書くことにする．

6.1　下からの評価

クラッシュアイス $I=\bigcup_{k=1}^n B(x_k,r)$ の平衡ポテンシャルを u とする．第 4 節の最後にも述べたように下からの評価は

$$\lambda_1(n,r)=\sup\left\{-\frac{\langle\nabla\psi,\nabla\psi\rangle_{\Omega(n,r)}}{\langle\psi,\psi\rangle_{\Omega(n,r)}}:\psi\text{ は }I\text{ の境界で Dirichlet 条件を満たす滑らかな関数}\right\}\tag{6.1}$$

を特別な関数 $\psi=1-u$ に対する値で評価することにより行う．まず Rayleigh 商の分子については，capacity と平衡ポテンシャルのエネルギーの関係 (5.14)，次いで capacity の劣加法性を用いれば

$$\begin{aligned}\langle\nabla(1-u),\nabla(1-u)\rangle_{\Omega(n,r)}&\le\mathscr{E}_I(1-u)\\&=\mathscr{E}_I(u)\\&=\mathrm{cap}\left(\bigcup_{k=1}^n B(x_k,r)\right)\\&\le 4\pi nr\end{aligned}\tag{6.2}$$

と評価される．一方で分母については，

$$\langle 1-u,1-u\rangle_{\Omega(n,r)}=\mathrm{vol}(\Omega(n,r))-2\langle 1,u\rangle_{\Omega(n,r)}+\langle u,u\rangle_{\Omega(n,r)}\tag{6.3}$$

と展開する．この第 2 項は命題 3 に示した平衡ポテンシャルの表現を用いれば

$$\begin{aligned}\langle 1,u\rangle_{\Omega(n,r)}&=\int_{\Omega(n,r)}u(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\Omega(n,r)}\int_{\partial I}\frac{1}{4\pi|x-y|}\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\sigma(\mathrm{d}y)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{6.4}$$

であるが，$\Omega \subset B(y,R)$ となる $R>0$ をとって直接計算することにより

$$G = \sup_{y\in\partial I}\int_{\Omega(n,r)} \frac{1}{4\pi|x-y|}\mathrm{d}x < \infty \tag{6.5}$$

が分かるので積分の順序交換をして capacity の定義と劣加法性を使えば

$$\langle 1,u\rangle_{\Omega(n,r)} \le G\mathrm{cap}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,r)\right) \le 4\pi Gnr \tag{6.6}$$

と上から評価される（積分の順序交換は被積分関数が非負であるから問題ない）．従って nr が十分小さければ（例えば $\mathrm{vol}(\Omega(n,r))/(16\pi G)$ 以下であれば），$\langle 1-u,1-u\rangle_{\Omega(n,r)} \ge \mathrm{vol}(\Omega(n,r))/2$ を得る．

以上をまとめると，$nr \le \mathrm{vol}(\Omega(n,r))/(16\pi G)$ ならば

$$\begin{aligned}\lambda_1(n,r) &= -\frac{\langle\nabla(1-u),\nabla(1-u)\rangle_{\Omega(n,r)}}{\langle(1-u),(1-u)\rangle_{\Omega(n,r)}} \\ &\ge -\frac{8\pi}{\mathrm{vol}(\Omega(n,r))}nr\end{aligned} \tag{6.7}$$

が成り立つ（nr が小さいとき nr^3 はさらに小さいので上の分母は小さくならない）．

注意 8. nr が小さくないときにどうなるのか気になるかも知れない．まず $nr\to\infty$ のときは（配置に関する多少の仮定の下で）次の小節で上からの評価が $-\infty$ に発散することを示すので，下からの評価は不要になる．nr が有界なときには $1-u$ の代わりに $\psi(x)=\min\{r^{-1}\mathrm{dist}(x,I),1\}$ を使えば $-nr$ に比例する下からの評価が得られる．

演習問題 7. 上の ψ について $|\psi(x)-\psi(y)| \le |x-y|/r$ を示せ．これより微分可能な点では $|\nabla\psi| \le 1/r$ となる．これと $\bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,2r)$ の外では $\psi=1$, $\nabla\psi=0$ であることを用いて（微分可能性の問題は無視して），$c_1,c_2>0$ を

$$\langle\nabla\psi,\nabla\psi\rangle_{\Omega(n,r)} \le c_1 nr, \quad \langle\psi,\psi\rangle_{\Omega(n,r)} \ge 1-c_2nr^3 \tag{6.8}$$

を満たすように取れることを示せ．

6.2 上からの評価

上からの評価においては新たに次のような仮定をおく：

n,r に依らないある $M\in\mathbb{N}$ が存在して，$\Omega\subset\bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,R)$ となる最小の $R>0$ に対して各 $x\in\Omega$ を含む $B(x_k,R)$は高々 M 個である． (H)

この仮定は Ω の中に $\{x_k\}_{k=1}^n$ が満遍なく分布していることを意味する．クラッシュアイスの問題としての解釈は，液体をむらなく冷やすときの効率を見ているということになり自然な仮定と言えよう．この仮定が満たされないときには，液体の中に氷が密集して冷え易い部分と氷が疎らで冷えにくい部分ができることになり，冷却効率は場所によることになってしまう．

さて，この仮定の下では $I=\bigcup_{k=1}^n B(x_k,r)$ の境界で Dirichlet 境界条件を満たす任意の滑らかな関数 ψ について

$$\begin{aligned}\frac{\langle\nabla\psi,\nabla\psi\rangle_{\Omega(n,r)}}{\langle\psi,\psi\rangle_{\Omega(n,r)}} &\geq \frac{\frac{1}{M}\sum_{k=1}^n\int_{B(x_k,R)\setminus B(x_k,r)}|\nabla\psi(x)|^2\mathrm{d}x}{\sum_{k=1}^n\int_{B(x_k,R)\setminus B(x_k,r)}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x} \\ &\geq \frac{1}{M}\max_{1\leq k\leq n}\frac{\int_{B(x_k,R)\setminus B(x_k,r)}|\nabla\psi(x)|^2\mathrm{d}x}{\int_{B(x_k,R)\setminus B(x_k,r)}|\psi(x)|^2\mathrm{d}x}\end{aligned} \tag{6.9}$$

となっている．この右辺の max は Raileigh-Ritz の公式により $B(0,R)\setminus B(0,r)$ において外側の境界で Neumann 条件, 内側の境界で Dirichlet 条件を課した Δ の最大固有値 $\lambda_1[R,r]$ で下から評価される．この固有値を評価するため，次の固有関数の性質が必要になる．

補題 1. $\lambda_1[R,r]$ に対応する固有関数は $B(0,R)\setminus B(0,r)$ の内部で正にとることができ，さらに回転不変である．

（証明の概略）$\lambda_1[R,r]=\lambda_1$ と略記し，対応する固有関数を一つとって $\phi=\phi_+ +\phi_-$ と正値部分と負値部分に分ける．

$\boxed{\text{Step 1}}$ $\phi_\pm$ も λ_1 に対応する固有関数であることを示す．実際，$\phi_+(x)\neq 0 \Leftrightarrow \phi_-(x)=0$ であるから

$$\begin{aligned}&\lambda_1\langle\phi,\phi\rangle_{B(0,R)\setminus B(0,r)} \\ &\quad=\langle\nabla\phi,\nabla\phi\rangle_{B(0,R)\setminus B(0,r)} \\ &\quad=\langle\nabla\phi_+,\nabla\phi_+\rangle_{B(0,R)\setminus B(0,r)}+\langle\nabla\phi_-,\nabla\phi_-\rangle_{B(0,R)\setminus B(0,r)}\end{aligned} \tag{6.10}$$

となる．ここで Rayleigh-Ritz の公式によると

$$\langle\nabla\phi_\pm,\nabla\phi_\pm\rangle_{B(0,R)\setminus B(0,r)}\geq\lambda_1\langle\phi_\pm,\phi_\pm\rangle_{B(0,R)\setminus B(0,r)} \tag{6.11}$$

であるが，一方

$$\langle\phi,\phi\rangle_{B(0,R)\setminus B(0,r)}=\langle\phi_+,\phi_+\rangle_{B(0,R)\setminus B(0,r)}+\langle\phi_-,\phi_-\rangle_{B(0,R)\setminus B(0,r)} \tag{6.12}$$

だから (6.11) は両方等号でなければならない．これは $\phi_\pm$ がいずれも λ_1 に対応する固有関数の定数倍であることを意味する（但し ϕ と違ってどちらかは0である可

能性もある）．

$\boxed{\text{Step 2}}$ $\phi_+ \neq 0$ とすると実は領域内全体で $\phi_+ > 0$ であることを示そう．いま明らかに $\lambda_1 \leq 0$ であるから $\Delta\phi_+ = \lambda_1\phi_+ \leq 0$ である（ϕ_+ は劣調和関数であるという）．このとき調和関数に対して球面平均定理を示したのと同様に $\int_{B(x,r')\setminus B(x,\epsilon)} |x-y|^{-1}\Delta\phi_+(y)\mathrm{d}y$ に Green の公式を使うことで $B(x,r') \subset B(0,R) \setminus B(0,r)$ である限り

$$\phi_+(x) \geq \frac{1}{4\pi r'^2}\int_{\partial B(x,r')} \phi_+(y)\mathrm{d}y \tag{6.13}$$

が成り立つことが分かる．もし領域内部に $\phi_+(x) = 0$ となる点が存在したとすると，ϕ_+ が非負であることから $B(x,r')$ が領域に含まれる限りその境界上で $\phi_+ = 0$ でなければばならない．ところがこの議論を x を取り直して繰り返すと領域全体で $\phi_+ = 0$ となってしまう（下図参照）ので，領域内部の点で $\phi_+(x) = 0$ とはならない．

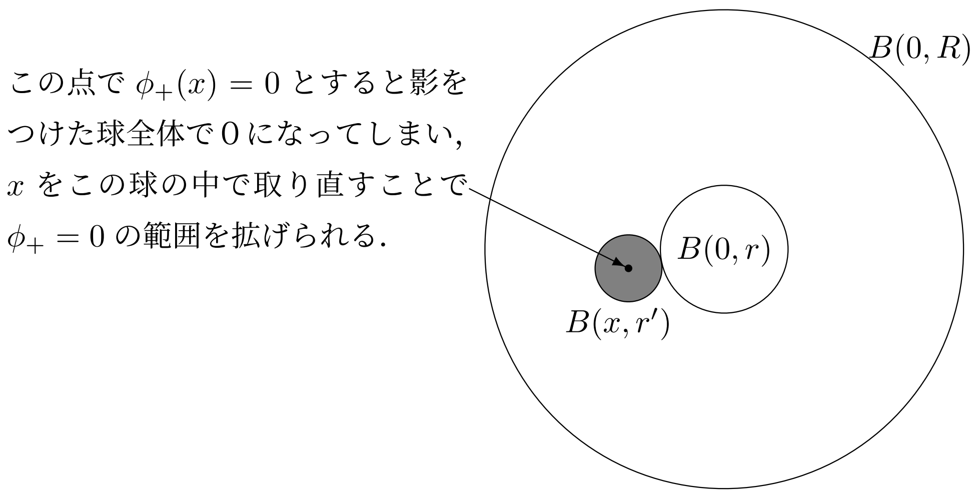

図3：球面平均定理を使う場所

$\boxed{\text{Step 3}}$ λ_1 に対応する任意の固有関数 ψ は ϕ の定数倍であることを示す（線型代数におけるのと同様にこのとき λ_1 は単純固有値であるという）．いま Step 2 より任意の固有関数は領域全体で正負が一定である（$\phi_+ \neq 0$ ならばいたるところ $\phi_+ > 0$ だったから ϕ も正であり，$\phi_+ = 0$ ならば同様にいたるところ ϕ は負となる）．すると ϕ も ψ も領域内での積分が0でないから，ある定数 $c \neq 0$ に対して

$$\int_{B(0,R)\setminus B(0,r)} \phi(x) - c\psi(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{6.14}$$

となる．ところが $\phi - c\psi$ も λ_1 に対応する固有関数であるから符号は一定であり，

上の積分が0になるのは $\phi - c\psi = 0$ のときに限られる．

$\boxed{\text{Step 4}}$ 最後に ϕ の回転不変性を示そう．Laplace 作用素と考えている領域がいずれも回転不変であることに注意すると，任意の $\mathbb{R}^3$ の回転行列 Θ に対して $\phi\circ\Theta$ も λ_1 に対応する固有関数であることが分かる．すると Step 3 で見た通り $\phi\circ\Theta$ は ϕ の定数倍となるが，それは $\phi\circ\Theta = \phi$ を意味する（例えば両者の積分値を比較すれば分かる）． □

注意 9. (1) これは成分が正の行列の固有値と固有ベクトルに関する Perron-Frobenius の定理の（楕円型）微分作用素に対する一般化である．

(2) 上の証明を概略と呼んだのは，$\phi_\pm$ の微分可能性を考慮せずに形式的な議論をしているところがあるからである．

(3) 上の Step 3 までは一般の領域に対して正しい．このことから定理1の固有関数展開の最大固有値 λ_1 に対応する項 $\langle f, \phi_1\rangle$ が $f \geq 0$ (かつ $\neq 0$) のときに0でないことが分かる．

補題 2. $R, r \to 0$ かつ $R/r \to 0$ のとき $\lambda_1[R,r] \sim -3r/R^3$ である．

（証明）$\lambda_1[R,r] = \lambda_1$ に対応する固有関数 ϕ について球極座標へ変換したものを

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z) &= \phi(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta) \\ &= \psi(\rho,\theta,\varphi)\end{aligned} \tag{6.15}$$

と書くことにすると，連鎖率を用いた計算で

$$\Delta\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2(\rho\psi)}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \tag{6.16}$$

が分かる．いま補題1より ψ は ρ のみの関数であるから，固有値問題は

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2(\rho\psi)}{\partial\rho^2} = \lambda\psi, \quad \psi(r) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\rho}(R) = 0 \tag{6.17}$$

と一次元の問題になる．これは具体的に解けて，固有値 λ は $\tan(\sqrt{-\lambda}(R-r)) = \sqrt{-\lambda}r$ の解であることが分かる．いまこの補題の設定の下では Taylor の定理から

$$\tan(\sqrt{-\lambda}(R-r)) = \sqrt{-\lambda}(R-r) - \frac{\sqrt{-\lambda}^3}{3}R^3 + o\left(\sqrt{-\lambda}^3 R^3\right) \tag{6.18}$$

だから，上を満たす最大の λ は $\lambda \sim -3r/R^3$ である． □

注意 10. 一般に $\mathbb{R}^d$ では Δ の極座標表示の ρ 微分を含む項は $\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{d-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}$ であり，固有値問題は上のように簡単な形にはならない．つまり補題 2 の証明は三次元に特有の性質を使っている．そこで少し弱い評価になるが，一般の次元で通用する議論も紹介しておこう．

（$\lambda_1[R,r] \le -3r/R^3$ の別証明）前の証明と同様に固有関数 ϕ を動径の長さの関数として表したものを ψ とおくと

$$\int_{B(0,R)\setminus B(0,r)} |\nabla\phi(x)|^2 \mathrm{d}x = 4\pi \int_r^R \psi'(\rho)^2 \rho^2 \mathrm{d}\rho \tag{6.19}$$

である．いま $\psi(r) = 0$ であるから微分積分学の基本定理により $\psi(\rho) = \int_r^\rho \psi'(s)\mathrm{d}s$ であり，これに Schwarz の不等式（下の演習問題７）を使うと

$$\begin{aligned} \psi(\rho)^2 &= \left(\int_r^\rho \psi'(s)s\frac{1}{s}\mathrm{d}s\right)^2 \\ &\le \left(\int_r^\rho \psi'(s)^2 s^2 \mathrm{d}s\right)\left(\int_r^\rho \frac{1}{s^2}\mathrm{d}s\right) \\ &\le \left(\int_r^R \psi'(s)^2 s^2 \mathrm{d}s\right)\frac{1}{r}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

この両辺に $4\pi\rho^2$ をかけて $[r,R]$ で積分すれば

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)\setminus B(0,r)} \phi(x)^2 \mathrm{d}x &= 4\pi \int_r^R \psi(\rho)^2 \rho^2 \mathrm{d}\rho \\ &\le 4\pi \left(\int_r^R \psi'(s)^2 s^2 \mathrm{d}s\right) \frac{R^3 - r^3}{3r} \\ &\le \int_{B(0,R)\setminus B(0,r)} |\nabla\phi(x)|^2 \mathrm{d}x \frac{R^3}{3r} \end{aligned} \tag{6.21}$$

を得て，Rayleigh-Ritz の変分公式により

$$\lambda_1[R,r] = \frac{\int_{B(0,R)\setminus B(0,r)} |\nabla\phi(x)|^2 \mathrm{d}x}{\int_{B(0,R)\setminus B(0,r)} \phi(x)^2 \mathrm{d}x} \le -\frac{3r}{R^3} \tag{6.22}$$

となる． □

演習問題 8. $I \subset \mathbb{R}$ を有界閉区間とし，f, g をその上の実数値連続関数とするとき

$$\left(\int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_I f(x)^2 \mathrm{d}x\right)\left(\int_I g(x)^2 \mathrm{d}x\right) \tag{6.23}$$

を示せ．（ヒント：任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $\int_I (f(x) - cg(x))^2 \mathrm{d}x \geq 0$ であることを使うか，Riemann 和で近似して有限和に対する Schwarz の不等式に帰着せよ.）

さて，初めにおいた仮定の下では各 $B(x_k, R)$ ごとに 1～M 個の氷があるので Ω 全体にある氷の数 n は定数倍を除いて R^{-3} くらいである（これを $n \asymp R^{-3}$ と表す）．従ってこの小節の初めに述べたことと補題 2 から

$$\begin{aligned} \lambda_1(n, r) &\leq \frac{1}{M} \lambda_1[R, r] \\ &\sim -\frac{3r}{MR^3} \\ &\asymp -nr \end{aligned} \tag{6.24}$$

となって，前小節で導いた下からの評価と一致する．

6.3 結論

前の小節までに得た評価が意味することを考えてみよう．以下では氷が満遍なく分布している条件 (H) を仮定する．このとき (6.24) よりある $c > 0$ に対して $\lambda(n, r) \leq -cnr$ である．

(1) まず氷の体積を一定に保ちながら細かく砕く状況を考えると，これは nr^3 を一定に保ちつつ $n \to \infty$, $r \downarrow 0$ とすることに対応するが，このとき $nr \to \infty$ である．つまり冷却効率は砕く程いくらでも良くなる．

(2) 次に氷の表面積を一定に保ちながら細かく砕く状況を考えると，これは nr^2 を一定に保ちつつ $n \to \infty$, $r \downarrow 0$ とすることに対応するが，上と同様にこのときも冷却効率は砕く程いくらでも良くなる（！）．

この (2) は初めに述べた「氷を砕くと冷却効率が良くなるのは表面積が増えるからである」という説明が正しくないことを意味する．さらに下からの評価 (6.7) と組み合わせると，$\lambda_1(n, r)$ は nr にほぼ比例することになるから，冷却効率を支配しているのは表面積ではなく砕いた氷の半径の合計であるという一見奇妙な結論を得る．もちろん「半径の合計」というのは正しい見方ではなく，5.2 節と 6.1 節の議論から分かるように nr は氷の半径の合計ではなく capacity の合計として評価に現れている．

7　おわりに

なぜ capacity が冷却効率を支配するかということについては説明をしなかったので，消化不良を感じる向きもあるかも知れない．これについては Brown 運動と呼ばれる確率過程と関連づけるなどの方法で説明を試みることもできるのであるが，感覚的には理解しにくい奇妙なことでも証明はできてしまうのが数学の一つの面白さだと思うので敢えてここで終わることにする．クラッシュアイスの問題を最初に考えたのは Rauch-Taylor [5] であるが，著者の一人 Rauch は講義録 [2, 3, 4] の中で次のように身も蓋もないまとめ方をしている：

Formula is smarter than people.

しかし何かを不思議だと思うことは勉強をする最も良い動機だと思うので，興味を持たれた方は以下の文献リストなどを参考に各自理解を深められたい．少しだけ案内をすると，原論文は [5] であるが [3] の方が読み易い．また氷の配置をランダムにした問題も考えらるが，これについては [6] が明解で良いと思う．クラッシュアイスの問題を含むより広い数学理論は homogenization theory と呼ばれており [1] などが標準的な文献である．

ただしこれらの文献を読むには多少の予備知識が必要である．本講座では多変数の微積分と線型代数の知識だけを仮定したが，文中にも述べた通りそれだけでは厳密な証明ができないところが多々あった．それらの論理の飛躍を埋めるには主に学部３回生程度で習う関数解析や超関数の理論が必要になる．ここで述べたような奇妙な現象が厳密に解析できるということが，これらの基礎理論を勉強する動機にもなればと願っている．

参考文献

[1] V. A. Marchenko and E. Y. Khruslov. *Homogenization of partial differential equations*, volume 46 of *Progress in Mathematical Physics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2006. Translated from the 2005 Russian original by M. Goncharenko and D. Shepelsky.

[2] J. Rauch. Five problems: an introduction to the qualitative theory of partial differential equations. In *Partial differential equations and related topics (Program, Tulane Univ., New Orleans, La., 1974)*, pages 355–369. Lecture

Notes in Math., Vol. 446. Springer, Berlin, 1975.

[3] J. Rauch. The mathematical theory of crushed ice. In *Partial differential equations and related topics (Program, Tulane Univ., New Orleans, La., 1974)*, pages 370–379. Lecture Notes in Math., Vol. 446. Springer, Berlin, 1975.

[4] J. Rauch. Scattering by many tiny obstacles. In *Partial differential equations and related topics (Program, Tulane Univ., New Orleans, La., 1974)*, pages 380–389. Lecture Notes in Math., Vol. 446. Springer, Berlin, 1975.

[5] J. Rauch and M. Taylor. Potential and scattering theory on wildly perturbed domains. *J. Funct. Anal.*, 18:27–59, 1975.

[6] B. Simon. *Functional integration and quantum physics.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, second edition, 2005.