MORSE 理論と FLOER 理論

小野　薫

空間図形を理解する際に、適当な平面による切り口を使うことはよく行われます。例えば 3変数 x, y, z の2次式の零点集合として xyz-空間に2次曲面が定まりますが、その大体の形を知ろうとしたときには適当な座標変換をして2次式を標準形に直した後で、 $x =$ 定数, $y =$ 定数, $z =$ 定数 などの平面族により切り口がどう変わるかをみることが助けになります。もっと次元の高い図形を理解する際にもこうしたやり方で元の図形を低い次元の図形が積み重なったものと理解することができます。（もっとも次元が低くなっても切り口に現れる図形の理解も難しいのですが。）切り口に本質的な変化が起こる前後で切り口がどう変わるのかを見ると、そうした変化の積み重ねとしてもとの図形が得られます。変化の仕方も複雑ではないとすると、分からなかった図形が分かったような気になってきます。（分かったような気になれば、気になることを心に留めながらも一度それを受け入れその先に進もうという気になるでしょう。）今回の話では、図形の上で定義された関数を通して図形を理解するという動機付けで Morse 理論と、その1つの発展形といえる Floer 理論について紹介しようと思います。

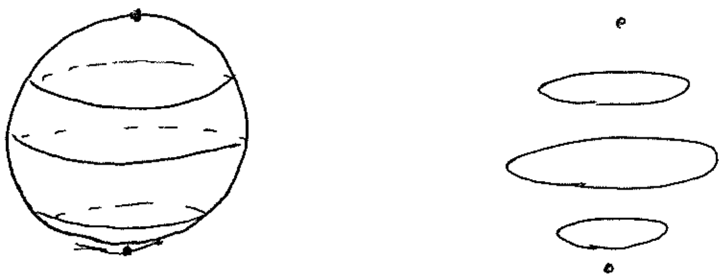
1. 3次元 Euclid 空間内の曲面の高さ関数のレベル集合とその変化

まず warm-up として、3次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ 内のいくつかの図形とその等高線を描いてみます。単位球面は $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ で定まる曲面です。c を実数として、$z = c$ を満たす (x, y) を考えます。c を徐々に大きくしてその変化を見ると、$c < -1$ であれば空集合, $c = -1$ のとき $\{(0, 0)\}$, $-1 < c < 1$ では $\{(0, 0)\}$ を中心として半径 $\sqrt{|c|}$ の円, $c = 1$ のとき $\{(0, 0)\}$, $c > 1$ では空集合となります。

他の例も見てみましょう。（次ページ参照）等高線はほとんどの高さで前後の本質的な変化はありませんが、いくつかの高さでは交差点が現れ、前後でその周りでの等高線の繋がり具合が変わっています。こうした変化の積み重ねで出てくる図形に差が出てきます。これらの例で等高線の局所的な変化を見ると、

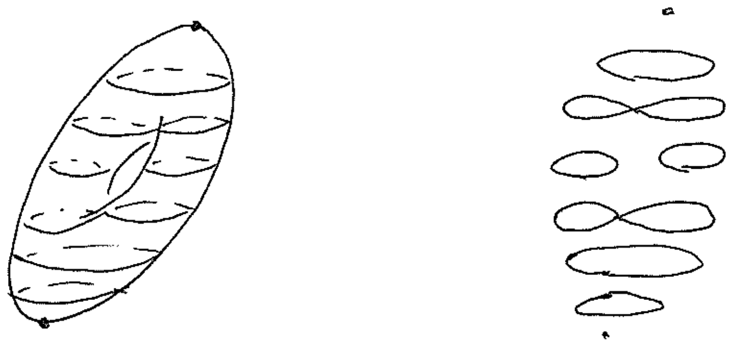
1) 何もなかったところに、点が現れ、閉曲線が成長する。
2) 等高線の2つの部分が近づき、交点を生じ、等高線の繋がり方が変わる。
3) 閉曲線が縮んでいき、点となり、何もなくなる。

の3つの現象が起こっていることが観察されます。後に触れるように、この3つのタイプは（今の場合は2変数の）非退化2次形式の分類と対応します。それ以外では、等高線の形状は大きさが変わったり、少し曲がり方が変わったりはしますが、いくつかの自分自身と交わらない閉曲線の族です。



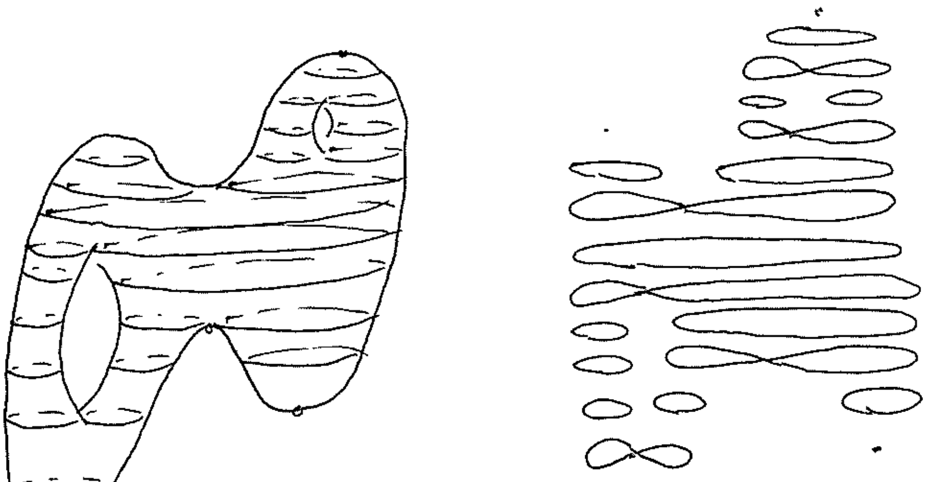
球面

（図1）



輪環面（トーラス）

（図2）



種数2の向き付け可能
閉曲面

（図3）

座標の取り方によっては、これら以外の等高線の変化も起こりえます。例えば、$z=x^3-xy^2$ により定まる曲面を xy-平面に平行な平面族で切ると、$z=0$ では３直線が一点で交わり、z が負の値を取って 0 に近づくとき、切り口の３つの部分が 0 に近づいていき、交点を生じ、z が正の値を取って 0 から増えると、３つの曲線弧が現れお互い離れていくことが分かります。もっと複雑なことが起こることは皆さん実験してみてください。

2. Morse 関数

１つ次元を上げて考えてみましょう。４次元 Euclid 空間の単位球面

$$\mathbf{S}^3=\{(x,y,z,w)\in\mathbf{R}^4|x^2+y^2+z^2+w^2=1\}$$

は（普通の人には）目に見えません。w の値を指定すれば、３次元 Euclid 空間内の図形となるので、身近になります。この場合も w を -1 から 1 まで動かすと１点が球面となり成長し、その後縮んで再び１点となり、それ以外の w の値では空集合であることが分かります。今は 高さ w について切り口を見ましたが、Euclid 空間の様な入れ物を想定しない空間を考える際には「高さ」の代わりにその空間上で定義された関数を使って同じように考えることができます。詳しい定義は与えませんが、全体で定義された「座標」はないけれども、各点の周りには「座標」が定義される、別のいい方をすると、各点の周りは、n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ あるいはその開球体 $D^n=\{(x_1\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n|\sum_{i=1}^n x_i^2<1\}$ によりパラメータ付けを持つ、空間を多様体と言い、局所的な座標の間の座標変換が微分可能となるときには微分可能多様体と言います。（講演では必要があれば、陰関数定理なども含めて少し補足をしようと思います）微分可能多様体ではその上で定義された関数が微分可能であるかどうかを考えることができます。つまり、その関数を局所座標で表示した時に、通常の意味で微分可能であるときにその関数は微分可能であると定義します。この定義が局所座標の取り方に依らずに意味を持つことは、局所座標間の変換がどちら向きにも微分可能であるという条件から分かります。

M を微分可能多様体、f をその上の微分可能関数とします。点 $p\in M$ が f の臨界点（あるいは特異点）であるとは、p の周りの局所座標を用いて f を表示し、p での全ての方向の一階偏微分が消えていることを言います。この概念が局所座標に依らないことは、再び局所座標間の変換が微分可能であることから従います。 実数 c に対し、f のレベル c 集合を

$$M_c=\{q\in M|f(q)=c\}$$

と定めます。陰関数定理により、$q\in M_c$ が臨界点を含まなければ、M_c の q の周りでの座標が取れます。従って、M_c が臨界点を含まなければ、 M_c も微分可能多様体となることが分かります。(M_c の M への入り方も局所座標でみると、座標の１つが 0 となる形で、部分多様体と呼ばれる状況です。）

例えば ３次元単位球面の高さ関数は $(x,y,z,w)\in\mathbf{S}^3\mapsto w$ です。初めなので少し冗長になりますが、局所的なパラメータ表示とそれを通した関数 w の表示を書きま

しょう。単位球面 $\mathbf{S}^3$ の $w \neq 1$ 即ち $(0,0,0,1)$ 以外では、

$$(s,t,u) \mapsto (\frac{2s}{s^2+t^2+u^2+1}, \frac{2t}{s^2+t^2+u^2+1}, \frac{2u}{s^2+t^2+u^2+1}, \frac{s^2+t^2+u^2-1}{s^2+t^2+u^2+1}),$$

$w \neq -1$ 即ち $(0,0,0,-1)$ 以外では、

$$(s,t,u) \mapsto (\frac{2s}{s^2+t^2+u^2+1}, \frac{2t}{s^2+t^2+u^2+1}, \frac{2u}{s^2+t^2+u^2+1}, \frac{-s^2-t^2-u^2+1}{s^2+t^2+u^2+1})$$

というパラメータ付けを持ちます。これらを通して関数 w を表示すれば、$\pm(\frac{s^2+t^2+u^2-1}{s^2+t^2+u^2+1})$ となり、s,t,u について滑らかな関数です。臨界点は $(s,t,u)=(0,0,0)$, もとの $\mathbf{S}^3$ では $(0,0,0,\pm1)$ で、それら以外には臨界点はありません。

今の例でも臨界点の周りでは等高面の変化はあるものの、臨界点から離れたところでは球面が大きくなったり縮んだりしているだけで本質的には変わりはありません。勾配流というものを考えてこのことを説明しましょう。Euclid 空間で ベクトル $\vec{e}=(0,0,0,1)$ を取ります。w 座標はこの方向に増えます。$\mathbf{S}^3$ の点 p が関数 w の臨界点であることは、p で $\mathbf{S}^3$ に接する平面（今後、接平面と呼びます）と $\vec{v}$ が直交していることと同値になることが分かります。$\vec{e}$ を p での接平面に直交射影することにより、p において $\mathbf{S}^3$ に接するベクトル（接ベクトル）$\vec{v}_p$ が得られます。このベクトルが p で消えることは p が w の臨界点であることに他なりません。p を $\vec{v}$ に沿って動かすことを考えます。絵を描いて考えてみると、$(0,0,0,\pm1)$ と p の３点を通る大円に沿って、$(0,0,0,-1)$ から $(0,0,0,1)$ に向かって点が動いていることが分かると思います。数学的には、ベクトル場の積分曲線と呼ばれるもので、それは常微分方程式の解の存在および一意性から保証されます。こうして得られる $\mathbf{S}^3$ 上の（点の）動き（流れ）が 関数 w の勾配流と呼ばれるものです。今の場合には、勾配流によって等高面が移り合っていることが観察できるでしょう。

一般の状況で勾配流を考える際、簡単のために微分可能多様体は compact であるという条件をおくことにします。compact という条件は、Euclld 空間の部分集合であれば、有界かつ閉部分集合であることです。滑らかな関数 $f: M \to \mathbf{R}$ に対しても f の勾配流は定義されます。（各点での接空間に内積を入れる Riemann 構造を与えると、上の例で、$\vec{e}$ を接空間に直交射影して得られる $\vec{v}$ に当たる勾配ベクトル場が定まり、勾配ベクトル場に対応した常微分方程式の解として積分曲線が定まります。こうして得られる曲線を以後、勾配曲線と呼ぶことにします。）臨界点以外では、勾配流は関数の値を増やす方向に流れます。２つのレベル集合 M_c, $M_{c'}$ に挟まれた領域 $\{q \in M | c \leq f(q) \leq c'\}$ が臨界点を含まないとすると、勾配流を修正することで M_c と $M_{c'}$ は微分可能多様体として同一視できる (正確な言葉遣いでは、M_c から $M_{c'}$ への微分同相写像が存在する）ことが分かります。つまり、臨界点に出会わない限り、レベル集合は微分可能多様体としては変わらないことになります。逆に言えば、臨界点こそが本質的な情報を握っていることになります。

関数 $f: M \to \mathbf{R}$ の臨界点 p が非退化であるとは、p における f の Hesse 行列が正則行列となることを言います。Hesse 行列を対角化した時に現れる負の固有値の数

（Hesse 行列に対応した2次形式の極大な負定値部分空間の次元）を f の p における指数と呼びます。正方行列が正則行列となるのは一般的な状況であり、行列の成分を少し変えてもこの性質は保たれます。関数の臨界点でも、非退化な臨界点に対しては、関数を然るべき意味で少し動かしても（もとの臨界点の位置からは少しずれてしまうかもしれないがその側に）非退化な臨界点があることが分かります。（陰関数定理の応用例）また、非退化な臨界点に対しては次のことが成り立ちます。

Morse の補題　$p \in M$ を関数 f の指数 k の臨界点とする。p の周りの座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ で、p が $(0, \ldots, 0)$ と対応し、f を $(x_1, \ldots, x_n)$ を用いて表示が

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(p) + x_1^2 + \cdots + x_{n-k}^2 - x_{n-k+1}^2 - \cdots - x_n^2$$

となるものが取れる。

Morse の補題から、臨界点の前後でレベル集合 M_c が臨界点の周りでどのように変わるかが分かります。レベル集合ではなく、劣レベル集合

$$M_{\leq c} = \{q \in M | f(q) \leq c\}$$

を考えましょう。$k = 0$ のときは f は p で極小値を取り、十分小さな正の実数 ϵ に対して、$M_{\leq f(p)+\epsilon}$ は n-次元閉球体

$$\overline{D}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | \parallel \mathbf{x} \parallel \leq \mathbf{1}\}$$

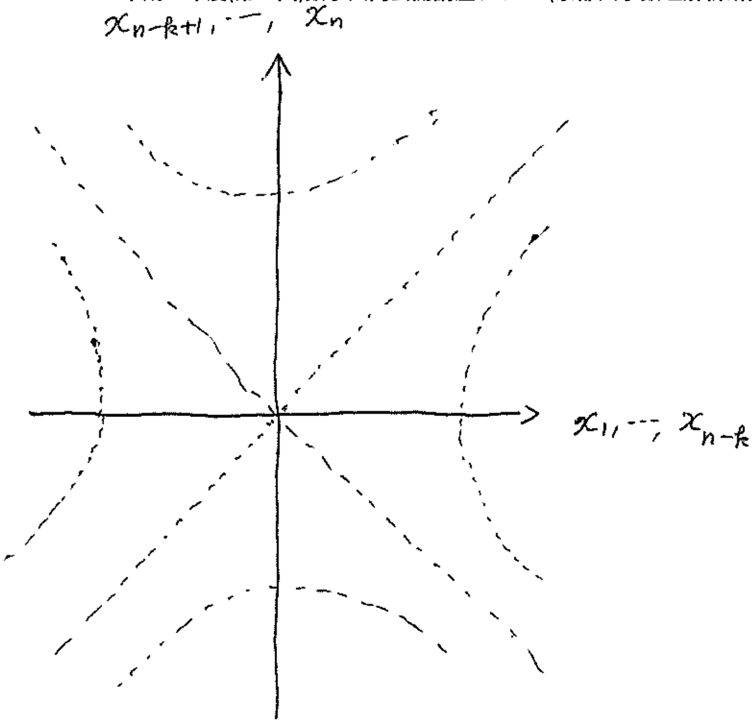
と同一視できます。上記の Morse の補題の状況では、$\{\mathbf{x}|f(\mathbf{x}) \leq f(p) - \epsilon\}$ から $\{\mathbf{x}|f(\mathbf{x}) \leq f(p) + \epsilon\}$ への変化は $x_{n-k+1}, \ldots, x_n$-方向の「橋」を架けることと了解できます。ここで、$x_{n-k+1}, \ldots, x_n$ は、f の Hesse 行列が負定値となる極大部分空間の方向であることに注意します。十分小さな正の実数 ϵ を取るとき、$M_{\leq f(p)-\epsilon}$ から $M_{\leq f(p)+\epsilon}$ への変化は、$\overline{D}^{n-k} \times \overline{D}^k$ を $D^{n-k} \times \partial\overline{D}^k$ が $M_{f(p)-\epsilon}$ の境界である $M_{f(p)-\epsilon}$ の一部と貼り合わせることと捉えられます。特に、$k = 0$ の時 (そのとき f は p で極大値をとります) は、D^n と $M_{f(p)-\epsilon}$ をそれぞれの境界 $\mathbf{S}^{n-1}$ と $M_{f(p)-\epsilon}$ をぴったり貼り合わせる操作になります。貼り合わせ方が違えば得られる空間も異なるので、貼り合わせ方が重要なデータです。

定義　滑らかな関数 $f : M \to \mathbf{R}$ の全ての臨界点が非退化であるとき、f を Morse 関数という。

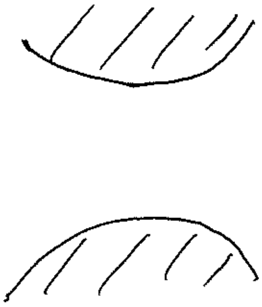
この節で説明したことから次の事実が分かります。

定理 (Reeb)　M を境界のない compact な n-次元微分可能多様体とする。M 上に Morse 関数で臨界点をちょうど2つ持つものが存在すれば、M は n-次元球面 $\mathbf{S}^n$ と同相である。

ここで、「同相」という用語がでてきましたが、位相空間論を知っている方でないとなじみがないかと思います。ここでは、M と N が同相であるとは、M と N の

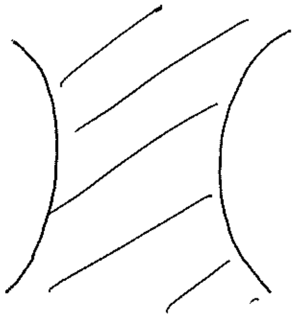


$x_1^2+\cdots+x_{n-k}^2-x_{n-k-1}^2-\cdots-x_n^2$ のレベル集合　（図4）



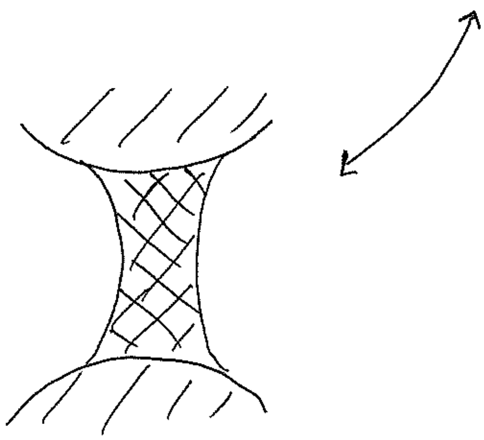
$$x_1^2+\cdots+x_{n-k}^2-x_{n-k-1}^2-\cdots-x_n^2=-\varepsilon$$

（図5）



$$x_1^2+\cdots+x_{n-k}^2-x_{n-k-1}^2-\cdots-x_n^2=+\varepsilon$$

（図6）



（図7）

間に一対一対応で、近い点を近い点に写すものがあることくらいですまそうと思います。この定理は、始めは球面とは分からない空間が球面であることを示すのに使えます。球面 $\mathbf{S}^n$ と同相な多様体 X で微分可能多様体としては $\mathbf{S}^n$ とは同一視できないものをエキゾティック球面と呼びます。Milnor は7次元にはエキゾティック球面が存在することを示しましたが、作った空間が球面と同相になることをみるのにこの定理を使いました。

3. Morse 関数とホモロジー

空間を理解する際に基本となる道具の１つにホモロジー群と呼ばれるものがあります。ホモロジー群の構成にはいくつもやり方がありますが、ここではそのいくつかの性質を述べることにします。(必要があれば、講演の際に語句の説明をします)

まず位相空間という概念があります。正確なことは位相空間論の教科書を見て頂きたいと思いますが、２つの集合 X, Y があるとその間の写像 $\phi : X \to Y$ に連続性という概念が定まります。逆の言い方をすると、写像が連続であることの意味が確定するようなデータが X, Y に与えられているということです。一般的ではないですが、今お話している題材に限れば、自然数で番号づけられた X の点列が収束するかどうかが決まっている（更にしかるべき性質を満たす）集合と思ってもらってよいです。そのとき写像が連続であるとは、X のいかなる収束する点列も ϕ により Y の収束する点列に写ることと言えます。

また ２つの連続写像 $\phi_0, \phi_1 : X \to Y$ がホモトピックであるとは、ϕ_0 を ϕ_1 に連続的に変形できることをいう。もう少し数学的な書き方をすると、閉区間 [0,1] と X の直積からの連続写像 $F : [0,1] \times X \to Y$ で、$F(0,x) = \phi_0(x),\ F(1,x) = \phi_1(x)$ なる F を ϕ_0 と ϕ_1 のホモトピーとよび、そのようなものが存在するとき ϕ_0 と ϕ_1 はホモトピックと呼ばれる。ホモロジー群の性質をいくつか挙げましょう。

- X を位相空間とすると、非負整数 q 毎に q-次ホモロジー群 $H_q(X)$ なるアーベル群が定まる。

- 特に X が一点 pt からなるときには、$H_0(\{pt\}) = \mathbf{Z}$, $H_q(\{pt\} = 0, q = 1, 2, \ldots$ となる。

- $\phi : X \to Y$ を位相空間 X から Y への連続写像とすると、アーベル群の準同型 $\phi_* : H_q(X) \to H_q(Y)$ が定まる。

- $\phi_0, \phi_1 : X \to Y$ がホモトピックであれば、$\phi_{0*} = \phi_{1*} : H_q(X) \to H_q(Y)$ である。

- X が その開部分集合 A, B の和集合となっていれば、次の完全系列がある。

$$\cdots \to H_{q+1}(X) \to H_q(A \cap B) \to H_q(A) \oplus H_q(B) \to H_q(X) \to H_{q-1}(A \cap B) \to \cdots$$

もちろんこれらの他にも大事な性質はありますが、今回の話ではここで止めておきます。微分可能多様体 M 上に Morse 関数があると、そのレベル集合で分割することにより M は、いくつかの n-次元閉球体 $\overline{D}^n$ に順次 $\overline{D}^{n-k} \times \overline{D}^k$ を前節で説明した要領で貼ってゆき、最後にいくつかの $\overline{D}^n$ を貼って蓋をして得られると理解できました。$\overline{D}^n$ はその中心 0 に連続的に潰せるので、上記の４番目の性質から $H_q(\overline{D}^n)$ は $H_q(\{pt\})$ と同型になり、後者は２番目の性質で分かっています。それに、いくつかの $\overline{D}^{n-k} \times \overline{D}^k$ （k-ハンドルと呼ばれます）を貼るとホモロジーがどう変わるかは、５番目の性質（Mayer-Vietoris 完全系列）を用いて記述されます。こうして、Morse 関数を通して M のホモロジーの情報を得ることができます。

ホモロジーだけであれば、Morse 関数の臨界点とそれらを繋ぐ勾配曲線の情報を用いたこれから述べる記述も可能です。Morse 関数 f の臨界点 p での指数を $\mu(p)$ として、$k = 0, 1, \ldots, n$ 毎に、$C(f)_k$ を $\mu(p) = k$ である臨界点に対応した $\langle p \rangle$ で生成された自由アーベル群とします。勾配曲線を定義する際に Riemann 構造というものを使うと書きましたが、Riemann 構造を十分一般的に取ると、$\mu(p) = \mu(q) + 1$ のとき、臨界点 q から p に向かう勾配曲線は有限個になることが分かります。詳しくは述べられませんが、それぞれに $+$ か $-$ の符号を付けることができます。符号付きで勾配曲線を数えてそれを $n(p, q)$ で表すことにします。こうした状況で、 k 毎に準同型を

$$\partial_q : C(f)_k \to C(f)_{k-1}$$

を

$$\langle p \rangle \mapsto \sum_{\mu(q)=k-1} n(p, q) \langle q \rangle$$

により定めます。次の事実が重要です。

命題　合成写像 $\partial_{k-1} \circ \partial_k$ は零写像である。

ここで、

$$\mathrm{Ker}\partial_k = \{c \in C(f)_k | \partial_k c = 0\}$$

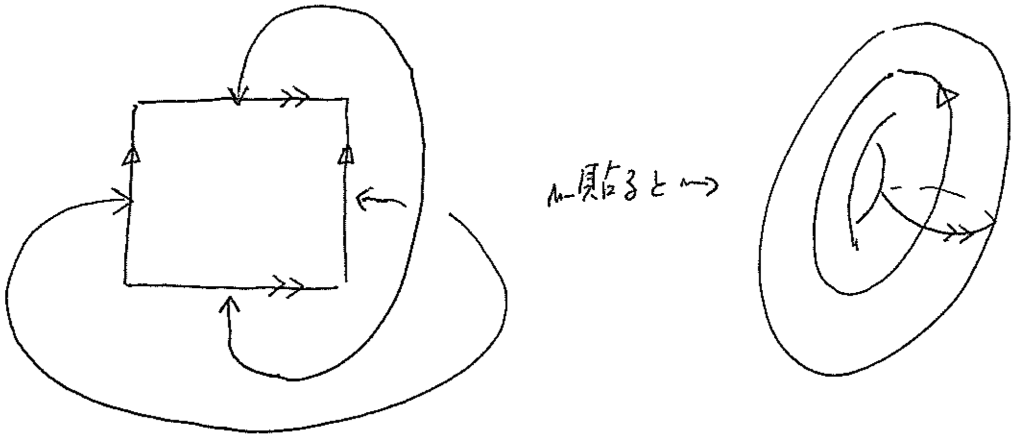
$$\mathrm{Im}\partial_{k+1} = \{\partial_{k+1}(a) | a \in C(f)_{k+1}\}$$

とおくと、$\mathrm{Im}\partial_{k+1}$ は $\mathrm{Ker}\partial_k$ の部分群であることが分かり、剰余群を取ることができ、

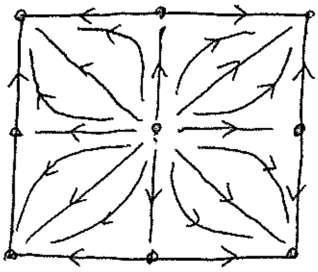
$$H_k(f) = \mathrm{Ker}\partial_k / \mathrm{Im}\partial_{k+1}$$

を f の Morse 複体 $(C(f)_*, \partial_*)$ の k-次ホモロジー群あるいは f の k-次ホモロジー群と呼びます。

２つの Morse 関数 f_1, f_2 に対して、Morse 複体を作ると、一般には異なる複体となりますが、ホモロジー群を取ると、それらは同一視できることが分かります。実際、次のことが知られています。



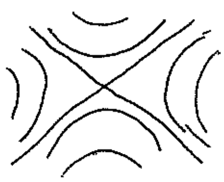
(図8)



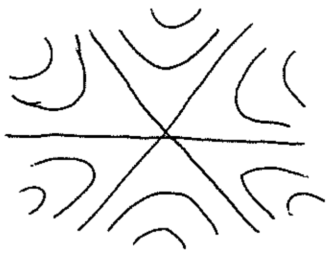
トーラス上のあるMorse関数の勾配曲線群

(図9)

x^2-y^2の等高線　と　x^3-xy^2の等高線



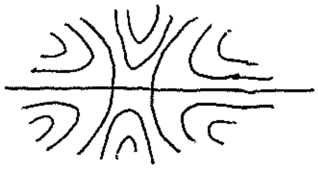
(図10)



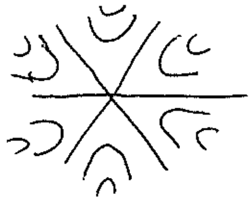
(図11)

非退化な臨界点が重なると退化した臨界点が現れる。

(図12)



(図13)



(図14)

Morse 関数 f の勾配ベクトル場 ∇f の消えているところ（零点）は f の臨界点に他なりません。∇f の零点 p に対し、f の Hesse 行列を使って、臨界点の指数 $\mu(p)$ が決まりました。これが偶数であるか、奇数であるかにより ∇f の零点に $(-1)^{\mu(p)}$ により符号をつけます。上の定理の１つの帰結として、∇f の零点を符号をつけて数えたものは、M の k-次ホモロジー群の階数にに $(-1)^k$ を掛けて k について足し合わせたもの（Euler 数）に等しいことが示されます。これを土台にして、議論を重ねると、勾配ベクトル場とは限らないベクトル場 X で零点が孤立しているとすると、各零点 p に符号付の重複度 $m(p)$ が定まり、$m(p)$ を X の全ての零点にわたって和を取ると、M の Euler 数となることも分かります（Poincaré-Hopf の定理）。

空間 M にあった Morse 関数を見つけることができれば、この定理により M のホモロジーがよく分かります。特に、∂_k が全て零写像となるものが見つけられれば、臨界点の様子が分かれば M のホモロジー群が分かることになります。この公開講座ではお話する時間はないと思いますが、シンプレクティック構造と呼ばれるものの対称性（正確には、後で出て来ますが、ハミルトン的なもの）があるとそれに応じて運動量写像と呼ばれるものがあり、それを用いて空間のホモロジーを調べることができます。

4. Morse 理論の広がり

Morse 理論の発展に大きく貢献した１人である Raoul Bott 氏は、Morse theory indomitable (Publication Mathematiques IHES, No. 68, 99-114, 1988) で Morse 理論がいろいろな広がりを見せていることを書いています。Morse は Riemann 多様体の閉測地線（閉曲線にその長さを対応させる関数の臨界点、特に長さ最小の閉曲線は閉測地線である）を探し、それがどのくらいあるのかという問題のように、空間 M の中の閉曲線全体（M のループ空間と呼ばれています）などの無限次元の空間上の関数の臨界点に関する議論（変分問題）を動機としてこの方向の研究を始めました。有限次元の微分可能多様体のトポロジーの研究では、高次元のポアンカレ予想の解決（Smale）などの多くの結果のもとになっていて、Morse 理論は現代の幾何学の基礎の１つとなっています。

Bott は ユニタリー群や直交群などのループ空間のホモトピー群を Morse 理論を用いて調べました。中でも Bott の周期性定理と呼ばれるものは有名です。この定理やその発展形は、現代の幾何学で重要な Atiyah-Singer の指数定理などへと繋がっています。ここでは、Bott の研究結果の応用の１つを挙げて、色々な数学が繋がっていることを知ってもらいたいと思います。

n-次元球面 $\mathbf{S}^n$ 上に零点を持たないベクトル場が存在するためには、n が奇数でなければならないことは、前節で触れた Poincaré-Hopf の定理から分かります。実は、境界のない compact 微分可能多様体 M の Euler 数が消えていれば、M 上には零点を持たないベクトル場が存在することが知られていますが、球面の場合であれば、$\mathbf{R}^{2m}$ を 複素ベクトル空間 $\mathbf{C}^m$ と見ると、その単位ベクトル達のなす集合が $\mathbf{S}^{2m-1}$ でそこには絶対値 1 の複素数を掛けることによる対称性があります。この無限小版

として零点を全く持たないベクトル場を作ることができます。それでは、$\mathbf{S}^{2m-1}$ の上に $2m-1$ 個のベクトル場で $\mathbf{S}^{2m-1}$ のどの点でもそれらが線形独立になるようなものが取れるのはどのような次元 $2m-1$ の時でしょうか？（各点で線形独立となる、次元に等しい個数のベクトル場が存在するとき、多様体は平行化可能であるといいます。）Milnor と Bott のやり取りをそのまま論文にした

R. Bott and J. Milnor, On the parallelizability of the spheres, Bulletin of American Mathematical Society, **64**, 87-89 (1958)

の Corollary 2 あるいは

M. Kervaire, Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$, Proceedings of National Academy of Science U.S.A. **44**, 280-283 (1958)

に次の定理があります。

定理　球面 $\mathbf{S}^{n-1}$ が平行化可能であるのは $n-1$ が $1, 3, 7$ の場合に限る。

$\mathbf{R}^2$ は複素数全体, $\mathbf{R}^4$, $\mathbf{R}^8$ はそれぞれ４元数全体、８元数 (Cayley 数) 全体と同一視されるので、先ほどの $\mathbf{S}^{2m-1}$ が零点を持たないベクトル場を持つことを示した時のように、$\mathbf{S}^3$, $\mathbf{S}^7$ にはそれぞれ絶対値 1 の４元数、８元数のかけ算による対称性があり、それからこれらも平行化可能であることが分かります。４元数、８元数というものはお聞きになられた方もいらっしゃるかと思いますが、実数や複素数のように、足し算、かけ算ができ、（足し算はベクトル空間での足し算です）それらは分配法則を満たし、0 以外の元はかけ算に関する逆元を持ちます。４元数の場合はかけ算は結合法則を満たしますが、かける順番を変えると一般には結果が変わってしまいます。８元数ではかけ算の結合法則も成り立ちません。

$\mathbf{R}^n$ が足し算、$\mathbf{R}$ 上双線形なかけ算を持ち、分配法則を満たし、0 以外はかけ算に関する逆元を持つとき、実数体上の可除多元環であると言います。

J. Milnor, Some consequences of a theorem of Bott, Annals of Mathematics, **68**, 444-449 (1958)

では次の定理が示されています。

定理　実数体上の可除多元環の次元は $1, 2, 4, 8$ に限る。

5. Hamilton 力学系と作用汎関数

滑らかな関数 $\mathbf{R}^{2n}$ 上の $h(q_1, \ldots, q_n, p^1, \ldots, p^n)$ に対して、$\gamma(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ に関する次の常微分方程式 (Hamilton の運動方程式) を考えます。

$$(*) \qquad \frac{d}{dt}q_i(t) = \frac{\partial h}{\partial p^i}(\gamma(t)), \quad \frac{d}{dt}p^i(t) = -\frac{\partial h}{\partial q_i}(\gamma(t)), \quad i = 1, \ldots, n$$

微分方程式の右辺をベクトル場

$$X_h = (\frac{\partial h}{\partial p^1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial p^n}, -\frac{\partial h}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial h}{\partial q_n})$$

とみると、この方程式の解 $\gamma(t)$ はベクトル場 X_h の積分曲線に他なりません。古典力学でポテンシャル $U(q_1, \ldots, q_n)$ のもとでの Newton の運動方程式は、上で $h = K + U$, K は運動エネルギー、のときの Hamilton の運動方程式に書き換えられます。

関数 h が時間 t に依る場合を考えましょう。即ち、$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{2n}$ 上の関数 $H(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)))$ に対して、$(*)$ の右辺の h の代わりに $h_t(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ を使った方程式を $(*)_H$ とします。H が t について 1-周期的、即ち $H(t+1, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ が成り立つ、として、$(*)_H$ が周期 1 の周期軌道を持つかという問を考えます。[1]

天下り的ではありますが、滑らかな閉曲線 $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^{2n}$ に対して次の積分を考えます。

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^n p^i(t)\frac{dq_i(t)}{dt} - H(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))\Big)dt$$

$\mathbf{R}^{2n}$ 内の閉曲線全体からなる空間を $\mathcal{L}(\mathbf{R}^{2n})$ と書くことにすると、$\mathcal{A}_H$ は $\mathcal{L}(\mathbf{R}^{2n})$ 上の関数を定めることになります。すると、 γ が $(*)_H$ の周期解であることと、γ が $\mathcal{A}_H$ の臨界点であることが同値であることが次のようにして分かります。

$\mathbf{R}^n$ に値を取る周期関数 $\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)$ と $\epsilon \in \mathbf{R}$ として、$(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ の摂動

$$(\mathbf{q}_\epsilon(t), \mathbf{p}_\epsilon(t)) = (\mathbf{q}(t) + \epsilon\mathbf{a}(t), \mathbf{p}(t) + \epsilon\mathbf{b}(t))$$

を考えます。$\mathcal{A}_H$ の $(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t))$-方向の微分を計算すると、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}\mathcal{A}_H(\mathbf{q}_\epsilon, \mathbf{p}_\epsilon) = & \int_0^1 \sum_{i=1}^n \Big(a^i(t)(\frac{d}{dt}q_i(t)) + (\frac{d}{dt}b_i(t))p^i(t) - b_i(t)\frac{\partial H}{\partial q_i} - a^i(t)\frac{\partial H}{\partial p^i}\Big)dt \\
= & \int_0^1 \sum_{i=1}^n \Big(a^i(t)(\frac{dq_i(t)}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p^i}) + b_i(t)(-\frac{dp^1(t)}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q_i})\Big)dt
\end{aligned}$$

となります。ここで、$\gamma(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ が $\mathcal{A}_H$ の臨界点であることは、任意の周期関数 $(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t))$-方向の微分が消えることです。そのとき、

$$\frac{d}{dt}q_i(t) = \frac{\partial H}{\partial p^i}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)), \quad \frac{d}{dt}p^i(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$$

が成り立つ、即ち $(*)_H$ の周期 1 の周期軌道であること、が分かります。逆を辿れば、上で述べた同値性を得ます。こうして、$(*)_H$ の周期 1 の周期軌道を探すことは $\mathcal{A}_H$ の臨界点を探す問題と同値になりました。

[1]周期軌道が分かったとしても $(*)_H$ の一般の解の様子 (力学系と呼ばれる) の理解にはほど遠いです。

しかし、例えば、$H(t,\mathbf{q},\mathbf{p})=q_1$ とすると、周期軌道がないことが容易にわかるので、周期軌道を持つためには H に何らかの条件を付ける必要があります。 ここでは、H が $\mathbf{q},\mathbf{p}$ の各座標方向についても周期的である場合について考えます。

有限次元の Morse 理論では、Riemann 計量を取ってそれに関する勾配流を考えることが１つの鍵でした。$\mathcal{L}(\mathbf{R}^{2n})$ は、前半で扱った有限次元の空間ではなく、無限次元の空間であり、いかなる計量（とそれに関する空間の完備化と呼ばれる操作）を取るかにより、勾配流の考察も大きく変わって来ます。Conley と Zehnder は、H が時間、空間の各座標に関して周期的である場合を次の論文で扱いました。

C. Conley and E. Zehnder, The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold, Inventiones Mathematicae, **73**, 33-49 (1983)

彼らは、無限次元空間 $\mathcal{L}(\mathbf{R}^{2n})$ を十分大きな有限次元の空間と残りの無限次元の空間の積に分解し、問題の本質がその有限次元の空間に含まれているようにできることを見抜いて、元の問題を有限次元で臨界点を探す問題に帰着させることで周期軌道の存在を示しました。

$\mathbf{R}^{2n}$ に限らず、シンプレクティック多様体と呼ばれる空間に対して、上の問題は定式化できます。シンプレクティック多様体上の滑らかな関数 h に対して、X_h を定めることができ[2]、周期軌道はある（多価）関数 $\mathcal{A}_H$ の臨界点として捉えることができます。シンプレクティック多様体として compact で境界のないものを考えて、X_{h_t} の周期軌道があるかどうかという問 (Arnold による予想の１つ) を考えます。上で述べた Conley-Zehnder の定理は、シンプレクティック多様体として偶数次元のトーラス $\mathbf{R}^{2n}/\mathbf{Z}^{2n}$ の場合にこの問に肯定的な解答を与えます。

一般の compact で境界のないシンプレクティック多様体 M 上で考えると、Conley-Zender が用いたような有限次元近似のアイデアがうまく行きません。技術的に難しいというだけではなくて、偶数次元トーラスでは起こらないこと (概複素構造に関する正則有理曲線の存在など) がその理由です。そこで、有限次元近似をせずに $\mathcal{L}(M)$ 上でそのまま議論をすることになります。また、$\mathbf{R}^{2n}$ あるいはそれを周期的にしたトーラスの場合には、$\mathcal{L}(\mathbf{R}^{2n})$ あるいは $\mathcal{L}(\mathbf{R}^{2n}/\mathbf{Z}^{2n})$ にある計量を入れると、勾配流が定義できるのですが、同様の計量を $\mathcal{L}(M)$ に入れて、$\mathcal{L}(M)$ を完備化しようとすると「多様体」として扱うことができなくなり、また別の（ある意味で標準的なやり方で）計量を入れると、勾配ベクトル場の積分曲線の方程式が、初期値問題に関して適切でなく、従って有限次元の時のような勾配流が構成できないという困難に遭遇します。

Andreas Floer は、こうした状況であるにもかかわらず、現在 Floer (co)homology と呼ばれている $\mathcal{A}_H$ の Morse (co)homology の類似物を

A. Floer, Morse theory for Lagrangian intersections, Journal of Differential Geometry **28**, 513-547 (1988) など数編の論文

[2]Darboux の定理というものにより、局所的に良い座標の存在が知られていて、その座標に関して X_h は前述の定義式で定めることができます。

A. Floer, Symplectic fixed points and holomorphic spheres, Communications in Mathematical Physics **120** 575-611, (1989)

　において(M に条件をつけてではありますが) 構成することに成功しました。Morse 関数の臨界点と、指数の差が 1 の臨界点を繋ぐ勾配曲線から Morse (co)homology は構成できました。指数の差が 1 の臨界点を繋ぐ勾配曲線を M の中のある偏微分方程式の解と見直し、その立場で偏微分方程式の解空間の解析をすることで (co)homology 理論を構築できることを明らかにしたのです。Arnold の予想を動機に始まった Floer の理論は、すぐにゲージ理論の設定でも研究されました。その後いろいろな変種も考えられています。Floer 理論は誕生してから早や四半世紀が過ぎました。今では多くの研究者が Floer 理論の深化、応用に関わって発展しています。

参考文献

Morse 理論についてはいろいろな本で解説されていますが、ここでは次の３冊を挙げます。

J. Milnor, Morse Theory, Annals of Mathematical Studies **51**, Princeton University Press, 1963 (吉岡書店から日本語訳もあり)

長野　正　　大域変分法　共立出版 1971

松本幸夫　Morse 理論の基礎　岩波書店 1997

　ここで触れたシンプレクティック幾何学について進んで知りたいと思われた方には

H. Hofer and E. Zehnder, Symplectic invariants and Hamiltonian Dynamics, BIrkhäuser, 1994

を見られることをお勧めします。すでに書かれてから２０年近く経ちますが、この方面への入門書としては今でも優れていると思います。