

ビリヤードからシンプレクティック・トポロジーへ

入江慶

ハミルトンによる解析力学の定式化では,位置と運動量を組にして相空間というものを考えます.相空間の幾何学,特にその大域的・位相的な性質の研究は,シンプレクティック・トポロジーなどと呼ばれていて,近年盛んになっています.その起源のひとつはハミルトン力学系の周期軌道の研究で,これは少なくともポアンカレによる天体力学の研究にまで遡ります.

講義の前半部では,例としてビリヤード球の運動における周期軌道について考察し,特にバーコフによって証明された,平面凸領域上のビリヤードにおける周期軌道の存在定理を解説します.この定理にはおおまかに二通りのアプローチがあります.一つは配位空間上の変分法,特にミニマックス法を用いるもので,これは2章で解説します.もう一つは相空間の幾何学を用いるもので,この方法を用いると,上の定理は(おおまかには)ツイスト写像の固定点に関するポアンカレ・バーコフの定理の特別な場合と考えることができます(3章で解説します).以上の内容は本質的に,1920年代のバーコフの著書[3]に含まれているものです.

一方で,アーノルドは60-70年代に,ポアンカレ・バーコフの定理の一般化として,ハミルトン微分同相写像の固定点に関する予想を定式化しました.この予想(アーノルド予想)は,シンプレクティック・トポロジーの創生期に重要な役割を果たしました.4章では,ポアンカレ・バーコフの定理からアーノルド予想へと至る道筋を解説し,シンプレクティック・トポロジーへの橋渡しとしたいと思います.

以下では常体で書かせていただきます.

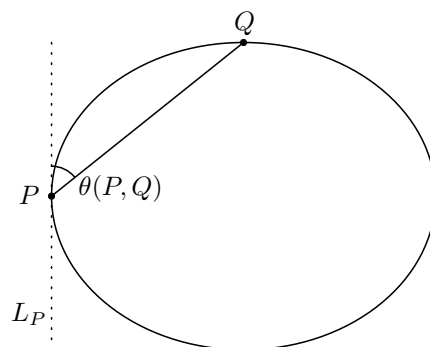
1 ビリヤード力学系

前半のテーマは,ビリヤード球の運動である.問題設定を,数学の言葉で述べるところから始めたい.

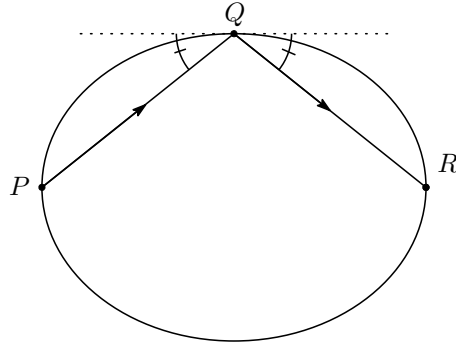
C を平面上のなめらかな単純閉曲線とする.すなわち, C は一对一のパラメータ表示 $\gamma: \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow C$ であって,何回でも微分可能で,任意の $t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ について $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ となるものを持つ. D を, C で囲まれる有界な領域とする. D は境界も含むとし(すなわち $C \subset D$),境界 C を除いた部分 $D^\circ := D \setminus C$ を D の内部という.

C のガウス曲率がいたるところ正であるとき, D は強い意味で凸であるという.このとき, C 上の任意の相異なる二点 P, Q について,線分 PQ の内部は D° に含まれる.

以下の議論では, D は強い意味で凸とする. C 上の相異なる二点 P, Q について,線分 PQ と P における接線 L_P のなす角を, L_P からみて時計回りに測った値を $\theta(P, Q)$ とおく.



領域 D をビリヤード台とみなして, その上でビリヤード球の運動を考えたい. つまり, 内部 D° では直進し, 境界で反射するような D 上の質点の運動を考える. 「境界で反射する」ということを, 正確にのべると次のようになる: P, Q, R を境界 C 上の点とし, P から Q に直進した質点が, Q で反射し, 次に点 R で境界 C と衝突するとき, $\theta(Q, R) = \pi - \theta(Q, P)$ が成り立つ.



$C^{(2)} := \{(P, Q) \in C \times C \mid P \neq Q\}$ とおき, 写像 $f: C^{(2)} \rightarrow C^{(2)}$ を $f(P, Q) := (Q, R)$ で定義する. これをビリヤード写像という. D 上で運動するビリヤード球を考え, 境界 C と衝突する点を時間順に並べてできる列 $(P_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ を考える. P_k から P_{k+1} までは直進するだけなので, ビリヤード球の挙動は点列 $(P_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ で完全に記述される. この講義では, このような点列をビリヤード軌道ということにする.

C 上の点列 $(P_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ がビリヤード軌道であることと, 任意の $k \in \mathbb{Z}$ について $P_k \neq P_{k-1}$ および $f(P_{k-1}, P_k) = (P_k, P_{k+1})$ が成り立つことは同値である. したがって P_0, P_1 を決めれば, 残りの P_k は帰納的に決定される. たとえば C が (x, y) 平面上の単位円 $x^2 + y^2 = 1$ であり, $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$ である場合は, 任意の整数 k について $P_k = (\cos k\theta, \sin k\theta)$ となる. このように, 一定のルールに従って時間発展する系の挙動を調べる分野は, 力学系とよばれている.

後で有用となる, ビリヤード軌道の特徴付けについて説明したい. C のパラメータ $\gamma: \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow C$ をとり, $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ 上の関数 I を $I(s, t) := |\gamma(s) - \gamma(t)|$ で定める. $s \neq t$ の範囲では I は C^∞ 級の関数である. $t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ が $t_0 \neq t_1, t_1 \neq t_2$ を満たすとき,

$$f(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) = (\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \iff \frac{\partial}{\partial t_1} \{I(t_0, t_1) + I(t_1, t_2)\} = 0 \quad (1.1)$$

が成り立つことを示してみよう. 右辺の条件は γ の取り方によらないので, γ は弧長パラメータ (すなわち任意の $t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ について $|\dot{\gamma}(t)| = 1$) であり, かつ反時計回りのパラメータであるとしてよい. このとき任意の $s, t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, $s \neq t$ について

$$\frac{\partial}{\partial s} I(s, t) = \cos \theta(s, t), \quad \frac{\partial}{\partial t} I(s, t) = \cos \theta(t, s) \quad (1.2)$$

が成り立つ (ただし $\theta(s, t)$ は $\theta(\gamma(s), \gamma(t))$ の略記である).

問 1.1. (1.2) が成り立つことを確認せよ.

(1.2) より, $t_0 \neq t_1, t_1 \neq t_2$ を満たす任意の $t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ について

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \{I(t_0, t_1) + I(t_1, t_2)\} = \cos \theta(t_1, t_0) + \cos \theta(t_1, t_2)$$

が成り立つ. さらに右辺が 0 であることと $\theta(t_1, t_0) + \theta(t_1, t_2) = \pi$ が成り立つことは同値なので, (1.1) が示された. 以上の議論をまとめて次を得る.

補題 1.2. $\gamma : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow C$ を C のパラメータとする. このとき $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ 上の任意の点列 $(t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ について, $(\gamma(t_k))_{k \in \mathbb{Z}}$ がビリヤード軌道であることと, 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して $t_{k-1} \neq t_k$ かつ

$$\frac{\partial}{\partial t_k} \{I(t_{k-1}, t_k) + I(t_k, t_{k+1})\} = 0$$

が成り立つことは同値である.

注意 1.3. ここではビリヤード台の形を平面凸領域に限定したが, 勿論より一般の図形の上でビリヤードを考えることも可能である. ここで紹介するのはビリヤードにまつわる多様な数学のごく一部に過ぎないので, 他のテーマ (双曲力学系との関わりなど) については [10] などを参照されたい.

2 周期的なビリヤード軌道

ビリヤード軌道の定義は前章で説明したように非常に簡単だが, その長時間にわたる挙動を理解するのは難しい問題である. 同じことが力学系全般で言えるが, そこで理解の第一歩として, 周期的な軌道がどのくらいあるかを調べることがよく行われる. この章では, 周期的なビリヤード軌道について調べる.

一般に, C 上の点列 $P = (P_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ と整数 j に対して, 点列 $P^{(j)}$ を $P_k^{(j)} := P_{k+j}$ で定義する (P から $P^{(j)}$ を得る操作を, 添字のシフトということにしよう). P が周期的であるとは, ある自然数 m が存在して $P^{(m)} = P$ となることであり, これを満たす最小の m を P の周期という. P が周期 m の点列ならば, 添字のシフトにより得られる $P^{(1)}, \dots, P^{(m-1)}$ もそうであり, これら m 個の点列はすべて異なる.

$P = (P_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ を C 上の周期 m の点列とし, 任意の $k \in \mathbb{Z}$ について $P_{k+1} \neq P_k$ が成り立つとする. C の反時計回りのパラメータ $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow C$ を一つ固定し, $t_0, \dots, t_m \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を $\gamma(t_j) = P_j$ を満たすようにとる. このとき $j = 1, \dots, m$ について $t_j = t_{j-1} + d_j$ を満たす $0 < d_j < 1$ がただ一つ存在する. すると $d_1 + \dots + d_m$ は 1 以上 $m-1$ 以下の自然数であり, γ の取り方によらない. これを P の回転数ということにする.

この章では, バーコフ (原論文ではないが [3]) による次の結果を解説したい.

定理 2.1 (バーコフ). m を自然数, r を m と互いに素な 1 以上 $m-1$ 以下の自然数とする. このとき, 周期 m , 回転数 r のビリヤード軌道であって, 添字のシフトで移り合わないものが少なくとも 2 個存在する.

定理 2.1 の証明の最初のステップは, 所与の条件を満たす周期的なビリヤード軌道の, 変分法による特徴付けである. m, r を定理 2.1 の仮定を満たす自然数として

$$\mathcal{C} := \{(t, s_1, \dots, s_{m-1}) \mid t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, s_1, \dots, s_{m-1} \in \mathbb{R}, s_1, s_2 - s_1, \dots, s_{m-1} - s_{m-2}, r - s_{m-1} \in (0, 1)\},$$

$$\bar{\mathcal{C}} := \{(t, s_1, \dots, s_{m-1}) \mid t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, s_1, \dots, s_{m-1} \in \mathbb{R}, s_1, s_2 - s_1, \dots, s_{m-1} - s_{m-2}, r - s_{m-1} \in [0, 1]\}$$

とおく. また, 以下便宜的に $s_0 := 0, s_m := r$ とおく. 曲線 C の反時計回りのパラメータ表示 $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow C$ をとり, 関数 $\mathcal{I} : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{I}(t, s_1, \dots, s_{m-1}) := \sum_{j=1}^m |\gamma(t + s_j) - \gamma(t + s_{j-1})|$$

で定義する. \mathcal{I} は連続関数であり, \mathcal{C} に制限すれば C^∞ 級の関数である. $p = (t, s_1, \dots, s_{m-1}) \in \mathcal{C}$ に対して, C 上の点列 $P = (P_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ を

- $k = 1, \dots, m$ ならば $P_k := \gamma(t + s_k)$,
- 任意の $k \in \mathbb{Z}$ について $P_{k+m} = P_k$

により定義しよう. すると補題 1.2 より, P がビリヤード軌道であることと p が \mathcal{I} の臨界点であること, つまり

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t}(p) = \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial s_1}(p) = \cdots = \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial s_{m-1}}(p) = 0$$

が成り立つことは同値である. また, P の周期はちょうど m である. 実際, P の周期が m より小さいとすると (m' とおく) $l := m/m'$ は正の自然数になるが, このとき $s_{m'}$ も正の自然数であり $r = ls_{m'}$ が成り立つ. これは m と r が互いに素であることに反する. P の回転数は明らかに r である. 写像 $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ を

$$R(t, s_1, \dots, s_{m-1}) := R(t + s_1, s_2 - s_1, \dots, s_{m-1} - s_1, s_m - s_1)$$

で定義する. これは周期 m の写像であり, \mathcal{I} を保つ, すなわち任意の $p \in \mathcal{C}$ について $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(R(p))$ が成り立つ. ゆえに $p \in \mathcal{C}$ が \mathcal{I} の臨界点ならば, $R(p), \dots, R^{m-1}(p)$ も \mathcal{I} の臨界点である. これは, ビリヤード軌道における添字のシフトに対応する. 以上より, 定理 2.1 は次の命題に帰着された.

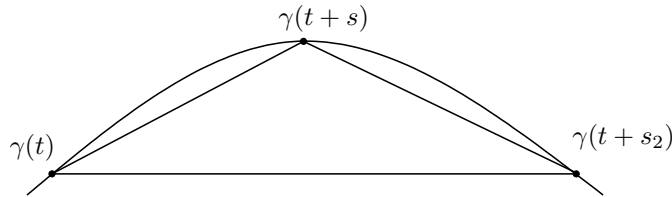
命題 2.2. $\mathcal{I}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ の臨界点で, 写像 R, \dots, R^{m-1} により移り合わないものが少なくとも 2 個存在する.

一般に, 関数の臨界点を見つけるもっとも安直な方法は, 最大値, 最小値をとる点を探すことである.

補題 2.3. $\mathcal{I}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ は最大値を持つ.

証明. $\mathcal{I}: \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ が最大値を持つことは, 「コンパクトな位相空間上の連続関数は最大値を持つ」という一般論から従う. 問題は, 最大値をとる点 (t, s_1, \dots, s_{m-1}) が \mathcal{C} に入っているか, つまり任意の $j = 1, \dots, m$ について $s_j - s_{j-1} \in (0, 1)$ が成り立つか, ということである (以下, $d_j := s_j - s_{j-1}$ とおく). そうでないとする, ある j について $d_j \in \{0, 1\}$ となり, 一方で全ての $j = 1, \dots, m$ について $d_j \in \{0, 1\}$ となることはない (その場合 $\mathcal{I}(t, s_1, \dots, s_{m-1}) = 0$ となる), ある $1 \leq j \leq m$ が存在して $d_j \in \{0, 1\}$ かつ 「 $d_{j-1} \in (0, 1)$ または $d_{j+1} \in (0, 1)$ 」 が成り立つ.

例として $d_1 = 0, d_2 \in (0, 1)$ となる場合を考えよう (一般の場合もほぼ同様である). このとき $s_1 = 0, s_2 = d_2$ であり, 任意の $s \in (0, s_2)$ について, $\gamma(t+s)$ は $\gamma(t)$ と $\gamma(t+s_2)$ を結ぶ線分の上にない (D が強い意味で凸であることから従う). 従って $|\gamma(t) - \gamma(t+s)| + |\gamma(t+s) - \gamma(t+s_2)| > |\gamma(t) - \gamma(t+s_2)|$ が成り立つ (三角不等式).



ゆえに $\mathcal{I}(t, s_1, s_2, \dots, s_{m-1}) < \mathcal{I}(t, s, s_2, \dots, s_{m-1})$ となるが, これは \mathcal{I} が (t, s_1, \dots, s_{m-1}) において最大値をとることに反する. □

$\mathcal{I}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ が最大値をとる点をひとつ選んで p_0 とおく. このとき $p_1 := R(p_0), \dots, p_{m-1} := R^{m-1}(p_0)$ も \mathcal{I} の最大値をとる臨界点になる. 命題 2.2 を示すためには, この m 個の他に少なくともひとつ臨界点が存在することを示せばよい. そのためにミニマックス法という手法を用いる.

\mathcal{C} は連結であるので, p_0 と p_1 をつなぐ道, すなわち連続写像 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$ であって $\gamma(0) = p_0, \gamma(1) = p_1$ を満たすものが存在する. このような道全体の集合を $\mathcal{P}(p_0, p_1)$ とおく. 各 $\gamma \in \mathcal{P}(p_0, p_1)$ について $\mathcal{J}(\gamma) := \min_{0 \leq \tau \leq 1} \mathcal{I}(\gamma(\tau))$ とおいて,

$$c := \sup_{\gamma \in \mathcal{P}(p_0, p_1)} \mathcal{J}(\gamma)$$

を考える (右辺で \max でなく \sup となっているのは, 最大値が存在する保証がないからである). このとき次が成り立つ.

補題 2.4. c は \mathcal{I} の臨界値である. すなわち $c = \mathcal{I}(p)$ を満たす \mathcal{I} の臨界点 p が存在する.

ここで, \mathcal{I} の最大値をとる点が有限個か無限個かで場合分けをしよう:

- \mathcal{I} の最大値をとる点が有限個の場合: このとき $c < \max \mathcal{I}$ となることが, 補題 2.3 の証明と似た議論で示せる. 補題 2.4 より $c = \mathcal{I}(p)$ なる臨界点 p が存在するが, $c \neq \max \mathcal{I}$ より p は p_0, \dots, p_{m-1} とは異なるので命題 2.2 が成り立つ.
- \mathcal{I} の最大値をとる点が無限個ある場合: このとき, これらの無限個の点は全て \mathcal{I} の臨界点なので, 命題 2.2 が成り立つことは明らかである.

これで, 命題 2.2 の証明は補題 2.4 に帰着された.

補題 2.4 の証明は, \mathcal{I} の勾配ベクトル場 $\nabla \mathcal{I} := (\partial \mathcal{I} / \partial t, \partial \mathcal{I} / \partial s_1, \dots, \partial \mathcal{I} / \partial s_{m-1})$ を用いた考察によりなされる. $\nabla \mathcal{I}$ は \mathcal{C} 上で定義された C^∞ 級のベクトル場であり, 明らかに $p \in \mathcal{C}$ が \mathcal{I} の臨界点であることは $\nabla \mathcal{I}(p) = 0$ と同値である. 証明のポイントは, $\nabla \mathcal{I}$ が次の二つの性質を満たすことである.

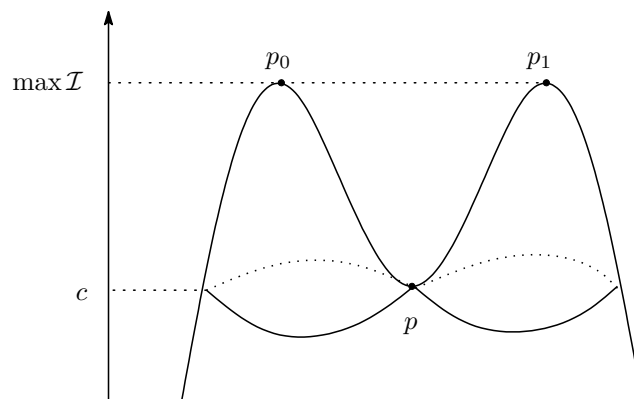
- (a): 任意の $q \in \mathcal{C}$ について, 写像 $\varphi_q : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{C}$ であって $\varphi_q(0) = q, \frac{d}{du} \varphi_q(u) = \nabla \mathcal{I}(\varphi_q(u)) (\forall u \geq 0)$ を満たすものが (ただひとつ) 存在する.
- (b): \mathcal{C} 上の点列 $(q_j)_{j=1,2,\dots}$ について, $\lim_{j \rightarrow \infty} |\nabla \mathcal{I}(q_j)| = 0$ が成り立つならば, $(q_j)_j$ は \mathcal{C} の点に収束する部分列を持つ (このとき, 収束先は \mathcal{I} の臨界点である).

(a) を $\nabla \mathcal{I}$ の (正方向の) 完備性といい, (b) をパレー・スモール条件^{*1}という. \mathcal{I} の定義域 \mathcal{C} はコンパクトでないので, $\nabla \mathcal{I}$ が性質 (a), (b) を満たすかどうかは明らかでない. 今の状況では補題 2.3 と似た議論により (a), (b) が成り立つことが確かめられるが, 詳細は省略する. $\nabla \mathcal{I}$ が性質 (a), (b) を満たすことを認めると, 次のような議論で c が \mathcal{I} の臨界値であることが証明できる (これは, 一般的な設定で通用する議論である).

証明. c が \mathcal{I} の臨界値でないと仮定しよう. すると (b) より, ある $\varepsilon, \delta > 0$ が存在して, $\mathcal{I}(q) \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ なる任意の $q \in \mathcal{C}$ について $|\nabla \mathcal{I}(q)| > \delta$ となる. 任意の $q \in \mathcal{C}$ と $u \geq 0$ について $\frac{d}{du} (\mathcal{I}(\varphi_q(u))) = |\nabla \mathcal{I}(\varphi_q(u))|^2$ が成り立つから, $U > 0$ が十分大きければ ($U\delta^2 > 2\varepsilon$ が成り立てば), $\mathcal{I}(q) > c - \varepsilon$ なる任意の q について $\mathcal{I}(\varphi_q(U)) > c + \varepsilon$ となる (任意の $U > 0$ と $q \in \mathcal{C}$ に対して $\varphi_q(U)$ が存在することは, (a) が保証している).

一方 c の定義より, $\mathcal{I}(\gamma) > c - \varepsilon$ を満たす $\gamma \in \mathcal{P}(p_0, p_1)$ が存在する. そこで $\gamma' \in \mathcal{P}(p_0, p_1)$ を $\gamma'(\tau) := \varphi_{\gamma(\tau)}(U)$ で定めると, $\mathcal{I}(\gamma') > c + \varepsilon$ となる. これは c の定義に反するので, c は \mathcal{I} の臨界値である. \square

注意 2.5. 一般的な状況では, 補題 2.4 の捉えている臨界点 p はその近傍における最大値も最小値もとらない点であり, 図で表すと峠のような位置にある. このような臨界点を鞍点という.



^{*1} 通常パレー・スモール条件では「 $\mathcal{I}(q_j)$ が j について有界」という仮定も入れるが, 今の状況ではこれは明らかであるので省略した.

ミニマックス法は、鞍点の存在を示す基本的な方法であり、その適用範囲は非常に広い。ミニマックス法の幾何学への応用として有名なものの一つが、「任意の閉リーマン多様体の上には、非自明な（一点に潰れていない）閉測地線が存在する」という定理である。（リーマン多様体の説明は省略するが、 \mathbb{R}^3 内の閉曲面（4.3節参照）は、2次元の閉リーマン多様体の例になっている。）ここで閉測地線とは、 M 上の閉曲線全体の空間 $\mathcal{L}(M) := C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, M)$ の上で定義される長さ汎関数の臨界点のことである。上で述べた定理は、長さ汎関数に対して（拡張された）ミニマックス法を適用することで証明されるが、汎関数の定義域 $\mathcal{L}(M)$ が無限次元の空間であるため、補題 2.4 の証明で用いた性質 (a), (b) が成り立つかは全く明らかでない。そのため、実際の証明では $\mathcal{L}(M)$ の適当な有限次元近似か、あるいはその（ヒルベルト）完備化を用いて議論する。

これとは少し違う設定で、無限次元空間上のミニマックス法を定式化した有用な定理として、いわゆる峠の定理が挙げられる。これについては（応用例も含め）[13] を参照されたい。

3 ポアンカレ・バーコフの定理

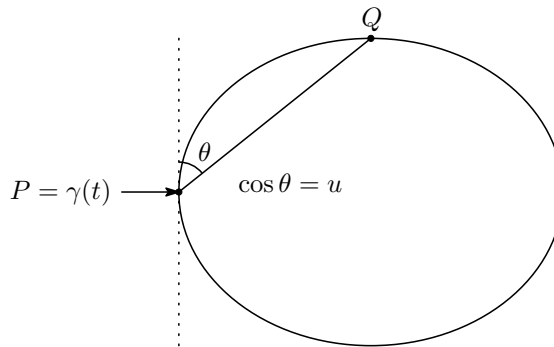
本章では、ビリヤード写像が、アニュラス上のツイスト写像として捉えられることを説明する。次にツイスト写像の固定点に関するポアンカレ・バーコフの定理を紹介し、簡単な場合に証明する。前章の定理 2.1 は、おおまかには、この定理の特別な場合と考えることができる。

3.1 ビリヤード写像とツイスト条件

1章で $C^{(2)} := \{(P, Q) \in C \times C \mid P \neq Q\}$ とおき、ビリヤード写像 $f : C^{(2)} \rightarrow C^{(2)}$ を定義した。反時計回りの弧長パラメータ $\gamma : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow C$ を固定し、写像 $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times (-1, 1) \rightarrow C^{(2)}; (t, u) \mapsto (P, Q)$ を

$$P = \gamma(t), \quad u = \cos \theta(P, Q)$$

が成り立つように定める。



この写像は一対一なので、 $f : C^{(2)} \rightarrow C^{(2)}$ に対応して $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times (-1, 1)$ から自身への写像が定まり、さらにこれは $A := \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times [-1, 1]$ から自身への連続写像 f_A にのびる（任意の $t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ に対して $f_A(t, -1) = (t, -1)$, $f_A(t, 1) = (t, 1)$ とおけばよい）。

注意 3.1. A のように、円周と有界閉区間の積として得られる境界付きの曲面を、アニュラスという。

$f_A(t_0, u_0) = (t_1, u_1)$ とおいて t_1 を (t_0, u_0) の関数と思うと、 $\partial t_1 / \partial u_0 > 0$ であり、任意の t_0 について

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial t_1}{\partial u_0}(t_0, u_0) du_0 = T$$

が成り立つ。さらに f_A は面積を保つ、すなわち

$$dt_1 \wedge du_1 = dt_0 \wedge du_0 \tag{3.1}$$

が成り立つ. これを確かめてみよう. 関数 $I(t_0, t_1) := |\gamma(t_0) - \gamma(t_1)|$ を考えると (1.2) より

$$\frac{\partial}{\partial t_1} I(t_0, t_1) = \cos \theta(\gamma(t_1), \gamma(t_0)) = -u_1$$

であるから, (3.1) の左辺は

$$dt_1 \wedge du_1 = -dt_1 \wedge d\left(\frac{\partial I}{\partial t_1}\right) = \frac{\partial^2 I}{\partial t_0 \partial t_1} dt_0 \wedge dt_1$$

と展開できる. 右辺も同様に計算すると (3.1) が確かめられる.

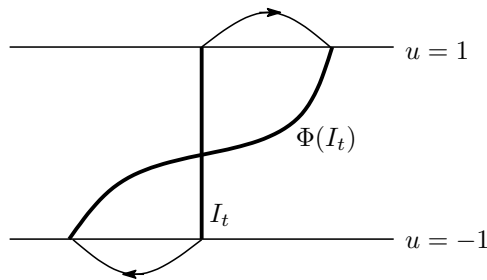
自然数 $m \geq 1$ に対して, 周期が m の約数であるようなビリヤード周期軌道は, $(f_A)^m : A^\circ \rightarrow A^\circ$ の固定点と対応する (ただし $A^\circ := \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times (-1, 1)$). ビリヤード軌道の回転数を表すために, f_A のリフトを考える. $S := \mathbb{R} \times [-1, 1]$ とおき, $\pi : S \rightarrow A$ を $\pi(t, u) := ([t], u)$ で定義する. このとき $\tilde{f}_A : S \rightarrow S$ が f_A のリフトであるとは, 任意の $(t, u) \in S$ について $f_A \circ \pi(t, u) = \pi \circ \tilde{f}_A(t, u)$ が成り立つことをいう. この条件だけでは \tilde{f}_A は一意に決まらないが, 任意の $t \in \mathbb{R}$ について $\tilde{f}_A(t, -1) = (t, -1)$ となるものは一意に決まる. このとき, 任意の $t \in \mathbb{R}$ について $\tilde{f}_A(t, 1) = (t + T, 1)$ が成り立つ.

明らかに \tilde{f}_A は面積を保存し, また任意の $t \in \mathbb{R}, u \in [-1, 1]$ について $\tilde{f}_A(t + T, u) = \tilde{f}_A(t, u) + (T, 0)$ が成り立つ. $([t], u) \in A^\circ$ が $(f_A)^m$ の不動点だとすると, ある整数 $r \in \{1, \dots, m-1\}$ が存在して $(\tilde{f}_A)^m(t, u) = (t + rT, u)$ とかける. この r が, $([t], u)$ に対応する周期ビリヤード軌道の回転数に他ならない.

そこで, $(f_A)^m : A \rightarrow A$ のリフト $F : S \rightarrow S$ を $F(t, u) := (\tilde{f}_A)^m(t, u) - (rT, 0)$ で定義すると, 周期 m , 回転数 r の周期ビリヤード軌道は F の固定点に対応する. 一方, F は明らかに面積を保つ. また, 任意の $t \in \mathbb{R}$ について $F(t, 1) = (t + (m-r)T, 1), F(t, -1) = (t - rT, -1)$ となることから, 次ののべるツイスト条件を満たす.

定義 3.2. $S := \mathbb{R} \times [-1, 1]$ から自身への写像 $\Phi = (\Phi_t, \Phi_u)$ がツイスト条件を満たすとは, 任意の $t \in \mathbb{R}$ について $\Phi_u(t, -1) = -1, \Phi_u(t, 1) = 1, \Phi_t(t, -1) < t, \Phi_t(t, 1) > t$ となることをいう.

$I_t := \{(t, u) \mid -1 \leq u \leq 1\}$ とおくと下の図のようになる.



3.2 ポアンカレ・バーコフの定理

前節では, ビリヤード写像が (適切な座標の下で) 面積を保存し, ツイスト条件を満たすことを示した. この状況で, 一般に次の定理 3.3 が成り立つことが知られている. 記号 A, S, π は前節と同じものを指す. 写像 $\Phi : A \rightarrow A$ が同相写像であるとは, Φ が全単射かつ Φ も Φ^{-1} も連続写像であることをいう.

定理 3.3 (ポアンカレ・バーコフの定理). $\Phi : A \rightarrow A$ は面積を保つ同相写像とする. $\tilde{\Phi} : S \rightarrow S$ は Φ のリフトで, ツイスト条件を満たすとする. このとき, $\tilde{\Phi}$ の固定点 P, Q で, $\pi(P) \neq \pi(Q)$ を満たすものが存在する. 特に, Φ は少なくとも 2 個の固定点を持つ.

ポアンカレ・バーコフの定理はポアンカレによって天体力学の研究の中で見いだされ, 最終的な証明はバーコ

フにより与えられた (原論文ではないが [3]). 詳細な解説論文として [4] も参照されたい.

問 3.4. 定理 3.3 において, 「面積保存」, 「ツイスト条件」 のどちらか片方でも仮定から外すと, 一般には Φ は固定点を持たないことを, 例を作って示せ.

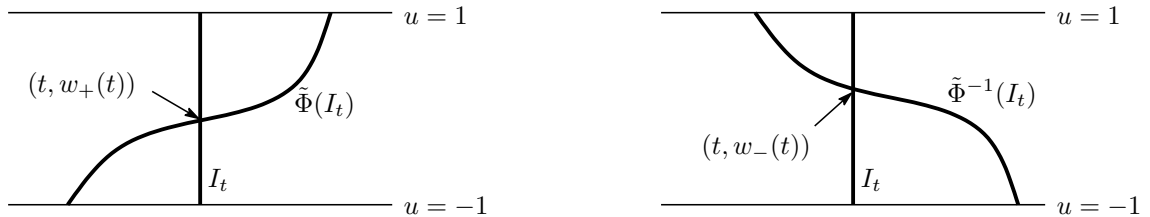
定理 3.3 を前節の状況に適用してみよう. $\Phi = (f_A)^m$, $\tilde{\Phi} = F$ について適用すると, F は少なくとも一つは固定点を持つことが分かる (P とおく). 前節の議論より, これは周期 m , 回転数 r の周期ビリヤード軌道が存在することを示している. この方法で定理 2.1 の別証明を得るには, F の固定点 Q であって $\pi(Q) \neq \pi(P), f_A(\pi(P)), \dots, (f_A)^{m-1}(\pi(P))$ を満たすものの存在を示す必要がある. これは, 固定点の指数に着目した議論により示すことができるが, 詳細は省略する.

定理 3.3 の一般の場合の証明はかなり複雑であるが, $\tilde{\Phi}$ がツイスト条件を満たすという仮定に加えて

$$\tilde{\Phi} = (\tilde{\Phi}_t, \tilde{\Phi}_u) \text{ とおいたとき, 任意の } t \in \mathbb{R} \text{ について } u < u' \implies \tilde{\Phi}_t(t, u) < \tilde{\Phi}_t(t, u')$$

という仮定 (単調ツイスト条件という) を満たす場合は, 簡単な証明があるので紹介する ([9] による).

証明. $t \in \mathbb{R}$ に対して線分 $I_t := \{(t, u) \mid -1 \leq u \leq 1\}$ を考える. $\tilde{\Phi}$ は単調ツイスト条件を満たすので, I_t と $\tilde{\Phi}(I_t)$ はちょうど一点で交わる. その点を $(t, w_+(t))$ とおく. 同様に I_t と $\tilde{\Phi}^{-1}(I_t)$ の交点を $(t, w_-(t))$ とおく. w_+, w_- は t について連続な関数である.



任意の $t \in \mathbb{R}$ について $\tilde{\Phi}(t, w_-(t)) = (t, w_+(t))$ となることから, 次が分かる:

- (i): $w_-(t) = w_+(t)$ ならば, $(t, w_-(t)) = (t, w_+(t))$ は $\tilde{\Phi}$ の固定点である.
- (ii): $\tilde{\Phi}$ はグラフ $\{(t, w_-(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ を $\{(t, w_+(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ に移す.

w_{\pm} は周期的, すなわち $w_{\pm}(t+T) = w_{\pm}(t)$ が成り立つので, w_{\pm} は $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ 上の関数と思ってよい. (i) より, 定理 3.3 を示すには, $w_+(t) = w_-(t)$ を満たす $t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ が少なくとも 2 個存在することをいえばよい.

$B_{\pm} \subset A$ を $B_{\pm} := \{(t, u) \mid t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}, -1 \leq u \leq w_{\pm}(t)\}$ で定義すると, (ii) より $\Phi(B_-) = B_+$ が成り立つ. 仮定より Φ は面積を保つので, B_- と B_+ の面積は等しい, つまり $\int_{\mathbb{R}/T\mathbb{Z}} w_-(t) dt = \int_{\mathbb{R}/T\mathbb{Z}} w_+(t) dt$ が成り立つ. ゆえに, $w_+(t_0) \neq w_-(t_0)$ なる $t_0 \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ が存在するならば, $t_1 \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ であって, $w_+(t_1) - w_-(t_1)$ と $w_+(t_0) - w_-(t_0)$ の符号が逆になるものが存在する. すると中間値の定理より, $w_+(t) = w_-(t)$ を満たす $t \in \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ は少なくとも 2 個存在する. \square

4 アーノルド予想

ポアンカレ・バーコフの定理は, アニュラスから自身への面積保存写像に関する定理であった. アニュラスの代わりに, 一般の曲面や高次元の図形を考えるとどうなるか? というのは自然な問題意識であろう. アーノルドは 60-70 年代にこの問題に対する一つの解答を予想として提出した (アーノルド自身による解説としては [1], [2] Appendix 9 などがある).

予想 4.1 (アーノルド予想). 任意の開シンプレクティック多様体 M に対して, M 上のハミルトン微分同相写像は, 少なくとも $c(M)$ 個の固定点を持つ. ただし $c(M)$ は, M 上の C^∞ 級関数の持つ臨界点の個数のとりうる最小の値である.

予想 4.1 の完全な解決は未だ得られていないが, 特に 80 - 90 年代に本質的な進展があり, 多くの部分解が知られている. 本章では, その中でも基本的な (高次元) トーラスの場合や閉曲面の場合を論じる. シンプレクティック多様体, ハミルトン微分同相写像などの用語も, その途中で少しずつ説明する.

本論に入る前に, 予想 4.1 に現れる量 $c(M)$, すなわち M 上の C^∞ 級関数の持つ臨界点の個数のとりうる最小値, について少し述べる (これは, シンプレクティックとは限らない一般の開多様体 M に対して考えることができる). 与えられた M に対して $c(M)$ を求めるのはそれ自身難しい問題である. 基本的な結果としては, コホモロジーのカップ長という (代数的な) 量により下から評価することができ (リュステルニク・シュニレルマンによる), その帰結として, 例えばトーラス $T^m := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ については $c(T^m) = m + 1$ であることが知られている.

4.1 2次元トーラス

はじめに 2次元トーラス $T^2 := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ の場合を考える. ポアンカレ・バーコフの定理を参考にして, 面積 (と向き) を保つ写像 $\Phi: T^2 \rightarrow T^2$ が固定点を持つためのうまい条件を考えたい. Φ が面積を保つという条件だけでは, 固定点を持たないものが容易に作れる. たとえば $0 < a, b < 1$ を任意にとつて $\Phi(x, y) := (x + a, y + b)$ とすればよい. ポアンカレ・バーコフの定理においては, ツイスト条件を付加的に考えることがポイントであった. T^2 の場合も, 面積を保つ写像の中から, 適切なクラスを切り取る必要があるであろう. 天下り式になるが, 以下で説明するハミルトン微分同相写像というものが, その適切なクラスになっている.

関数 $H \in C^\infty(T^2)$ に対して, T^2 上のベクトル場 X_H を

$$X_H(x, y) := \left(-\frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial x} \right)$$

で定義し, H のハミルトンベクトル場という. また, 関数 H を, ベクトル場 X_H を生成するハミルトニアンという. H は少なくとも $c(T^2) = 3$ 個の臨界点を持つ (これは c の定義より明らか). H の臨界点は X_H の零点に他ならないので, ベクトル場 X_H で生成される流れは, 少なくとも 3 個の固定点を持つ. これは当たり前だが, この状況を「非線形化」して得られるのがハミルトン微分同相写像の概念である.

時間に依存する T^2 上のハミルトニアン, すなわち $H \in C^\infty([0, 1] \times T^2)$ を考え, $t \in [0, 1]$ について $H^t \in C^\infty(T^2)$ を $H^t(x) := H(t, x)$ で定義する. このとき, 時間変化するベクトル場 $(X_{H^t})_{0 \leq t \leq 1}$ で生成される T^2 上の流れを $(\Phi_H^t)_{0 \leq t \leq 1}$ とおく. すなわち, 各 $t \in [0, 1]$ について Φ_H^t は T^2 から自身への写像であり, 任意の $(x, y) \in T^2$ について, $\Phi_H^t(x, y) \in T^2$ は常微分方程式

$$\Phi_H^0(x, y) = (x, y), \quad \frac{d}{dt} \Phi_H^t(x, y) = X_{H^t}(\Phi_H^t(x, y))$$

の解として定義される. このとき, 任意の $0 \leq t \leq 1$ について, $\Phi_H^t: T^2 \rightarrow T^2$ は微分同相写像になる, つまり Φ_H^t は全単射で, Φ_H^t もその逆写像も C^∞ 級である.

定義 4.2. 写像 $\Phi: T^2 \rightarrow T^2$ がハミルトン微分同相写像であるとは, ある $H \in C^\infty([0, 1] \times T^2)$ と $0 \leq t \leq 1$ により $\Phi = \Phi_H^1$ と書けることをいう.

上の定義では全ての $0 \leq t \leq 1$ を考えたが, 実は $t = 1$ だけで十分である. すなわち次が成り立つ.

問 4.3. 任意のハミルトン微分同相写像 $\Phi: T^2 \rightarrow T^2$ は, ある $H \in C^\infty([0, 1] \times T^2)$ により $\Phi = \Phi_H^1$ と書けることを示せ.

以上でハミルトン微分同相写像の定義を T^2 の場合に説明した. すでに説明したように $c(T^2) = 3$ なので, アーノルド予想は T^2 の場合次のようになる. これは次節で説明する T^{2n} の場合の結果 (コンレイ・ゼンダーの定理) の特別な場合である.

定理 4.4. T^2 上のハミルトン微分同相写像は少なくとも 3 個の固定点を持つ.

この節の残りで, T^2 のアーノルド予想がポアンカレ・バーコフの定理の一般化であるということを説明したい. そのために, T^2 上のハミルトン微分同相写像の特徴付けについて説明する.

補題 4.5. 微分同相写像 $\Phi: T^2 \rightarrow T^2$ がハミルトン微分同相写像であることの必要十分条件は, 以下の (i), (ii) が成り立つことである.

(i): Φ は面積を保つ.

(ii): T^2 上で定義された \mathbb{R}^2 値の関数 $W(x, y)$ であって, 任意の $(x, y) \in T^2$ について $\Phi(x, y) = (x, y) + W(x, y)$ となり, かつ $\int_{T^2} W(x, y) dx dy = (0, 0)$ を満たすものが存在する.

必要性, つまり Φ がハミルトン微分同相写像なら (i), (ii) が成り立つことのみ確認する. $H \in C^\infty([0, 1] \times T^2)$ を $\Phi = \Phi_H^1$ を満たすようにとる (問 4.3 参照). D を T^2 上の領域とすると, $\Phi_H^t(D)$ の面積 (絶対値の記号で表す) の t による変化は

$$\frac{d}{dt} |\Phi_H^t(D)| = \int_{\Phi_H^t(D)} \operatorname{div} X_{H^t}(x, y) dx dy \quad (4.1)$$

で与えられる. ここで div は発散を表すベクトル解析の記号であり, 一般にベクトル場 $V = (V_x, V_y)$ に対して $\operatorname{div} V = \partial V_x / \partial x + \partial V_y / \partial y$ で定義される. 任意の $h \in C^\infty(T^2)$ について

$$\operatorname{div} X_h = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0$$

となるので (4.1) の右辺は 0, ゆえに $|\Phi_H^t(D)|$ は t について定数関数となるので $|\Phi(D)| = |D|$ を得る. (ii) を示すには, 自然な写像 $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2; (x, y) \mapsto ([x], [y])$ を用いる. 任意の $t \in [0, 1]$ に対して \mathbb{R}^2 上のハミルトニアン $\tilde{H}^t := H^t \circ \pi$ を考え, $(\tilde{H}^t)_{0 \leq t \leq 1}$ の生成する \mathbb{R}^2 上のハミルトン微分同相を考えれば, (ii) は容易に確認できる. 一方で充分性の証明はかなり面倒であり, 省略する ([5] Appendix 参照).

さて, ポアンカレ・バーコフの定理との関係をきちんと述べるには, 正確には定理 4.4 より強い次の結果が必要である (ル・カルヴェス [7] による).

定理 4.6 ([7]). 同相写像 $\Phi: T^2 \rightarrow T^2$ で補題 4.5 の条件 (i), (ii) を満たすものは少なくとも 3 個の固定点を持つ.

定理 4.4 と定理 4.6 の違いは, Φ を微分同相写像と仮定するか, 単に同相写像と仮定するかの違いである. この差は本質的であるが, ここでは深入りしない. ポアンカレ・バーコフの定理 (の特別な場合) を, 定理 4.6 から導出してみよう. 定理 3.3 とは記号が異なるが, $A = \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times [0, 1]$ とおき, 同相写像 $\Phi: A \rightarrow A$ は面積を保ち, ツイスト条件を満たすとす. 簡単のため, $\delta_+, \delta_- > 0$ を用いて

$$\Phi(t, 1) = (t + \delta_+, 1), \quad \Phi(t, 0) = (t - \delta_-, 0)$$

と書ける場合のみ考える. このとき Φ が固定点を 2 個以上持つことを示したい.

$\Phi = (\Phi_t, \Phi_u)$ とおく. c_+, c_- を適当な正実数として, トーラス $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/(2 + c_+ + c_-)\mathbb{Z}$ から自身への写

像 Ψ を

$$\Psi(t, u) := \begin{cases} (\Phi_t(t, u), \Phi_u(t, u)) & (0 \leq u \leq 1) \\ (t + \delta_+, u) & (1 \leq u \leq 1 + c_+) \\ (\Phi_t(t, u - 1 - c_+), 1 + c_+ + \Phi_u(t, u - 1 - c_+)) & (1 + c_+ \leq u \leq 2 + c_+) \\ (t - \delta_-, u) & (2 + c_+ \leq u \leq 2 + c_+ + c_-) \end{cases}$$

で定義する. 三段目の式は複雑だが, これは Φ の上下を逆にしたものを u 方向に平行移動したものに他ならない. 一段目と三段目の固定点の個数は Φ の固定点の個数と等しく, 二段目と四段目は t 方向の平行移動であり固定点を持たないので, Ψ の固定点の個数は Φ の固定点の個数のちょうど倍である.

Ψ は面積を保つ同相写像であり, さらに c_+, c_- を適切に選べば補題 4.5 の条件 (ii) も満たす (これを確認するには少し計算が必要だが省略する). このとき定理 4.6 より Ψ は固定点を 3 個以上持つ. 一方, Ψ の固定点の個数は Φ の固定点の個数のちょうど倍なので, Φ は固定点を 2 個以上持つことが示された.

4.2 高次元トーラス

前節で, $H \in C^\infty(T^2)$ のハミルトンベクトル場を $X_H(x, y) := (-\partial H/\partial y, \partial H/\partial x)$ で定義した. これを安直に一般化して, $H \in C^\infty(T^{2n})$ に対して

$$X_H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) := \left(-\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial y_n}, \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right) \quad (4.2)$$

と定義する. ハミルトン微分同相写像の定義は T^2 の場合とまったく同様である. すなわち, ある $H \in C^\infty([0, 1] \times T^{2n})$ を用いて Φ_H^1 の形に書ける T^{2n} 上の微分同相写像を, ハミルトン微分同相写像という. 一方 $c(T^{2n}) = 2n + 1$ であるので, T^{2n} 上のアーノルド予想は次のようになる. これはコンレイ・ゼンダー [5] により証明された.

定理 4.7 ([5]). T^{2n} 上の任意のハミルトン微分同相写像は, 少なくとも $2n + 1$ 個の固定点を持つ.

定理 4.7 を証明する第一歩は, 固定点の変分法的な特徴付けである. $\Phi : T^{2n} \rightarrow T^{2n}$ をハミルトン微分同相写像とし, $H \in C^\infty([0, 1] \times T^{2n})$ を $\Phi = \Phi_H^1$ を満たすようにとる. すると任意の $p \in T^{2n}$ について

$$\frac{d}{dt} \Phi_H^t(p) = X_{H^t}(\Phi_H^t(p))$$

が成り立つ. ここで, t が 0 または 1 に近いときは $H^t \equiv 0$ となると仮定すると (こうしても一般性を失わないことは簡単にわかる), $H \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times T^{2n})$ とみなすことができ, Φ の固定点は $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow T^{2n}$ であって常微分方程式 $\dot{\gamma}(t) - X_{H^t}(\gamma(t)) = 0$ を満たすものと対応する.

この方程式の解は, 次のような変分法による特徴付けを持つ. \mathbb{R}/\mathbb{Z} から T^{2n} への C^∞ 級の写像であって, 射影 $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow T^{2n}$ について持ち上げ可能なもの全体のなす空間を \mathcal{L} と書く. $\gamma \in \mathcal{L}$ の持ち上げを $\tilde{\gamma} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ とし, $\tilde{\gamma}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_n(t))$ とおいて,

$$\mathcal{A}_H(\gamma) := \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^n x_j(t) \dot{y}_j(t) - H^t(\gamma(t)) dt$$

により汎関数 $\mathcal{A}_H : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する. このとき, 形式的な計算により, 方程式 $\dot{\gamma}(t) - X_{H^t}(\gamma(t)) = 0$ の解は \mathcal{A}_H の臨界点として特徴付けられることがわかる. したがって, 定理 4.7 を示すには \mathcal{A}_H の臨界点が $2n + 1$ 個以上あることを示せばよい.

ここまでは, 2 章で周期ビリヤード軌道を調べたときと同じ流れである. しかし汎関数 \mathcal{A}_H の定義域 \mathcal{L} は無限次元の空間であり, しかも 2 章で少し説明した閉測地線 (長さ汎関数の臨界点) のときよりも本質的に難しく, 通常の変分法では \mathcal{A}_H の臨界点を捉えることができない.

[5] は, 次のような有限次元近似を用いることでこの困難を回避した. 自然数 N に対して

$$\gamma(t) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(2\pi kt) + b_k \sin(2\pi kt) \quad (a_0 \in T^{2n}, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}^{2n})$$

の形で書ける $\gamma \in \mathcal{L}$ 全体のなす \mathcal{L} の部分空間を \mathcal{L}_N とおく. \mathcal{L}_N は有限次元空間であるが, \mathcal{L} の任意の元は N を大きくすると \mathcal{L}_N の元でいくらでもよく近似できる, というのがフーリエ展開の理論であった. [5] の重要なアイデアは, 与えられた H に対して N を十分大きくとると, \mathcal{A}_H の臨界点を探す問題が, \mathcal{L}_N 上のある関数 (\mathcal{A}_H の有限次元近似) の臨界点を探す問題に帰着するということである.

注意 4.8. これとは別の有限次元近似として, 生成関数を用いる方法もあり, [9] で詳しく紹介されている.

4.3 閉曲面

前節で高次元トーラスの場合を考えたが, ここでは2次元に戻って閉曲面の場合を考える. 閉曲面というとき, 抽象的に2次元多様体と考えてもよいが, とりあえずは多様体の言葉を仮定せず, ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 内の閉曲面を考える.

\mathbb{R}^3 の部分集合 S が曲面であるとは, 任意の $p \in S$ について p のある開近傍 U が存在して, $U \cap S$ が2変数のパラメータ表示を持つことをいう. ここで $U \cap S$ のパラメータ表示とは, \mathbb{R}^2 (座標は (x, y) とする) の開集合 V からの C^∞ 級の同相写像 $\varphi: V \rightarrow U \cap S$ であって, ベクトル $\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y$ が一次独立になるものをいう. このとき, $\varphi(V) = U \cap S$ 上で定義された座標 (x, y) を S の局所座標といい, S の接ベクトル $\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y$ を $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ と書く. 曲面 S が \mathbb{R}^3 の有界閉集合であるとき, S は閉曲面であるという. 閉曲面は自然な向きを持つ.

閉曲面 S 上の C^∞ 級関数 (任意の局所座標について C^∞ 級ということ) H に対して, そのハミルトンベクトル場 X_H (S の接ベクトル場) の定義を説明したい. 安直に考えると, 局所座標 (x, y) を用いて $X_H(x, y) := -\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}$ とすればよいであろう. しかし無条件にこのように定義すると, 局所座標のとり方により結果が変わってしまう. たとえば $X := 2x, Y := 2y$ とおいて座標 (X, Y) を考えると, (X, Y) で定義された X_H は (x, y) で定義された X_H の $1/4$ 倍になる.

そこで, 局所座標のとりかえに関して, 上の定義が意味を持つための条件を考えよう. つまり, 曲面のある領域に二つの局所座標 (x, y) と (X, Y) が定義されているとき, 任意の関数 H について

$$-\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Y}$$

が成り立つための条件を計算しよう. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば, この式は

$$(\partial H/\partial x \quad \partial H/\partial y) J \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} = (\partial H/\partial X \quad \partial H/\partial Y) J \begin{pmatrix} \partial/\partial X \\ \partial/\partial Y \end{pmatrix}$$

と書きなおせる. (X, Y) を (x, y) の関数とみなして $(X, Y) = \psi(x, y)$ と書き, この変換のヤコビ行列 $D\psi(x, y) := \begin{pmatrix} \partial X/\partial x & \partial Y/\partial x \\ \partial X/\partial y & \partial Y/\partial y \end{pmatrix}$ を考えると, これが任意の H について成り立つことと

$$(D\psi(x, y))^t J D\psi(x, y) = J$$

が成り立つことは同値であり, 簡単な計算でこれは $\det D\psi(x, y) = 1$, すなわち変換 ψ が向き付きの面積を保つことと同値であると分かる.

以上の計算より, S の局所座標として向きと面積を正しく表すもののみを考えれば, ハミルトンベクトル場 X_H が座標によらず定義できることが分かる. そのような局所座標が取れることは自明ではないが, それが可能であることを保証するのが次の補題 4.9 である (これは次節で紹介するダルブーの定理の 2 次元の場合である).

補題 4.9. S を向きのついた曲面とすると, 任意の $p \in S$ について, p の近傍で定義された局所座標 (x, y) で, 接ベクトル $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ の張る平行四辺形の向き付き面積が各点で 1 になるものが存在する.

まとめると次のようになる. $H \in C^\infty(S)$ が与えられたとき, S 上の各点の近傍で補題 4.9 を満たす局所座標 (x, y) をとり, $X_H(x, y) := -\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}$ と定義する. 補題 4.9 を満たす局所座標どうしの座標変換は向き付き面積を保つから, この定義は局所座標の取り方によらない.

以上で S 上のハミルトンベクトル場の定義を説明した. ハミルトン微分同相写像の定義はこれまでとまったく同様である. 一方 $c(S)$, すなわち S 上の関数の臨界点の個数のとりうる最小値であるが, これは S が球面と同相な場合は $c(S) = 2$, その他は $c(S) = 3$ であることが知られている.

閉曲面に対するアーノルド予想は, エリアシュベルグ, シコラフ, フレアなどにより示された. また, T^2 の場合にアーノルド予想の同相写像版があること (定理 4.6) を紹介したが, 同様の結果が任意の閉曲面に対しても知られている ([8]). この結果が高次元化できるかは興味深い問題と思われる.

4.4 シンプレクティック多様体

前節で曲面について調べたが, そこでは局所座標とその間の変換が重要であった. 実際, 曲面の向きや接ベクトルなども, これらのデータだけで記述することができる. そこで一般に, 局所的に n 変数の座標が定義されていて, それらの間の座標変換が微分可能であるような図形の概念を考えることができ, それを n 次元 (可微分) 多様体という. 本節では, これまで論じてきた内容が, この枠組みでどのように一般化されるかを説明したい.

4.2 節で, $2n$ 変数の関数 $H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ のハミルトンベクトル場 X_H を

$$X_H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) := \left(-\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial y_n}, \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)$$

で定義した. 関数 H の定義域に別の座標 $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ が定義されているとし, その間の座標変換を $(X, Y) = \psi(x, y)$ とおく. 前節と同様な計算により, この二つの座標で定義されるハミルトンベクトル場が一致するための条件は, $J = \begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix}$ を用いて $(D\psi(x, y))^t J D\psi(x, y) = J$ と書ける. この条件が成り立つとき, 変換 ψ は正準変換であるという (これは解析力学の用語である). したがって, 局所的に $2n$ 変数の座標が定義されていて, それらの間の座標変換が正準変換であるような多様体の上では, ハミルトンベクトル場を定義することができる. このような空間をシンプレクティック多様体という.

上で述べたシンプレクティック多様体の「定義」を, 微分形式の言葉を使っていいかえてみる. 変換 $(X, Y) = \psi(x, y)$ が正準変換であるということは, 微分形式の間の等式

$$dX_1 \wedge dY_1 + \dots + dX_n \wedge dY_n = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n$$

が成り立つことと同値である. そこで, 各々の局所座標 $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ の定義域の上で微分形式 $dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n$ を考えるとき, 座標変換が正準変換ならば, これらは多様体全体の上で 2 次の微分形式を定める (ω と書く). このようにして得られる微分形式 ω は, 閉形式 ($d\omega = 0$) かつ非退化 (いたるところで $\omega^n \neq 0$) という条件により特徴付けられる.

注意 4.10. 局所的に $dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n$ の形に書ける微分形式が閉かつ非退化であることは明らかである. 一方, 任意の閉かつ非退化な 2 次微分形式がこの形に書けることは正しいが明らかではなく, これをダルブーの定理という. 前節で述べた補題 4.9 は, ダルブーの定理の $n = 1$ の場合に他ならない.

以上をまとめて, シンプレクティック多様体の定義を与えよう.

定義 4.11. $2n$ 次元多様体 M とその上の閉かつ非退化な 2 次微分形式 ω との組をシンプレクティック多様体という. ω をシンプレクティック形式という.

これまでの議論により, シンプレクティック多様体 (M, ω) と関数 $H \in C^\infty(M)$ が与えられるとハミルトンベクトル場 X_H が定義できる. ハミルトン微分同相写像の定義もこれまでと全く同様である. これで, アーノルド予想 4.1 の中に現れた用語に一応の説明を与えたことになる. 任意の $H \in C^\infty(M)$ について X_H の零点は H の臨界点に他ならず, これらは少なくとも $c(M)$ 個存在するので, 時間変化しないハミルトニアンから定まるハミルトン微分同相写像については, 予想 4.1 は明らかに成り立つ.

4.2 節で述べた, ループ空間上で定義された汎関数を用いた固定点の変分法的な特徴付けは, 一般のシンプレクティック多様体の上でもほぼそのままの形で成り立つ. 一方で, 有限次元近似の方法 (4.2 節では, トーラス上の自然な座標を用いてフーリエ展開による近似を考えた) は, 一般には機能しない.

一般のシンプレクティック多様体に対しても適用可能な方法としては, フレアが 80 年代に導入した非常に強力なアプローチ (フレア理論) がある. フレア理論は, アーノルド予想への応用のみならず, 近年の幾何学におけるもっとも重要な話題のひとつであるが, 昨年度の本講座 [12] で扱われたこともあり, ここではその内容には立ち入らない. フレアの方法は, その後多くの研究者により改良が重ねられ, その応用として弱アーノルド予想 (すべての固定点为非退化という仮定をおき, $c(M)$ を M の総ベッチ数でおきかえる) は任意の閉シンプレクティック多様体に対して証明されている. こうした発展については, [11], [14] などの文献を参照されたい.

5 おわりに

周期ビリヤード軌道を導入とし, ポアンカレ・バーコフの定理を経由して, シンプレクティック・トポロジーの入口までを説明してきた. シンプレクティック・トポロジー入門としては, この文章はかなり偏っていると思われるので, 標準的な入門書として [9] を挙げておく.

また, 80 年代にグロモフ [6] により導入された擬正則 (あるいは J -正則) 曲線の方法は, この分野の発展において決定的な役割を果たした (フレア理論もこの方法に基づいている). これについても, [11], [14] およびそこで挙げられている文献を参照されたい.

参考文献

- [1] V. I. Arnold, *First steps in symplectic topology*, Russian Math. Surveys 41 (1986), 1–21.
- [2] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Second ed. Springer-Verlag, 1989.
- [3] G. Birkhoff, *Dynamical systems*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. IX, American Mathematical Society, 1966.
- [4] M. Brown, W. D. Neumann, *Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem*, Michigan Math. J. 24 (1977), 21–31.
- [5] C. Conley, E. Zehnder, *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold*, Invent. Math. 73 (1983), 33–49.
- [6] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307–347.
- [7] P. Le Calvez, *Une généralisation du théorème de Conley-Zehnder aux homéomorphismes du tore de dimension deux*, Ergodic Theory Dynam. Systems. 17 (1997), 71–86.
- [8] S. Matsumoto, *Arnold conjecture for surface homeomorphisms*, Topology Appl. 104 (2000), 191–

214.

- [9] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Second ed. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1998.
- [10] S. Tabachnikov, *Geometry and Billiards*, Student Mathematical Library 30, American Mathematical Society/Mathematics Advanced Study Semesters, 2005.
- [11] 小野薫, J -正則写像と symplectic topology, 数学 51(1999), 357–376.
- [12] 小野薫, Morse 理論と Floer 理論, 京都大学数理解析研究所数学入門公開講座, 2013.
- [13] 田中和永, 非線形問題 2, 岩波書店, 2000.
- [14] 深谷賢治, シンプレクティック幾何学, 岩波書店, 2008.