

# 天体ダイナモ理論の数理 — なぜ星や惑星は固有の磁場を持っているのか —

竹広 真一 (京都大学 数理解析研究所)

## 概要

地球を始めとする数々の天体,たとえば太陽などの星や木星などの惑星は固有の磁場を伴っている.このような磁場は天体内部の電気伝導性物質が流れることによって生じる「ダイナモ作用」により生成・維持されていると考えられてきている.この講義では,ダイナモの数理モデルの基本的な性質を議論し,最後に近年可能となったコンピュータシミュレーション計算による研究を紹介する.

## 1 天体磁場現象

磁石の磁針がほぼ北を向くことからよく経験しているように,地球があたかも内部に磁石が存在しているかのような固有の磁場を伴っていることはよく知られた事実である.このような磁場は意外にもわれわれ人類(あるいは生物)の生活と密接にかかわっている.ハイキングにおいて方角を見いだすのにコンパスが使えるのは地球磁場のお陰である.また,地球に磁場が存在することで,宇宙から降り注いでくる生物にとって有害な放射線から守ってくれている<sup>\*1</sup>.太陽の磁場活動が活発になり,いちどきにそのエネルギーが放出されると(太陽嵐),その影響が地球にまで及び,大規模停電を引き起こすことがある.このような天体の磁場がなぜ生成され,変動しているのかを明らかにすることは科学的興味からだけでなく,われわれの実生活や生命の存在に関連することでもある.

地球の磁場は地球内部が固体の磁石のようになっているからと想像するかもしれないが,そのようにはなっていない.鉄などの磁性体が高温になり,キュリー温度と呼ばれる温度を越えると,永久磁石のように,なれなくなるからである.地球や惑星の内部ははるかにキュリー温度を越えているので,別のしくみが必要である.現在では,天体内部の電気伝導性物質(惑星だと鉄やニッケル)が流れることで磁場が生じる効果により天体固有の磁場が生じているのではないかと考えられている.この磁場の生成機構は「ダイナモ作用」と呼ばれ,20世紀前半から研究されてきている.

太陽と地球の固有磁場は時間とともに変動していることも知られている.特に太陽の磁場活動は磁場が集中している場所である黒点の数とともに,ほぼ11年周期で変動してい

---

<sup>\*1</sup> もしも磁場がなくても地球には厚い大気層が存在しているのですぐにも生物にとって致命的なことになるわけではないと考えられてもいる.

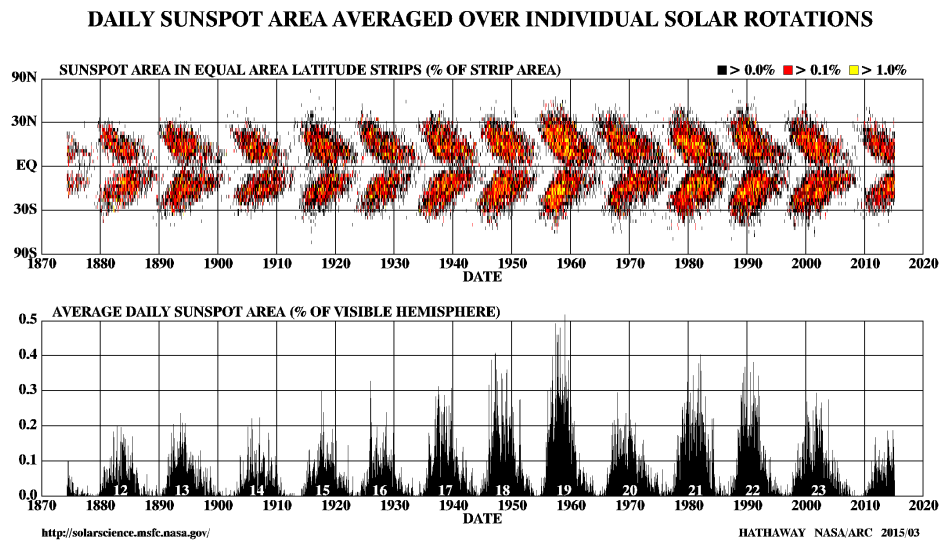


図 1 バタフライダイアグラム. 上は太陽の黒点数の緯度分布の時間変化, 下は太陽面で黒点が占める面積の割合の時間変化. <http://solarscience.msfc.nasa.gov/>より.

る. 黒点の分布の時間変化をみてみると, 中緯度に出現した黒点が 11 年かけて赤道へと移動していき消滅し, 今度は逆の磁場の極性を伴った黒点が中緯度にあられ, 低緯度に移動していく, ことを繰り返している. この図はちょうど蝶の羽のようなパターンを示すので, バタフライダイアグラムと呼ばれている (図 1). 一方で, 地球の磁場は数 10 万年程度の時間間隔で磁場の極性が逆転していたことが知られている. しかしながら太陽と異なり地球磁場の極性逆転は周期的ではなく, むしろ不規則的である. ときには数 1000 万年もの長い期間逆転が起こらなかった期間があったことも知られている (図 2). このような, 周期的あるいは不規則な極性反転もダイナモ作用の理論によって説明されなければならない観測事実であるが, 現在でも一致した見解には至っていない.

われわれの太陽系を眺めてみると, 惑星規模の磁場を伴う惑星の方が多い. 惑星規模の磁場を持たない惑星は金星と火星だけであり, 他の惑星は強弱はあるものの惑星規模の固有磁場を持っている. 岩石惑星の中で, なぜ金星と火星に固有磁場がなく, 水星と地球に固有磁場が存在しているかはいまだに謎である. 特に水星は, その小ささのために内部が冷却固化してしまっており融けた鉄 (電気伝導性物質) が内部に存在していないのではないかと想像されていたので, マリナー 10 号の人工衛星による水星の固有磁場の観測は大発見であった.

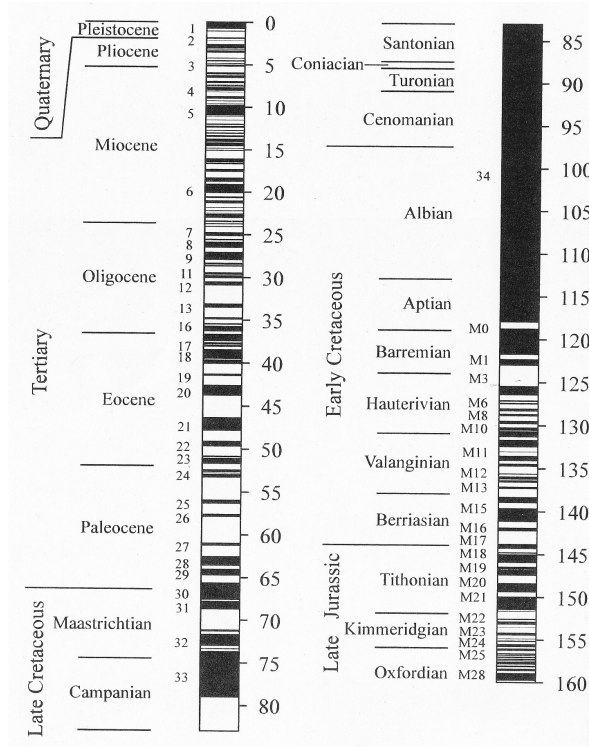


図 2 地球磁場の逆転の歴史. 黒いところが現在と同じ極性の磁場, 白いところが逆の極性の磁場であった時期を示している. 帯の右側の数字の単位は百万年. Merrill et al. (1995) より.

## 2 天体ダイナモの基礎方程式

この節では天体ダイナモを考察するための基礎方程式と, 磁場の基本的な振舞いについて議論する. 回転する球の中に電気電導性流体が埋めこまれ, その外側は非電気伝導体で囲まれている状況を考える.

### 2.1 基礎方程式

ダイナモ問題を扱えるもっとも単純なシステムはブシネスク近似された磁気流体の方程式系である. 球とともに回転する座標系からみた方程式は次のようになる.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \alpha T \mathbf{g} + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T = \kappa \nabla^2 T + \varepsilon, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\lambda \nabla \times \mathbf{B}), \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5)$$

ここで,  $\mathbf{u}$ ,  $T$ ,  $p$ ,  $\mathbf{B}$  は流体の速度, 温度, 圧力, および磁場である.  $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} / \mu$  は電流であり,  $\mu$  は透磁率である.  $\rho_0$  は流体の密度で一定値,  $\Omega$  は球の自転角速度,  $\alpha$  は熱膨張率,  $\mathbf{g}$  は重力加速度,  $\nu$  は粘性率,  $\kappa$  は熱拡散率,  $\varepsilon$  はジュール散逸による加熱,  $\lambda$  は磁気拡散率である. それぞれの式は, 上から連続の式, 運動方程式, エネルギーの式, 磁場の誘導方程式, 磁場のソレノイド条件, である.

よく用いられる境界条件は, 球表面での速度法線成分が 0, 速度の接線成分あるいは応力が 0, 温度が一定, 磁場は外部のポテンシャル場に接続される, というものである.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ (すべりなし条件)} \text{ or } e_{ij}n_j = 0 \text{ (自由すべり条件)}, \quad (7)$$

$$T = \text{const.}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_e. \quad (8)$$

ただし  $\mathbf{n}$  は球面の外向き単位法線ベクトル,  $e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  は変形速度テンソル,  $\mathbf{B}_e$  は球外部領域のポテンシャル磁場であり, 遠方  $r \rightarrow \infty$  にて  $|\mathbf{B}_e| \rightarrow o(r^{-2})$  で減衰する. ここで  $r$  は球の中心からの距離である.

## 2.2 磁場の振舞い

まずは, 誘導方程式を元にして, 磁場の振舞いを調べておこう.

### 2.2.1 磁束と磁束管

磁力線の定義は

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}, \quad (9)$$

で与えられる. これらの磁力線を束ねて構成される管 (チューブ) のことを磁束管 (flux tube) という. ソレノイド条件  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  より, 磁力線あるいは磁束管が流体中で途切れることはない.

一方で, 磁場の強さを表す量の一つとして磁束  $\Phi$  が使われる. とある面  $S$  における磁束とは

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (10)$$

で与えられ, 面を貫く磁力線の数を表している. 同じ磁束管の断面に対する磁束は断面によって変化しない. したがって磁束管の断面の磁束は磁束管に固有の量であり, 「磁束管の強さ」を表している.

### 2.2.2 $\lambda = 0$ の場合: 磁力線の凍結

次に磁気拡散がない完全導体の場合:  $\lambda = 0$  の磁場の振舞いをみてみよう. 誘導方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad \text{or} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (11)$$

右の式の左辺  $\frac{D\mathbf{B}}{Dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}$  は Lagrange 微分あるいは物質微分と呼ばれ, 流体とともに動いて見たときの時間変化を表している. 右の式は, 線素 (流体中の短い線分) が流れとともに変化していく式と同じ形をしている. したがって, 同じ磁力線に乗っている線素は時間がたっても同じ磁力線の上に乗っていることになる. 言いかえれば, 磁力線は流体にくっついて動く. これを「磁力線の凍結 (frozen flux)」という.

### 2.2.3 $\lambda = 0$ の場合: 磁束の保存則

磁束は流れに乗ってみると保存することが示される. 流れとともに動く面  $S(t)$  に対する磁束の時間変化は,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

### 2.2.4 $\mathbf{u} = 0$ の場合: 磁場の拡散

逆に流体が静止しているとき  $\mathbf{u} = 0$  の場合を考えよう. このとき誘導方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times (\lambda \nabla \times \mathbf{B}).$$

これは磁場の拡散を表現している. 簡単な場合  $\lambda$  が一定ならば

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \lambda \nabla^2 \mathbf{B},$$

と拡散型方程式になることから想像できる.

### 2.2.5 磁場の発達に必要な条件

磁場を強めるには磁束管の断面を小さくすればよい. そのためには磁束管を引き延ばすことが必要である. しかしながら天体内部の大きさは有限なので, 磁場を強めるには

- 磁束管を方位角方向にぐるぐる引き延ばすこと ( $\omega$  効果)
- 磁束管を引き延ばしつつねじって折り畳んでいくこと ( $\alpha$  効果)

を可能とする流れ場でないと磁場が発達していかない.

## 2.3 ダイナモ問題とは

ダイナモ問題とは, 磁場の散逸 (拡散) に打ち勝って流れ場が磁場を強めていけるかどうかを調べる問題である. その際, 流れ場の扱い方で次の 2 種類の問題設定, 運動学的ダイナモと力学的ダイナモとに分けられる.

- 運動学的ダイナモ問題: 流れ場は外部パラメータとして与える.
- 力学的ダイナモ問題: 流れ場も運動方程式等を解いて磁場の時間発展と同時に計算していく.

## 3 反ダイナモ定理

ここでは, 磁場が発達しないための速度場や幾何学的状況についての定理をいくつか述べる.

### 3.1 準備: トロイダル・ポロイダル分解

非発散ベクトル場は 2 つのスカラー関数であるトロイダル・ポロイダルポテンシャルを用いて表すことができる.

$$\mathbf{u} = \nabla \times (\psi \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (\phi \mathbf{r}), \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times (g \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (h \mathbf{r}). \quad (13)$$

$\mathbf{r}$  は球の中心を原点とする位置ベクトルである. 右辺第 1 項目がトロイダル成分, 2 項目がポロイダル成分を表している. トロイダル成分のベクトル場は動径成分を持たない, 球面上に張りついた流れを表す. ポロイダル成分のベクトル場は動径成分を伴うベクトル場である. 磁場と速度場をこのように分解して表現することにより, 非発散の条件を意識することなく扱えることができ, 便利である. 以下の定理の証明やモデルの定式化にも用いられる.

### 3.2 磁場が発達するための磁気レイノルズ数の最低値

磁場が発達するには, 磁気拡散に打ち勝って誘導効果が卓越する必要がある. 磁気拡散項と誘導項の大きさの比の目安になる無次元数が磁気レイノルズ数  $Rm = UL/\lambda$  である. ここで,  $U, L$  はそれぞれ流れ場と現象の特徴的な大きさである. 磁場が発達するためには  $Rm$  が大きい必要がある. ここではそのための  $Rm$  の最低値の見積りを与える.

誘導方程式から出発する.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \times (\lambda \nabla \times \mathbf{B}). \quad (14)$$

$\mathbf{B}$  との内積をとって, 全空間にわたり積分すると

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{V+V'} |\mathbf{B}|^2 dV = \int_V \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} dV - \int_{V+V'} \lambda |\nabla \times \mathbf{B}|^2 dV. \quad (15)$$

ここで  $V$  は球内部領域,  $V'$  は球の外側領域を表す. 右辺第 3 項は常に負なので, 磁場が発達するためには, 磁気拡散に打ち勝って誘導項が作用しなければならないことがわかる.

さらに右辺各項を見積もってみると, 第 1 項目は

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} dV &= \int_V B_i B_j \partial_j v_i dV = \int_V B_i B_j e_{ij} dV \\ &\leq \int_V \mu B_i B_i dV \leq \mu_m \int_V |\mathbf{B}|^2 dV \leq \mu_m \int_{V+V'} |\mathbf{B}|^2 dV. \end{aligned}$$

$e_{ij} = (1/2)(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$  は変形速度テンソル,  $\mu$  は各点での  $e_{ij}$  の最大固有値,  $\mu_m$  は全球の中での最大固有値である. 第 2 項目は

$$s_d = \min \left[ \frac{\int_V \lambda |\nabla \times \mathbf{B}|^2 dV}{\int_{V+V'} |\mathbf{B}|^2 dV} \right]$$

を導入すると,

$$\int_V \lambda |\nabla \times \mathbf{B}|^2 dV \geq s_d \int_{V+V'} |\mathbf{B}|^2 dV.$$

したがって,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{V+V'} |\mathbf{B}|^2 dV \leq (\mu_m - s_d) \int_{V+V'} |\mathbf{B}|^2 dV. \quad (16)$$

という関係式が得られる (Backus 1958).

たとえば半径  $r_0$  の球の中に一定の磁気拡散率  $\lambda$  の電導性流体が閉じ込められており,  $\mu_m = v_0/r_0$  で与えられる速度場  $v_0$  で流れている ( $v_0$  は速度の次元を持つ定数) とする. すると,  $s_d$  は運動のない球中の磁気拡散解で減衰率が最小のもの  $s_d = \pi^2\lambda/r_0^2$  で評価できて,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{V+V'} |\mathbf{B}|^2 dV \leq (Rm - \pi^2) \frac{\lambda}{r_0^2} \int_{V+V'} |\mathbf{B}|^2 dV. \quad (17)$$

ここで磁気レイノルズ数は  $Rm = v_0 r_0 / \lambda$  と見積もった. 上の不等式より, 磁場が成長するための最低の磁気レイノルズ数が与えられる.

$$Rm \geq \pi^2. \quad (18)$$

Childress (1969) では上の不等式評価を, 磁気レイノルズ数の定義に  $|\mathbf{u}|$  の最大値を用いて行っており,

$$Rm \geq \pi. \quad (19)$$

さらに Proctor (1979) では Backus の不等式評価の改善を行っており,

$$\int_v |\nabla \mathbf{u}|^2 dV \leq \frac{\lambda \pi}{16 r_0} \quad (20)$$

のときに磁場が成長しないことを見いだしている.

### 3.3 磁場を発達させるに必要な速度場の条件

#### 3.3.1 速度および磁場の動径成分の関係

命題: 速度場の動径成分がなければ, 磁場の動径成分は発達しない.

磁気拡散係数が半径  $r$  にのみ依存する場合を考える. 誘導方程式に  $r$  との内積をとると,

$$\mathbf{r} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{B} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{r} \cdot \nabla \times (\lambda(r) \nabla \times \mathbf{B}).$$

ここで,

$$\mathbf{r}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{B},$$

を用いると

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{r} \cdot \nabla \times (\lambda(r) \nabla \times \mathbf{B}).$$



拡散項は

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \times (\lambda(\mathbf{r}) \nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{r} \cdot \left( \frac{d\lambda}{dr} \mathbf{e}_r \times \nabla \times \mathbf{B} + \lambda \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} \right) = -\lambda \nabla^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})$$

したがって

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{r}) \nabla^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) \quad (21)$$

右辺第 2 項目が 0 であれば, この式は  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})$  の移流拡散方程式となり, 値が減衰していく一方である. したがって, 速度動径成分がなければ磁場の動径成分は減衰して 0 となる.

### 3.3.2 磁場の動径成分を維持するに必要な速度場の大きさの条件

磁場の動径成分を維持するに必要な速度場の大きさの条件を導く (Busse 1975). (21)

に  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})$  をかけて領域積分すると,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{V+V'} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})^2 dV = \int_{V+V'} \lambda(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \nabla^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) dV + \int_{V+V'} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) dV.$$

右辺第 1 項目は

$$\begin{aligned} & \int_{V+V'} \lambda(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \nabla^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) dV \\ &= \oint_{S'} \lambda(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{S} - \int_{V+V'} \nabla [\lambda(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})] \cdot \nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) dV \\ & - \int_{V+V'} \nabla [\lambda(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})] \cdot \nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) dV \leq -\lambda_{min} \int_{V+V'} |\nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})|^2 dV \end{aligned}$$

右辺第 2 項目は

$$\begin{aligned} & \int_{V+V'} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) dV = \oint_{S'} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{S} - \int_{V+V'} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{B} \cdot \nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) dV \\ & \leq (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})_{max} \left[ \int_{V+V'} |\mathbf{B}|^2 dV \int_{V+V'} |\nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})| dV \right]^{1/2} \end{aligned}$$

ここでシュワルツの不等式  $(A \cdot B) \leq |A||B|$  を用いた. したがって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{V+V'} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})^2 dV & \leq -\lambda_{min} \int_{V+V'} |\nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})|^2 dV \\ & + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})_{max} \left[ \int_{V+V'} |\mathbf{B}|^2 dV \int_{V+V'} |\nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})| dV \right]^{1/2} \end{aligned}$$

ダイナモが維持されるためには右辺が 0 以上である必要がある.

$$\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})_{max}}{\lambda_{min}} \geq \sqrt{\frac{\int_{V+V'} |\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})| dV}{\int_{V+V'} |\mathbf{B}|^2 dV}}$$

ここでさらに  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$  の積分を変形すると,

$$\int_{V+V'} |\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})|^2 = - \int_{V+V'} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \nabla^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) dV = 2 \int_{V+V'} |\mathbf{B}_p|^2 dV,$$

となり, 結局,

$$\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})_{max}}{\lambda_{min}} \geq \sqrt{\frac{2 \int_{V+V'} |\mathbf{B}_p|^2 dV}{\int_{V+V'} |\mathbf{B}|^2 dV}} = \sqrt{\frac{2E_p}{E_m}}. \quad (22)$$

ここで  $E_m = \int_{V+V'} |\mathbf{B}|^2 dV$  および  $E_p = \int_{V+V'} |\mathbf{B}_p|^2 dV$  は磁気エネルギーならびにポロイダル磁場のエネルギーである.

この不等式は, 磁場のポロイダル成分が十分小さいほどダイナモに必要な動径速度が小さくてもよい可能性を示している. にもかかわらず, 十分発達したダイナモではそこそこの動径速度振幅が必要であることを示している.

### 3.3.3 トロイダル速度およびトロイダル磁場の関係

命題: トロイダル磁場はトロイダル速度場によっては増幅されない.

速度場の動径成分がない場合, 磁場動径成分が 0 となる. そこで, 残された動径成分を伴わない速度場 (トロイダル速度場) により動径成分を伴わない磁場 (トロイダル磁場) が発達しうるかを調べてみる. 移流型でない誘導方程式から始める.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \lambda \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} \quad (23)$$

ただし磁気拡散は定数であると仮定する. 今, 速度場と磁場はトロイダル成分のみ持つものとする. 即ち,

$$\mathbf{u} = \nabla \times (\psi \mathbf{r}) = \nabla \phi \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times (g \mathbf{r}) = \nabla g \times \mathbf{r}.$$

誘導方程式に  $\mathbf{r} \cdot \nabla \times$  を作用させると,  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$  が動径成分しか持たないことに注意して,

$$L_2 \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{L_2(\mathbf{u} \times \mathbf{B})_r}{r} + \lambda L_2 \nabla^2 g$$

ここで  $L_2$  は単位球面上のラプラシアン<sup>1)</sup>の逆符号である. 球座標  $(r, \theta, \varphi)$  で表すと,

$$L_2 = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

整理すると,

$$\frac{\partial g}{\partial t} - \lambda \nabla^2 g = (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_r / r$$

$r^2 g$  をかけて半径  $r$  での球面上で積分すると,

$$\frac{1}{2} \oint_S \frac{\partial}{\partial t} r^2 g^2 dS - \lambda \oint_S r^2 g \nabla^2 g dS = \oint_S r g (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_r dS.$$

ここで, 右辺はベクトル公式  $(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$  と Stokes の定理を用いると 0 になる. さらに  $r$  に関して積分すると,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{V+V'} g^2 dV = -\lambda \int_{V+V'} |\nabla g|^2 dV < 0 \quad (24)$$

となり, トロイダル磁場はトロイダル速度場により励起されることなく減衰していく.

### 3.4 Cowling の定理

定理: 軸対称な定常ダイナモは存在しない.

この Cowling の定理は反ダイナモ定理の中でも最も重要なものであり, ダイナモ作用が働き磁場が増幅するためには流れ場と磁場が 3 次元的でないといけないことを主張するものである.

円筒座標系  $(s, \theta, z)$  を導入し, 軸対称な磁場  $B(s, z)$  を考える. ソレノイド条件は

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s B_s) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (25)$$

これを満たす流れ関数  $\psi$ ,

$$B_s = -\frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (26)$$

を導入する. これは自動的にソレノイド条件を満たしている. 一般的な軸対称場は

$$\mathbf{B}(s, z) = \nabla \psi \times \frac{\mathbf{e}_\theta}{s} + B_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (27)$$

と表される.

さて, 誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times [\lambda \nabla \times \mathbf{b}], \quad (28)$$

に対してベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  となるように導入する.  $\mathbf{A}$  もまた軸対称であり

$$\mathbf{A}(s, z) = \nabla a(s, z) \times \frac{\mathbf{e}_\theta}{s} + b(s, z) \frac{\mathbf{e}_\theta}{s}$$

と表される.  $a, b$  と  $\psi, B_\theta$  との関係は

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\Delta_1 a \frac{\mathbf{e}_\theta}{s} + \nabla b \times \frac{\mathbf{e}_\theta}{s},$$

と項を見くらべて  $b = \psi$ ,  $sB_\theta = -\Delta_1 a$  となることがわかる. ここで  $\Delta_1 = \nabla^2 - \frac{2}{s} \frac{\partial}{\partial s}$  である. したがって,

$$\mathbf{A}(s, z) = \nabla a(s, z) \times \frac{\mathbf{e}_\theta}{s} + \psi(s, z) \frac{\mathbf{e}_\theta}{s}$$

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  を誘導方程式に代入し, 積分すると

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi = \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \lambda \nabla \times \mathbf{B} \quad (29)$$

ここで  $\phi$  は電気ポテンシャル (ゲージ) である.  $\theta$  成分だけ取りだすと,

$$\frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{s} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = u_z B_s - u_s B_z + \frac{1}{s} \lambda \Delta_1 \psi.$$

ここで,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla (sB_\theta) \times \frac{\mathbf{e}_\theta}{s} - \Delta_1 \psi \frac{\mathbf{e}_\theta}{s}$$

なる関係式を用いた.  $B_s, B_z$  を  $\psi$  で表し,  $\theta$  方向に平均をとることにより,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\langle u_z \rangle \frac{\partial \psi}{\partial z} - \langle u_s \rangle \frac{\partial \psi}{\partial s} + \langle \lambda \rangle \Delta_1 \psi = -\mathbf{U} \cdot \nabla \psi + \langle \lambda \rangle \Delta_1 \psi.$$

ここで  $\langle \rangle$  は  $\theta$  平均を表し,  $\mathbf{U} = \langle u_s \rangle \mathbf{e}_s + \langle u_z \rangle \mathbf{e}_z$  である.  $\psi$  をかけて領域積分すると,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{V+V'} \psi^2 dV = - \int_V \mathbf{U} \cdot \nabla (\psi^2/2) dV + \int_{V+V'} \langle \lambda \rangle \psi \Delta_1 \psi dV.$$

右辺第 1 項目は表面積分に変形できて 0 となる. 右辺第 2 項を評価すると,

$$\begin{aligned} \int_{V+V'} \psi \Delta_1 \psi dV &= \int_{V+V'} \left[ \psi \nabla^2 \psi - \psi \frac{2}{s} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right] dV \\ &= \oint_{S'} \psi \nabla \psi \cdot \mathbf{dS} - \int_{V+V'} |\nabla \psi|^2 dV - \int_{V+V'} \frac{1}{s} \frac{\partial \psi^2}{\partial s} dV \\ &= \oint_{S'} \psi \nabla \psi \cdot \mathbf{dS} - \int_{V+V'} |\nabla \psi|^2 dV - \oint_{S'} \psi^2 dz d\theta = - \int_{V+V'} |\nabla \psi|^2 dV. \end{aligned}$$

となるので,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{V+V'} \psi^2 dV \leq -\langle \lambda \rangle_{min} \int_{V+V'} |\nabla \psi|^2 dV.$$

したがって軸対称ポロイダル磁場は減衰していく.

では軸対称トロイダル磁場  $B_\theta$  はどうなるだろう. 誘導方程式の  $\theta$  成分をとると

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_s - \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_z + \lambda \left( \nabla^2 - \frac{1}{s^2} \right) B_\theta \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} (u_z B_\theta) - \frac{\partial}{\partial s} (u_s B_\theta) + \lambda \left( \nabla^2 - \frac{1}{s^2} \right) B_\theta. \end{aligned}$$

ただし, 磁場のポロイダル成分  $B_s, B_z$  は 0 とし, 簡単のため  $\lambda$  は一定とした.  $B_\theta$  をかけて積分することにより, ポロイダル磁場と同じ議論になって減衰することがわかる.

## 4 運動学的ダイナモモデル

この節では運動学的ダイナモモデルを紹介し, その性質を議論する.

### 4.1 $\omega$ 効果

再び誘導方程式から始めよう.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \lambda \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (30)$$

軸対称な磁場および速度場を考えると, それぞれをトロイダルおよびポロイダル成分に分解し,

$$\mathbf{u} = s\omega \mathbf{e}_\phi + \mathbf{u}_P, \quad \mathbf{B} = B \mathbf{e}_\phi + \mathbf{B}_P, \quad \mathbf{B}_P = \nabla \times (A \mathbf{e}_\phi),$$

を導入する.  $\omega$  は方位角方向の角速度,  $\mathbf{u}_P$  はポロイダル速度場 (子午面流),  $B$  は方位角方向の磁場,  $A$  はポロイダル磁場の流れ関数を表している. すると, 誘導方程式は

$$s \frac{D}{Dt} \left( \frac{B}{s} \right) = s (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega + \lambda \nabla^2 B, \quad (31)$$

$$s \frac{D}{Dt} (sA) = \lambda \nabla^2 A. \quad (32)$$

トロイダル成分の式右辺第 1 項目  $s (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega$  は差分回転  $\nabla \omega$  によってポロイダル磁場が引き延ばされトロイダル磁場が生成されることを表す項である. このような効果は  $\omega$  効果 とよばれる.

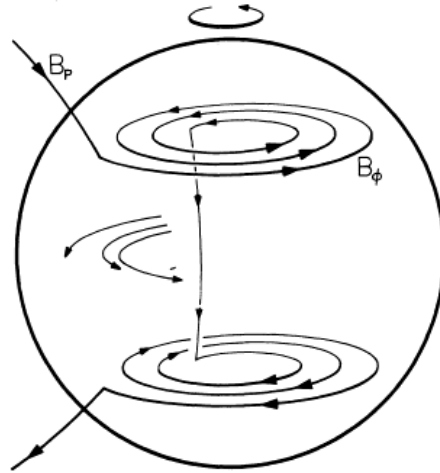


図3  $\omega$  効果の模式図. Levy (1976) より.

しかしながら  $\omega$  効果だけでは磁場の増幅は起こらない. ポロイダル磁場の式から, ポロイダル成分は拡散して減衰してしまうことがわかる. したがって, トロイダル成分も, その生成源である  $\omega$  効果のポロイダル磁場がなくなってしまう, 結局減衰していくだけである. すなわち軸対称なダイナモは不可能である, という, 先の Cowling の定理の一例を確認した.

## 4.2 $\alpha$ 効果

以上のように完全な軸対称モデルでは磁場が増幅するダイナモは作れない. そこで, 軸対称モデルになんらかの3次元的な効果を導入することを考える (Parker 1955).

今, 速度場  $u$  が, それと平行な渦度場  $\omega$  を伴っている場に1本の磁力線が存在している状況を考える. 磁力線は速度場によってもちあげられつつ渦度場によってねじ曲げられ, もともとの磁力線に垂直なループを形成するであろう. すると,  $J = \nabla \times B / \mu$  の関係から, 磁力線に平行な電流場  $J$  が誘導されることになる. このような効果は  $\alpha$  効果と呼ばれる. 速度場の性質であるヘリシティ  $u \cdot \omega$  が0でなければ  $\alpha$  効果が働くと考えられる.

$\alpha$  効果を導入すると, オームの法則が

$$J = \sigma(E + u \times B) \Rightarrow J = \sigma(\alpha B + E + u \times B)$$

と書き換えられる. ここで  $\sigma, E$  は電気伝導度および電場である. すると誘導方程式の各

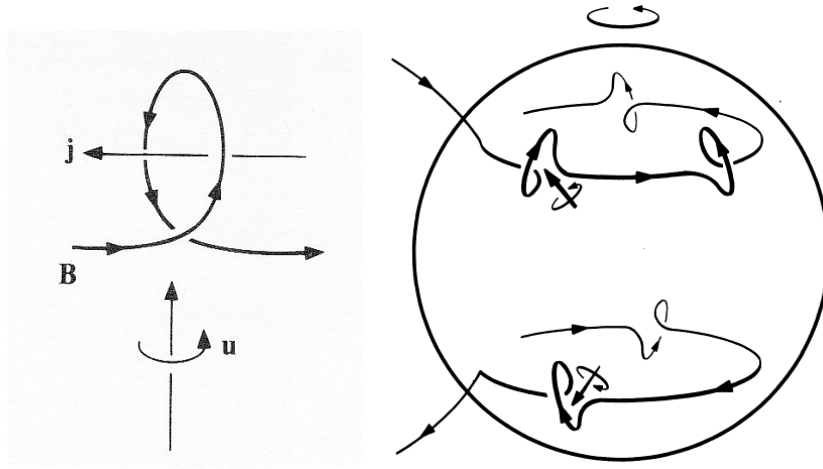


図 4  $\alpha$  効果の模式図. Moffatt (1978) と Levy (1976) より.

成分は次のようになる.

$$s \frac{D}{Dt} \left( \frac{B}{s} \right) = s(\mathbf{B}_P \cdot \nabla)\omega + [\nabla \times \{\alpha \nabla \times (A \mathbf{e}_\phi)\}]_\phi + \lambda \nabla^2 B, \quad (33)$$

$$s \frac{D}{Dt} (sA) = \alpha B + \lambda \nabla^2 A. \quad (34)$$

かくして, トロイダル成分からポロイダル成分への変換項が加わったことになり, 磁場の増幅が期待される.

以下, 簡単な場合について,  $\alpha$  効果の導入された (ほぼ) 軸対称な運動学的ダイナモモデルの振舞いを調べよう.

### 4.3 $\alpha^2$ ダイナモ

まずは  $\alpha$  効果のみの場合にどのように磁場が振舞うかを調べてみよう. 簡単のため, 球の内部のとある局所的な領域を考え, 直交座標系を張る. 方位角方向に  $x$  軸, 緯度方向に  $y$  軸, 動径方向に  $z$  軸をとる. 誘導方程式は

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\alpha \nabla^2 A + \lambda \nabla^2 B, \quad (35)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B + \lambda \nabla^2 A. \quad (36)$$

$A, B$  が  $\exp[i(l y + i m z) + q t]$  に比例すると仮定すると, 分散関係は

$$q = \pm \alpha \sqrt{l^2 + m^2} - \lambda(l^2 + m^2).$$

したがって,  $\alpha \geq \lambda\sqrt{l^2 + m^2}$  ならば磁場は増幅する. 成長率  $q$  が実数なので振動解にはならない.

#### 4.4 $\alpha\omega$ ダイナモ

次に,  $\alpha$  効果と  $\omega$  効果が合わさった場合を考える. 先と同様にして局所直交座標を張り,  $\omega$  が  $z$  にのみ依存すると仮定すると,

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial A}{\partial y} \frac{d\omega}{dz} + \lambda\nabla^2 B, \quad (37)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B + \lambda\nabla^2 A. \quad (38)$$

$\frac{d\omega}{dz}$  を定数と仮定し,  $A, B$  を  $\exp[i(ly + imz) + qt]$  の形で解を求めると,

$$q = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{l\alpha \frac{d\omega}{dz} - \lambda(l^2 + m^2)}. \quad (39)$$

したがって,  $\alpha \frac{d\omega}{dz}$  が十分大きければ増幅する. 成長率  $q$  は複素数なので, 伝播 (振動) する解である.

#### 4.5 磁束輸送ダイナモモデル ~ 子午面流の効果

$\alpha\omega$  ダイナモモデルは太陽黒点磁場の周期的振舞いを説明するものとして Parker によって考案されたものである. 最近ではこのモデルを発展させて, パラメター  $\alpha$  と  $\omega$  の空間分布をより現実的にしたものが提案されている. その一つが磁束輸送ダイナモ (flux transfer model) である. このモデルではさらに平均子午面流の効果も考慮されている. その磁場増幅の仕組みは以下のようなものである.

1.  $\alpha$  効果により低緯度表面でトロイダル磁場からポロイダル磁場が生成される.
2. 子午面流により表面ポロイダル磁場が低緯度から極へと輸送され, さらには対流層の底部まで押しこまれる.
3. 対流層底部ではタコラインと呼ばれる帯状流速の勾配の強い層が存在している. そこでの  $\omega$  効果により押しこまれてきたポロイダル磁場からトロイダル磁場が生成される.
4. トロイダル磁場は対流層底面の子午面流によって低緯度表面へ輸送される.
5. 再び  $\alpha$  効果によってポロイダル磁場が生成される.



このようなモデルが構築できるようになった一つの要因は1990年代に発展した日震学による観測結果が大きい。太陽内部の角速度分布と表面子午面流の存在が明らかにされたため、上のようなより具体的な  $\alpha$  と  $\omega$  の空間分布を考えることができるようになったのである。

## 5 力学的ダイナモモデル

最後に、力学的ダイナモモデルの仕組みと近年の数値シミュレーションの状況について述べる。

### 5.1 エネルギー的考察

運動方程式および誘導方程式にそれぞれ  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{B}$  をかけて積分すると、運動エネルギー及び磁気エネルギーの式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_0 \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 dV = - \int_V \rho_0 \alpha T \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{u} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV + \int_V \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} dV, \quad (40)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2\mu} |\mathbf{B}|^2 dV = - \int_V \mathbf{u} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV - \int_V \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} dV, \quad (41)$$

運動エネルギーの式の右辺第1項目は浮力による仕事、2項目がローレンツ力による仕事、3項目が粘性によるエネルギー散逸である。一方、磁気エネルギーの式右辺第1項目はローレンツ力による磁気エネルギーへの変換項、2項目がジュール熱によるエネルギー散逸である。したがって、力学的ダイナモ問題のエネルギー的構造は、

1. 内部エネルギー・重力エネルギーによって運動エネルギーが生成される
2. その一部はローレンツ力によって磁気エネルギーへと変換される
3. その磁気エネルギーの増加がジュール熱による散逸に打ち勝てば磁場が増幅できる。

実際には磁場が増幅すると、運動方程式においてローレンツ力が卓越しはじめ、流れ場に影響して、磁場の成長が抑えられたりする。そのようなフィードバックを全て入れ込んで計算機で解こうとするのが力学的ダイナモモデルの数値シミュレーションである。

## 5.2 ダイナモベンチマーク

数値シミュレーションを行うには, そのプログラムが果して正しいものなのかを確認することが極めて重要である. しかしながら, そのことを完全に確認することは不可能であり, せいぜいプログラムが解析解を再現できるかどうかをチェックするしかない. 力学的ダイナモモデルの場合は, 磁場が発達する解析的なダイナモ解が見いだされていないのでより状況が困難である.

そこで Christensen *et al.* (2001) では, 数値的に求めた準定常状態のダイナモ解を, さまざまなグループで開発していたダイナモモデルで再現計算し, それらの結果を比較することでプログラムの正当性をチェックするプロジェクトを行った. 参加したグループの数値計算結果は定性的にも定量的にもよく一致していた. 以後, このようなダイナモ計算のベンチマークは, 非弾性系の場合あるいは磁場境界条件を変えた場合, 数値計算の効率の比較など, さまざまなかたちで引き続き行われている.

## 5.3 地球ダイナモ計算

地球磁場を模したダイナモ計算で先駆的なものは Glatzmaier and Roberts (1995a,b) の研究である. かれらは流体核だけでなく固体内核の回転と磁気的影響も考慮したシミュレーションを行い, 磁場反転が不規則に起こる双極子磁場が卓越している解を提示し, 地球磁場の特徴と似ていることを主張した. さらにこの解は, 同時期に地震波の解析で見いだされていた内核がマントルに対して約  $3^\circ$ /年の角速度で速く回転しているという性質も表現できていたため, 観測とシミュレーションの一致という点で注目を集めた<sup>\*2</sup>.

しかしながら Glatzmaier たちの計算で用いた粘性率の値は, 実は現実の地球流体核のものよりもかなり大きい値を用いている. 現在のスーパーコンピュータをもってしても, 地球流体核中の乱流を解像しつつ全球的な規模の磁場と速度場を計算することは不可能である. この困難に対して, 最近では

- 計算機の能力の発達に応じて, 数値計算可能な限界まで粘性率を小さくした計算に挑戦する.
- 流体核の一部を切り取った局所的な領域での流体計算を行い, 乱流モデルを構築して全球的なダイナモモデルへ組み込む.

---

<sup>\*2</sup> その後の詳細な地震波解析により, 地球内核がマントルに対して速く回っているということは確定的でなく, 未だ議論の途上となっている.

- 計算可能な範囲で粘性率を変化させた多くの数値解を求め、解の粘性率依存性を見だし小さな粘性率の状況へと外挿する。

といった取組みがなされてきている。

## 5.4 太陽ダイナモ計算

太陽磁場の力学的ダイナモシミュレーションは Gilman and Miller (1981) に始まり, Glatzmaier (1987) でひとまず完成されたと当時は思われていた。その内部角速度分布は, 自転の効果が卓越した, 回転軸方向に一樣な円柱状分布をしていた (テイラー=プラウドマンの定理)。しかしながら, 1990 年代に発達した日震学の結果から, 太陽対流層の角速度分布が観測的に明らかになった。その分布は回転軸方向ではなくむしろ動径方向に一樣なものであったために, これまでの数値シミュレーション結果を見直さなければならなくなった。

2000 年代には圧縮性を考慮した (非弾性系) 力学的ダイナモの大規模計算が可能となり, さまざまな数値シミュレーション結果が再び発表されるようになったが, 角速度分布は依然として円柱状のものばかりであった。その後, Miesch et al. (2006) は, 対流層底面において極と赤道の間に数  $K$  の温度差が存在すれば, 動径方向に一樣な傾向の角速度分布が生成されうることを示した。最近では, 京コンピュータを利用した, 完全圧縮性流体の超高解像度の太陽ダイナモシミュレーションが行われており, これまでに解像できなかった表面付近の対流運動と磁場生成の様子が明らかにされつつある (Hotta et al. 2014)。

## 参考文献

- [1] Buckus, G. E., 1958 : A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos. *Ann. Phys.*, **4**, 372–447.
- [2] Backus, G., Parker, R., Constable, C., 1996 : *Foundation of Geomagnetism*. Cambridge University Press, 369pp.
- [3] Busse, F. H., 1975 : A necessary condition for the dynamo. *J. Geophys. Res.*, **80**, 278–280.
- [4] Chirdless, S., 1969 : Théorie magnétohydrodynamique de l'effect dynamo. *Dep. Mech. Fac. Sci.*, Paris, Rep.
- [5] Christensen, U. R., Aubert, J., Cardin, P., Dormy, E., Gibbons, S., Glatzmaier, G. A., Grote, E., Honkura, Y., Jones, C., Kono, M., Matsushima, M., Sakuraba,

- A., Takahashi, F., Tilgner, A., Wicht, J., Zhang, K., 2001: A numerical dynamo benchmark. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **128**, 25–34.
- [6] *Mathematical Aspects of Natural Dynamos*. edited by E. Dormy, A. M. Soward, CRC Press, 482pp. (2007)
- [7] Gilman, P. A., Miller, J., 1981 : Dynamically consistent nonlinear dynamos driven by convection in a rotating spherical shell. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **46**, 211–38
- [8] Glatzmaier, G. A., Roberts, P. H., 1995a : A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature*, **377**, 203–209.
- [9] Glatzmaier, G. A., Roberts, P. H., 1995b : Rotation and magnetism of Earth’s inner core. *Science*, **274**, 1887–1891.
- [10] Hotta, H., Rempel, M., Yokoyama, T., 2014 : High-resolution calculations of the solar global convection with the reduced speed of sound technique. I. the structure of the convection and the magnetic field without the rotation. *Astrophys. J.*, **786**, 24.
- [11] *Geomagnetism*, Vol.2, edited by J. A. Jacobs, Academic Press, 579pp. (1987)
- [12] Levy, E. H., 1976 : Generation of planetary magnetic fields, *Annual review of earth and planetary sciences*, **4**, 159–185.
- [13] Miesch, M. S., Brun A. S., Toomre, J., 2006 : Solar differential rotation influenced by latitudinal entropy variations in the tachocline. *Astrophys. J.*, **641**, 618–625.
- [14] Moffatt, H. K., 1978 : *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge University Press, 343pp.
- [15] Merrill, R. T., McElhinny, M. W., McFadden, P. L., 1995 : *The magnetic field of the Earth*. International Geophysics Series, 63, Academic Press, 531pp.
- [16] Parker, E. N., 1955 : Hydrodynamic dynamo models. *Astrophys. J.*, **122**, 293–314.
- [17] Proctor, M. R. E., 1977 : On Backus’ necessary condition for dynamo action in a conducting sphere. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **9**, 89–93.
- [18] 太陽, シリーズ現代の天文学, 桜井 隆, 小島正宜, 小杉健郎, 柴田一成, 編