微分方程式を解く

数理解析研究所・講師　　岸本　展　（きしもと　のぶ）

本講座の目的は，**非線形偏微分方程式**を解くための方法として広く用いられている**逐次近似法**について紹介し，実際に簡単な方程式を解いてみることである．中学や高校で学習する連立方程式や2次方程式のような代数方程式は，その答えとして等式をみたす「数」を求めることになるが，ここでの微分方程式とは関数とその微分（導関数）に関する等式（関数方程式）であり，求めるべきは等式を成り立たせるような「関数」である．関数は単なる数よりもずっと複雑であり多くの情報を含んでいるから，首尾よく答えを求めることはいかにも大変そうである．実際，2次方程式には解の公式があり，連立（1次）方程式も係数行列の逆行列を使った解の表示が可能であるが，微分方程式に対して解の公式あるいは具体的な解の表示を得ることは一般には望めない．

微分方程式を解く，といっても様々な解釈があるが，少なくとも「数値的に解く」ことと「厳密に解く」ことの違いは大きい．「数値的に解く」とは，コンピュータを用いて近似的な解を計算することである．この場合,（得られた近似解がちゃんと実際の解に近いかどうかを検証するのは大変な作業であるが,）少なくとも近似解については具体的な関数値が求まるので，微分方程式を用いて物理現象をシミュレートしたいときなどは大いに役立つ．これに対し「厳密に解く」といった場合は近似的にではなく実際の解（厳密解）についての情報を得ることが求められる．しかし，解の表示が得られなければ厳密解の関数値を具体的に知ることは難しい．そこで，多少ずるい気もするが，厳密解が「存在する」ことを示せれば，それをもって微分方程式が「解け」たと表現することがしばしばある．代数方程式でいえば，5次方程式は解の公式がないから一般には「解けない」が，実数係数であれば中間値の定理より実数解が少なくとも一つ存在する．あるいは複素数係数でも，代数学の基本定理より複素数解が存在する．この意味では5次方程式は必ず「解ける」ことになる．

いくら厳密だからといって，具体的な値について何もわからないような解では，とりわけ物理現象を理解し予測しようという目的からするとほとんど意味がないように思われるかもしれない．しかし，厳密解が存在しない方程式なのに，数値計算をしてみると誤差がうまく影響してたまたま解のようなものが得られてしまった，ということが起こらないとも限らない．こんな時は，理論的にも解が存在するようなモデルに取り替えて，数値計算をやり直すのが妥当と思われるが，実際に解が存在しないことを知らなければ，たまたま得られた怪しげな解を厳密解の近似と錯覚してしまう危険性がある．このように，厳密解の（いろいろな性質がわかればなお良いが）存在を示すだけでも重要な意味があるのである．

本講座では，非線形偏微分方程式の具体例として以下の**非線形 Schrödinger 方程式**を考えたい．

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = \lambda |u|^2 u.$$

ここで $u = u(t, x_1, \ldots, x_d) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ は未知関数，λ は 0 でない実数の定数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位，$|\cdot|$ は複素数の絶対値を表し，

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

は d 次元 Euclid 空間上の Laplace 作用素である．方程式の左辺は時間発展を伴う Schrödinger 作用素を表しており，それに右辺のようなゲージ不変性を持つ 3 次べき乗型の非線形相互作用が加わる．この方程式は「分散型」と呼ばれるクラスの非線形偏微分方程式の典型例であり，量子力学をはじめとする多くの分野において様々な現象のモデル方程式，あるいはその簡略化として現れる．左辺の虚数単位が無い方程式は（非線形）熱伝導方程式で，こちらも長い歴史を持つ由緒正しい方程式であるが，解の性質は大きく異なる．

1 導入

本題に入る前に，微分方程式を構成する関数や微分，さらに極限操作において重要となる完備性の概念などについてまとめる．

1.1 実数

まず実数について復習する．実数を導入する方法はいくつかあるが，ここでは有理数の極限として得られるものと考えよう．

出発点として，最も基本的な数である自然数

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$$

から始める．自然数どうしの足し算や掛け算の結果は再び自然数になるが，引き算はいつでもできるとは限らない．そこで，0 および負の数を加えた整数

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

を導入する．これで引き算はできるようになるが，割り算がしたいので分数を加えた有理数

$$\mathbb{Q} := \{\tfrac{q}{p} \,|\, p, q \in \mathbb{Z},\, p \neq 0\}$$

を導入する．ここまでの流れは実に自然であるが，ここから実数 $\mathbb{R}$ への拡張は全く非自明である．例えば 2 次方程式を解くために平方根を導入しても，実数全体には程遠い．円周率 π や自然対数の底 e を加えても，それらで表すことのできない実数がいくらでもある．

有理数 $\mathbb{Q}$ と実数 $\mathbb{R}$ は，ともに 2 元の大小関係が定まっており四則演算ができるような対象であるが，実数 $\mathbb{R}$ だけがみたす重要な性質として，極限操作で閉じていること，即ち **完備性** が

ある．有理数列が収束する（厳密には ε-δ を用いて定義されるが，とりあえず「数直線上である1点に近づいていく」ぐらいに考える）とき，その極限は必ずしも有理数とは限らない．たとえば，有理数列 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$q_1 := 1, \qquad q_{n+1} := 1 + \frac{1}{q_n + 1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

により定めれば，この数列はある値 q_∞ に近づいていくことがわかり，さらに q_∞ は

$$q_\infty = 1 + \frac{1}{q_\infty + 1}, \qquad q_\infty \geq 1$$

をみたすはずなので，2次方程式を解いて $q_\infty = \sqrt{2}$ を得る．これは有理数でない．

これに対し，実数列が収束すれば，極限はかならず実数である．この性質が実数を特徴づけるものである．

有理数から実数を構成的に定義する方法もある．有理数からなる数列で収束するもの全体を考え，その中で同じ値に収束するものどうしを1つのグループ（同値類）とみなすと，異なるグループ全体とその収束先である実数の全体には1対1の対応関係がある．2つの実数の大小関係や四則演算は，対応するグループの中から代表して1つ有理数列を選び，それを構成する有理数同士の演算を考えることで自然に定義される．最後に，構成法から任意の実数に対してそれにいくらでも近い有理数があるのだから，収束する実数列があればそれと同じ値に収束する有理数列が存在し，よって極限も実数である.（しかしながら，今そこにある2つの実数の足し算をするために一々有理数列を思い描いていては大変なので，日常生活においては「数直線上の点」などといった，なんとなくの捉え方で十分である.）

このように，すでにある対象に「極限点」をすべて加えることで完備な対象を構成する手続きを **完備化** という．点列の収束の定義は2点間の **距離** の決め方に依存するので，完備化して得られる対象も一般には距離の決め方によって異なることに注意する．実数全体は，有理数全体の（通常の Euclid 距離に対する）完備化とみなすことができる．

d 個の実数の組全体を $\mathbb{R}^d$ と書き，d 次元 Euclid 空間と呼ぶ．複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ は，集合としては $\mathbb{R}^2$ と同一視できるが，虚数単位 i に関する計算規則により掛け算や割り算が可能となっている点が $\mathbb{R}^2$ と異なる．

1.2　関数と微分

集合 X の個々の元に対して集合 Y の元を（1つ）対応させる対応を，Y に値を取る X 上の関数と呼ぶわけであるが，ここでは方程式の解として，$\mathbb{R}^{1+d}$ あるいはその部分集合上で定義された $\mathbb{C}$-値関数を主に考える．

微分方程式の解を求めるにあたり，まったく一般の関数を考えるのは対象が多すぎる．まずは対象を「微分できる」関数に限定するのは自然であろう.（のちに，通常の意味で微分できな

い関数に対しても微分方程式を考える.）そのために，関数の微分可能性，さらに連続性を定義する必要がある．

$\mathbb{R}$ もしくはその部分集合上定義された関数 f が，点 x_0 において **連続** であるとは，定義域に属する任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ で x_0 に収束するものに対し常に，数列 $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ が $f(x_0)$ に収束することをいう．一般の空間上の関数の連続性は位相の言葉で定義されるが，そこまで抽象的な話はここではしない．直感的には，関数のグラフを描いた時に x_0 の前後でグラフがつながっており，変にジャンプしたり穴が開いたりしていない状況である．

$\mathbb{R}$ もしくは開区間上定義された関数 f が，点 x_0 において **微分可能** であるとは，極限

$$\lim_{h\neq 0,\, h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

が存在することであり，その極限を x_0 における微分係数といって

$$\frac{d}{dx}f(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0)$$

などと書く．微分可能性の定義においては関数が連続である必要はないが，関数がある点で微分可能であればそこで連続である．x_0 に対して x_0 における f の微分係数を対応させる関数が f の導関数であり，導関数を求める操作が微分である．

多変数関数の場合は状況がやや複雑である．まず $\mathbb{R}^d$ の点列の収束については，$\mathbb{R}$ における 2 点 x, y 間の距離

$$d(x,y) := |x-y| = \max\{x-y, y-x\} = \sqrt{(x-y)^2}$$

の自然な拡張として d 次元 Euclid 距離

$$d((x_1,\dots,x_d),(y_1,\dots,y_d)) := \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_d-y_d)^2}$$

を考えればよい．そうすると，連続性の定義は 1 変数の場合と同様である．

j を 1 以上 d 以下の自然数とするとき，関数 f が点 $x^0=(x_1^0,\dots,x_d^0)\in\mathbb{R}^d$ において，第 j 成分に関して（または x_j 方向に）**偏微分可能** とは,

$$\lim_{h\neq 0,\, h\to 0} \frac{f(x^0+he_j)-f(x^0)}{h}$$

が存在することである．ここで $e_j\in\mathbb{R}^d$ は x_j 方向の単位ベクトル，すなわち第 j 成分のみ 1 で他が 0 の点である．極限が存在すれば

$$\frac{\partial}{\partial x_j}f(x^0), \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)$$

などと書き，$x^0\in\mathbb{R}^d$ から $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)$ への対応を第 j 成分に関する偏導関数という．1 変数の場合と異なり，関数 f がある点 x^0 において，すべての方向に偏微分可能であっても，点 x^0 で連続とは限らない．ただし，すべての偏導関数が連続であれば元の関数もまた連続となる．そこで,

関数 f のすべての偏導関数が存在して（つまり各点ですべての方向に偏微分可能で）それらが連続であるとき，f は C^1 級であるという．それ自身 C^1 級で，かつすべての偏導関数が C^1 級であるような関数を C^2 級と呼ぶ．$C^3, \ldots, C^\infty$ 級関数も同様に定める．偏導関数の偏導関数を考えるときは

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

等と表記する．

これで，冒頭に述べた非線形 Schrödinger 方程式の意味がようやく説明できた．方程式には最大 2 回までの偏微分が現れているので，その解は $\mathbb{R}^{1+d}$ 上 C^2 級の関数の中から探すのがひとまず妥当と思われる．

少し寄り道をして，連続性や微分可能性をみたさない奇妙な関数の例をいくつか紹介しておく．

(i) Cantor 関数．閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数であって，ほとんどすべての点で微分可能であり，微分係数が 0 であるが，区間の両端での値が異なる．すなわち，微分積分学の基本定理をみたさない（実際は絶対連続でないので基本定理の仮定がみたされず，不思議ではない）．

(ii) Weierstrass 関数．$\mathbb{R}$ 上連続であるが，すべての点において微分不可能である関数．

(iii) $\mathbb{R}$ 上の実数値関数で，すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して条件 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ をみたすものを加法的関数と呼ぶ．一次関数 $f(x) = ax$ ($a \in \mathbb{R}$ は定数) がこれに当てはまるのは明らかであるが，それとは異なる加法的関数の存在が（選択公理を用いて）示される．この関数はすべての点で不連続であり，さらに驚くべきことにそのグラフは平面で稠密，つまり平面上の任意の点のいくらでも近くを通る．(そのような関数を想像できますか？)

1.3 関数空間

微分方程式を解くためには，d 次元 Euclid 距離を備えた $\mathbb{R}^d$ と同じように，関数からなる集合上でも距離を考え，関数自体を「点」とみなして，その大きさや収束を扱うと見通しが良い．これが **関数空間** である．

既に連続関数，C^k 級関数などいくつかの関数空間が登場している．$\mathbb{R}^d$ 上の連続関数，C^k 級関数，C^∞ 級関数全体をそれぞれ

$$C(\mathbb{R}^d), \quad C^k(\mathbb{R}^d), \quad C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

とかく．さらに $C_0(\mathbb{R}^d), C_0^k(\mathbb{R}^d)$ のように添え字 0 が付けば，無限遠方で 0 に収束するという制限が付くものとする．

後の都合上，関数は $\mathbb{R}^d$ 上で何回も（偏）微分できて，すべての（偏）導関数が $\mathbb{R}^d$ 上可積分であるのが理想的である．このような関数の例として，C^∞ 級かつ，ある有界集合の外で恒等的に 0 となっている関数の全体を $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ と表す．

空間 C_0, C_0^k はそれぞれに対応するノルム

$$\|f\|_{C(\mathbb{R}^d)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|, \qquad \|g\|_{C^k(\mathbb{R}^d)} := \sum_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x)\Big|$$

を備えたノルム空間である．ここで **ノルム** とは，それぞれの空間上で定義された非負実数値関数で斉次性や三角不等式等の条件をみたすものであり，その空間における点の大きさの尺度である（$\mathbb{R}^d$ では絶対値にあたる）．$\mathbb{R}^d$ の場合と同様に 2 点の差のノルムによって 2 点間の距離が測れるから，それに基づいてノルム空間の完備性が定義される．C_0, C_0^k はいずれもそれぞれのノルムに関して完備な空間になっており，またそれぞれのノルムに関する C_c^∞ の完備化とみなすことができる．空間 C_c^∞ が実数の構成における有理数全体と同じ役目を果たしており，特に C_0, C_0^k の任意の関数は，C_c^∞ の関数列の，それぞれのノルムの意味での極限として表せる．

数の空間のように次元が有限の場合，ノルムの決め方は実質的に 1 通りしかないことがわかっている．一方，関数の空間は **無限次元** である（いくらでも多くの一次独立な関数が考えられる）．この場合，ノルムの決め方に多様性があり，同じ空間 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ の完備化でも，ノルムによって全く異なった空間が得られるのが面白い．

さて，これまでに定義した関数空間は解の性質，特に何回微分できるかをよくとらえてはいるものの，次章以降で説明する線形発展作用素を用いた非線形方程式の解法においてはいささか扱いづらい．そこで，**p 乗可積分関数** の空間 $L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1\le p<\infty)$ を新たに導入する．L^p 空間は L^p ノルム：

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} := \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\, dx\Big)^{1/p}$$

による $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ の完備化とする．定義から L^p 空間は L^p ノルムに関して完備であり，また L^p 空間の任意の関数は C_c^∞ の関数によって，L^p ノルム（から定まる距離）の意味でいくらでも近似できる.（積分の定義は長くなるので，ここでは深入りしないことにしよう.）

とりわけ L^2 空間は，線形方程式を解く際に強力な道具となる Fourier 変換と相性が良い．次章では解の属する関数空間として，L^2 空間の性質を保ちつつ「微分可能回数」の表現を可能にした Sobolev 空間を定義する．但し，解の存在の証明の過程で L^2 ではない L^p 空間も登場する．

2　線形偏微分方程式

本講座で扱いたい非線形 Schrödinger 方程式は，異なる意味を持つ 2 つの独立変数 t と $x=(x_1,\dots,x_d)$ を持っている．物理的には t が時間，x が位置を表す変数と思ってよく，解 $u(t,x)$ は，何らかの物理量の時刻 t における，位置 x での値を表していると考えられる．つまり解 $u(t,x)$ を求められれば物理現象の時間発展の様子を知ることができる．特に，位置 x のみに依存する関数 $u_0(x)$（初期値）が与えられたとき，$u(0,x)=u_0(x)$ をみたす方程式の解 $u(t,x)$ が求まれば，初期状態から未来が予測できるというわけである．

このように，方程式と初期時刻での条件（初期条件）をみたす解を求める問題，すなわち **初期値問題** は，応用上極めて重要である．多くの物理現象を考えると，初期値問題に対する理想的な結末として，初期値を与えるごとにただ一つ解が求まり（一意可解性），さらに解が初期値の揺らぎに対して安定であることが期待される．これらの性質は纏めて初期値問題の **適切性** と呼ばれ，時間発展を伴う微分方程式の研究において最初に確かめるべき基本的な性質とみなされている．この講座では適切性の中でも解の存在（可解性）に焦点を当てているが，以降で紹介する逐次近似による解法を用いると,（やや弱い意味での）解の一意性と初期値に対する安定性も自然に示せることが多い．

この章では，まず以下の線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を解いてみたい．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u + F, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

ここで外力項 $F = F(t,x)$ および初期値 $u_0 = u_0(x)$ は既知の関数である．実はこの初期値問題に対しては F, u_0 に関する適当な条件を課せば「解の公式」が得られることがわかり，次章で非線形問題を扱う際の足掛かりとなる．

2.1 Fourier 変換と Sobolev 空間

仮に方程式が非常に複雑であったり，あるいは考えている空間領域が全空間 $\mathbb{R}^d$ でなく一般の領域であったならば，線形方程式とて容易に解けるものではなく，関数解析の深い知識を必要とする．ところが (1) のようにシンプルな方程式を全空間 $\mathbb{R}^d$ で考える場合には，Fourier 解析が強力な道具となり，初期値問題はあっという間に解けてしまうのである．

まず $\mathbb{R}^d$ 上の（複素数値）関数 f に対する **Fourier 変換** $\mathcal{F}f = \hat{f}$ および逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}$ を

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^d$$

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)\,d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

で定める．ここで $x\cdot\xi := \sum_{j=1}^d x_j\xi_j$ は d 次元 Euclid 空間の通常の内積である．

上の変換は，少なくとも「理想的な関数」，つまり $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対しては定義できて，$\hat{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ となることもわかる．また，

$$\mathcal{F}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(\xi) = i\xi_j\hat{f}(\xi) \qquad (j = 1, 2, \dots, d),$$

$$\mathcal{F}(\Delta f)(\xi) = -|\xi|^2\hat{f}(\xi)$$

が簡単な部分積分の計算で確かめられる．つまり，x 変数に関する微分演算は，Fourier 変換した先での掛け算に置き換えられる．関数の積の Fourier 変換は Fourier 変換の合成積に置き換わる：

$$\mathcal{F}(fg) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\hat{f} * \hat{g}, \qquad (\hat{f} * \hat{g})(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi - \eta)\hat{g}(\eta)\, d\eta.$$

Fourier 変換のもっとも重要な性質の一つは次の L^2 等長性（**Plancherel の定理**）である：

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathcal{F}^{-1}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

これらの等式と C_c^∞ の L^2 での稠密性（任意の L^2 関数が C_c^∞ 関数で近似できること）から，$\mathcal{F}$ および $\mathcal{F}^{-1}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の全単射な等長作用素に拡張でき，互いに逆作用素の関係となる．

次に，実数 s に対して，$\mathbb{R}^d$ 上の **Sobolev 空間** $H^s(\mathbb{R}^d)$ を，以下の Sobolev ノルム $\|\cdot\|_{H^s}$ に関する $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ の完備化として定める：

$$\|f\|_{H^s} := \|(1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{f}(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi\Big)^{1/2}.$$

$s=0$ の場合は H^s 空間は L^2 空間に等しい．また，s の値が大きいほど，空間 H^s としては狭くなる．定義の右辺を見ると，f の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ におおむね s 回 ξ を掛け算しているから，x 変数について言えばこれは s 回微分していることに相当する．よって，Sobolev 空間 H^s は，大雑把に言えば s 回微分してもなお L^2 に入っているような関数のクラスである．実際，任意の非負整数 k と任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$H^{k+\frac{d}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}^d) \subset C_0^k(\mathbb{R}^d)$$

という包含関係が成立し，Sobolev の指数 s から $d/2$ を引いたものが関数の微分可能回数におおむね相当することがわかる．

2.2 線形発展作用素と解の公式

以上の準備のもとで，まずは $F=0$ の場合に (1) の解を求めよう．方程式および初期条件の両辺を，t をパラメータと見て x に関して Fourier 変換してみると，

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi) = -i|\xi|^2\hat{u}(t,\xi), \qquad \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)$$

を得る．この段階で，ξ に関する微分が現れないから，今度は ξ をパラメータとみなせばこれは線形の常微分方程式である．これに対し解が一意的に存在し，

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-it|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)$$

と書けることは常微分方程式の基本事項である．最後に逆 Fourier 変換を施して，次の「解の公式」を得る：

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\big[e^{-it|\cdot|^2}\hat{u}_0(\cdot)\big](x).$$

以上の議論には実は怪しいところが何か所かあったが，あまり深入りするのはやめておこう．時刻 t における解 $u(t,x)$ の Fourier 変換 $\hat{u}(t,\xi)$ は，初期値の Fourier 変換 $\hat{u}_0(\xi)$ に，絶対値が 1 の複素数 $e^{-it|\xi|^2}$ をかけるだけで得られることに注意する．特に，初期値 u_0 が Sobolev 空間 H^s の元であれば，任意の時刻 t での解 $u(t,\cdot)$ も同じ Sobolev 空間に属し，その H^s ノルムは変わらないことがわかる．よって，$s>2+\frac{d}{2}$ であれば解 $u(t,x)$ は x について C^2 級で，方程式より t についても C^1 級であることがわかり，確かに初期値問題の解となる．一方で，Fourier 変換は L^2 上の作用素として定義できることに注意すると，必ずしも C^2 級でないような u_0 に対しても「解」$u(t,x)$ が定義できる．この解も同様に C^2 級とは限らないので，古典的な意味では微分方程式をみたしていないが，微分作用素を拡大解釈して，いわゆる「弱い意味での微分」（あるいは**超関数**としての微分）と考えれば，この場合の u は「弱い意味での」（あるいは超関数の）解となる．

上式の右辺はしばしば $[e^{it\Delta}u_0](x)$ と書かれる．各時刻 $t\in\mathbb{R}$ に対し，初期値から t 秒後の解を対応させる作用素（**線形発展作用素**）

$$e^{it\Delta}: u_0 \mapsto u(t,\cdot)$$

は，任意の s について Sobolev 空間 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 上の等長作用素である．

理想的な初期値 u_0（例えば $u_0\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$）に対しては，Fourier 変換の定義に従って直接計算することにより，より具体的な解の表示式：

$$u(t,x)=[e^{it\Delta}u_0](x)=\frac{1}{(4\pi it)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4it}}u_0(y)\,dy$$

（但し $t\neq 0$）が求められる．

最後に外力項 F を含む非斉次問題について考える．Fourier 変換を適用すれば，これも単に非斉次の線形常微分方程式を解く問題に帰着される．実際，x について Fourier 変換した問題

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(t,\xi)=-i|\xi|^2\hat{u}(t,\xi)+\hat{F}(t,\xi),\qquad \hat{u}(0,\xi)=\hat{u}_0(\xi)$$

は，いわゆる定数変化法により

$$\hat{u}(t,\xi)=e^{-it|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)+\int_0^t e^{-i(t-t')|\xi|^2}\hat{F}(t',\xi)\,dt'$$

と求められる．これを逆 Fourier 変換すれば，非斉次問題に対する解の公式

$$u(t,x)=[e^{it\Delta}u_0](x)+\int_0^t [e^{i(t-t')\Delta}F(t',\cdot)](x)\,dt'$$

が得られる．

3　非線形偏微分方程式

それではいよいよ，非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u + i\lambda|u|^2 u, \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

を解くことにしよう．

3.1　積分方程式と縮小写像の原理

非線形方程式 (2) は，線形方程式 (1) の外力項 F を $i\lambda|u|^2u$ で置き換えたものであるから，もし u が (2) の解ならば，前章最後で得られた線形方程式に対する解の公式で F を $i\lambda|u|^2u$ とした等式

$$u(t,x) = [e^{it\Delta}u_0](x) + i\lambda\int_0^t [e^{i(t-t')\Delta}(|u|^2u)(t',\cdot)](x)\,dt' \tag{3}$$

をみたすはずである．逆に，u が (3) をみたし，十分な微分可能性を持てば，u は初期値問題 (2) の解となることが示される．このようにして，非線形方程式の初期値問題はそれと同値な積分等式に置き換えられる．これを **Duhamel の原理** という．

初期値問題を積分形 (3) で書くことの利点として，必ずしも微分できないような，より広いクラスの解（弱解）を考えることができる．実際，(3) においては微分作用素が一切現れないから，2 回微分する必要がある初期値問題 (2) に比べて解 u に対する要請はずっとゆるい．そこで，以下では元の初期値問題 (2) はいったん忘れて，(3) をみたす解 u を求めることを考える．もちろん，(3) の解として得られた u が十分な微分可能性を持つことを改めて示せば，(2) に復帰できる．

ところで，(3) は左辺だけでなく右辺にも未知関数 u を含んでしまっているので，解の表示式でもなんでもなく，それ自体が新たな関数方程式（**積分方程式**）である．このような非線形の関数方程式を解く際に威力を発揮するのが，いわゆる不動点定理である．ここではその一例として，完備距離空間における **縮小写像の原理** を紹介し，証明を与える．

(X,d) を距離空間（例えばノルム空間やその部分集合など）とするとき，写像 $\Phi : X \to X$ が **縮小写像** であるとは，定数 $0 < \alpha < 1$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対し

$$d(\Phi(x),\Phi(y)) \le \alpha d(x,y)$$

が成り立つことである．また $\Phi(x) = x$ をみたす点 $x \in X$ を Φ の **不動点** という．

定理 1 (縮小写像の原理)．完備距離空間上の縮小写像は不動点を唯一つ持つ．

（証明） 点 $x_0 \in X$ を任意にとり，$x_1 := \Phi(x_0)$, $x_2 := \Phi(x_1)$, ... と順次決めて，X 内の点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を作る．任意の非負整数 n, m $(n < m)$ に対し，三角不等式および Φ の縮小性から，

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\le d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&= d(\Phi^{m-1}(\Phi(x_0)), \Phi^{m-1}(x_0)) + \cdots + d(\Phi^n(\Phi(x_0)), \Phi^n(x_0)) \\
&\le \left\{\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha^n\right\} d(\Phi(x_0), x_0) \\
&= \frac{\alpha^n}{1-\alpha}(1 - \alpha^{m-n}) d(\Phi(x_0), x_0) \\
&\le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(\Phi(x_0), x_0) \ \to\ 0 \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

つまり，n 番目から先で点列が動ける距離は，n を大きくするといくらでも小さくなる．これは，点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が収束列であることを示している．いま，X の **完備性** より，収束先の点 $x_\infty \in X$ が存在する．縮小写像は定義から連続であるから，等式 $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ において両辺 $n \to \infty$ の極限を取ることにより $x_\infty = \Phi(x_\infty)$ を得る．即ち，x_∞ は Φ の不動点であり，不動点は少なくとも一つ存在する．

$x, y \in X$ を Φ の 2 つの不動点とすると，Φ の縮小性より

$$0 \le d(x, y) = d(\Phi(x), \Phi(y)) \le \alpha d(x, y).$$

$0 < \alpha < 1$ より $d(x, y) = 0$ でなければならず，x と y は一致する．よって不動点は唯一つである．

□

さて，初期値 u_0 を与えるごとに定まる写像 $\Phi[u_0]$ を

$$\Phi[u_0]:\ u(t, x)\ \mapsto\ [e^{it\Delta}u_0](x) + i\lambda \int_0^t [e^{i(t-t')\Delta}(|u|^2 u)(t', \cdot)](x)\, dt'$$

と定義すると，u が (3) の解であることと $\Phi[u_0]$ の不動点であることとは同じである．そこで，与えられた初期値 u_0 に対して，$\Phi[u_0]$ がその上の縮小写像となるような完備距離空間を与えることができれば，縮小写像の原理から $\Phi[u_0]$ の不動点として (3) の解 u の存在が示される．

このようにして非線形方程式の解を構成する方法を **逐次近似法** という．実際，縮小写像の原理における x_0 を (3) 右辺の第 1 項，すなわち線形方程式の解にとれば，それを第 2 項の未知関数 u と次々に置き換えて得られる関数列によって，厳密解を近似していくわけである．

以上より，問題は

(i) $\Phi[u_0]$ がその上の縮小写像となるような完備距離空間を与え，

(ii) 実際に縮小写像であることを示す，

の 2 点に帰着された．ここまでの議論は一般的なものであるのに対し，ここから先は方程式の性質や問題設定に応じて変化させる必要があり，場合によっては経験に基づいた職人技的な技巧を要することもある．

3.2 Sobolev 空間での積評価と局所解の存在

$\Phi[u_0]$ の縮小性を示すためには，非線形項の大きさを制御する何らかの **評価式** が必要である．次の評価式は簡単に示せるので，証明を与えておく．

定理 2 (Sobolev 積評価式)．$s > d/2$ とするとき，$H^s(\mathbb{R}^d)$ に属する 2 つの関数の積は再び $H^s(\mathbb{R}^d)$ の元となる．さらに，d, s のみに依存する正定数 C が存在して，

$$\|fg\|_{H^s} \le C\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}, \qquad f, g \in H^s(\mathbb{R}^d)$$

が成り立つ．

（証明）　2 つの関数の積に関する Cauchy-Schwarz の不等式

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$$

および合成積に関する Young の不等式

$$\|f * g\|_{L^2} \le \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^2}$$

はよく知られているので認めることにする．まず，非負の実数 a, b, c に対して初等的な計算により

$$(1 + (a+b)^2)^c \le 2^{\max\{2c-1, c\}}\big\{(1+a^2)^c + (1+b^2)^c\big\}$$

が示せる．従って，$s \ge 0$ のとき，任意の $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ について

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} \le \big\{1 + (|\xi-\eta| + |\eta|)^2\big\}^{s/2} \le 2^{\max\{s-1, s/2\}}\big\{(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2} + (1+|\eta|^2)^{s/2}\big\}.$$

よって，

$$\begin{aligned}
&(1+|\xi|^2)^{s/2}\big|(\hat{f} * \hat{g})(\xi)\big| \le (1+|\xi|^2)^{s/2}\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{f}(\xi-\eta)||\hat{g}(\eta)|\,d\eta \\
&\le 2^{\max\{s-1,s/2\}}\Big\{\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}|\hat{f}(\xi-\eta)||\hat{g}(\eta)|\,d\eta + \int_{\mathbb{R}^d}|\hat{f}(\xi-\eta)|(1+|\eta|^2)^{s/2}|\hat{g}(\eta)|\,d\eta\Big\} \\
&\le 2^{\max\{s-1,s/2\}}\big\{[(1+|\cdot|^2)^{s/2}|\hat{f}|] * |\hat{g}| + |\hat{f}| * [(1+|\cdot|^2)^{s/2}|\hat{g}|]\big\}.
\end{aligned}$$

ゆえに，L^2 ノルムに関する三角不等式，Young の不等式と Cauchy-Schwarz の不等式を順に用いて，

$$\begin{aligned}
&\|(1+|\cdot|^2)^{s/2}(\hat{f} * \hat{g})\|_{L^2} \\
&\le 2^{\max\{s-1,s/2\}}\big\{\|(1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{f}\|_{L^2}\|\hat{g}\|_{L^1} + \|\hat{f}\|_{L^1}\|(1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{g}\|_{L^2}\big\} \\
&\le 2^{\max\{s-1,s/2\}} \cdot 2\|(1+|\cdot|^2)^{-s/2}\|_{L^2}\|(1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{f}\|_{L^2}\|(1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{g}\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

ここで，

$$C := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}2^{\max\{s-1,s/2\}} \cdot 2\|(1+|\cdot|^2)^{-s/2}\|_{L^2}$$

は $s > d/2$ ならば有限値であるから，H^s ノルムの定義より積評価が従う．　□

上で示した評価式を用いて，次の **時間局所解** の存在定理を示そう．

定理 3 (滑らかな初期値に対する局所解の存在)．$s > d/2$ とする．任意の $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ に対し，正の実数 $T > 0$ および $[-T, T] \times \mathbb{R}^d$ 上定義された (3) の解 $u \in C([-T, T]; H^s(\mathbb{R}^d))$ が存在する．さらに，T は s, d, λ のみに依存するある定数 $c > 0$ に対して

$$T \geq \frac{c}{\|u_0\|_{H^s}^2}$$

をみたすようにとることができる．

（注意）　$C([-T, T]; H^s(\mathbb{R}^d))$ は $[-T, T] \times \mathbb{R}^d$ 上定義された関数 $u(t, x)$ で，各 $t \in [-T, T]$ ごとに $u(t, \cdot)$ が H^s に属し，写像 $t \mapsto u(t, \cdot)$ が区間 $[-T, T]$ から H^s への連続写像であるようなもの全体の空間である．$C([-T, T]; H^s(\mathbb{R}^d))$ はノルム

$$\|u\|_{C([-T,T];H^s)} := \max_{-T \leq t \leq T} \|u(t, \cdot)\|_{H^s}$$

に関して完備なノルム空間である．

（証明）　初期値 $u_0 \in H^s$ を任意にとるとき，$T > 0$ を適切に定めれば，$\Phi[u_0]$ が

$$X := \left\{ u \in C([-T, T]; H^s(\mathbb{R}^d)) \,\middle|\, \|u\|_{C([-T,T];H^s)} \leq 2\|u_0\|_{H^s} \right\}$$

上の縮小写像となることを示す．X は完備なノルム空間 $C([-T, T]; H^s(\mathbb{R}^d))$ の閉集合であるから，そのノルムから定まる距離に関して完備距離空間である．

まず $u \in X$ に対して $\Phi[u_0](u) \in X$ であることを示そう．線形発展作用素の H^s 等長性により，

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{C([-T,T];H^s)} = \max_t \|e^{it\Delta} u_0\|_{H^s} = \max_t \|u_0\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}.$$

次に，Sobolev の積評価式と $\|\bar{u}\|_{H^s} = \|u\|_{H^s}$ を用いると，

$$\begin{aligned}
&\|i\lambda \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} (|u|^2 u)(t')\, dt'\|_{C([-T,T];H^s)} \leq |\lambda| \max_{-T \leq t \leq T} \int_0^t \|e^{i(t-t')\Delta} (|u|^2 u)(t')\|_{H^s}\, dt' \\
&= |\lambda| \max_{-T \leq t \leq T} \int_0^t \|u(t') \overline{u(t')} u(t')\|_{H^s}\, dt' \\
&\leq |\lambda| C^2 \max_{-T \leq t \leq T} \int_0^t \|u(t')\|_{H^s}^3\, dt' \\
&\leq |\lambda| C^2 T \max_{-T \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^s}^3 \\
&\leq |\lambda| C^2 T (2\|u_0\|_{H^s})^3,
\end{aligned}$$

ただし式中の C は Sobolev 積評価式に現れる，s, d のみに依存する正定数．従って，T が

$$|\lambda| C^2 T \cdot 8 \|u_0\|_{H^s}^2 \leq 1$$

をみたせば，

$$\|\Phi[u_0](u)\|_{C([-T,T];H^s)} \leq \|u_0\|_{H^s} + \|u_0\|_{H^s} = 2\|u_0\|_{H^s}$$

となり，確かに $\Phi[u_0](u) \in X$ である．

最後に，$\Phi[u_0](u)$ が X 上の縮小写像であることを示そう．$u, v \in X$ を任意にとると，同様の計算により

$$\begin{aligned}
&\|\Phi[u_0](u) - \Phi[u_0](v)\|_{C([-T,T];H^s)} \le \|i\lambda \int_0^t e^{i(t-t')\Delta}(|u|^2 u - |v|^2 v)(t')\,dt'\|_{C([-T,T];H^s)} \\
&\le |\lambda| T \max_{-T \le t \le T} \||u(t)|^2 u(t) - |v(t)|^2 v(t)\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

ここで，

$$|u|^2 u - |v|^2 v = (u-v)(|u|^2 + |v|^2) + uv(\overline{u-v})$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}
&\|\Phi[u_0](u) - \Phi[u_0](v)\|_{C([-T,T];H^s)} \\
&\le |\lambda| C^2 T \max_{-T \le t \le T} \left(\|u(t)\|_{H^s}^2 + \|v(t)\|_{H^s}^2 + \|u(t)\|_{H^s}\|v(t)\|_{H^s}\right)\|u(t) - v(t)\|_{H^s} \\
&\le |\lambda| C^2 T \cdot 3(2\|u_0\|_{H^s})^2 \|u - v\|_{C([-T,T];H^s)}.
\end{aligned}$$

よって，T が

$$|\lambda| C^2 T \cdot 12 \|u_0\|_{H^s}^2 < 1$$

をみたせば，$\Phi[u_0](u)$ は X 上の縮小写像である．

以上から，T を例えば

$$T = \frac{1}{16|\lambda| C^2 \|u_0\|_{H^s}^2}$$

と，とればよいことがわかる． □

3.3 滑らかでない初期値に対する局所解の存在

前節では，$H^{d/2}$ 程度の滑らかさ（微分可能性）を持つ初期値に対して，有限の時間だけ存在する時間局所解を見つけることができた．この存在時間は初期値が大きいほど短くなり，ともすると一瞬で終わってしまうかもしれない．物理現象をシミュレートしたい時にこれでは困るので，できればいつまでたっても解であり続ける **時間大域解** の存在を示したい．

そのための準備として，滑らかさを持たない L^2 の初期値に対する (3) の解の存在を示す．ここでは簡単のため空間次元を $d = 1$ に限定する．Sobolev 積評価式に代わる非線形評価の道具として，次の **Strichartz 評価式** が重要な役割を果たす：

正定数 C が存在し，任意の $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ と任意の $T > 0$ に対して，非斉次線形 Schrödinger 方程式 (1) の解 u は次の評価式をみたす．

$$\max_{-T \le t \le T} \|u(t)\|_{L^2} + \|u\|_{L_T^8 L^4} \le C\Big(\|u_0\|_{L^2} + \|F\|_{L_T^{8/7} L^{4/3}}\Big).$$

ここで，$1 \leq p, q < \infty$ に対し $L^p_T L^q$ ノルムを

$$\|u\|_{L^p_T L^q} := \big\| \|u(t,\cdot)\|_{L^q(\mathbb{R})} \big\|_{L^p(-T,T)} = \Big\{ \int_{-T}^{T} \Big(\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^q \, dx \Big)^{p/q} dt \Big\}^{1/p}$$

で定める．

Strichartz 評価式は，分散型偏微分方程式の解析のメインツールとして研究されてきた長い歴史を持つ．上記のヴァージョンの証明はそれほど難しくはないが，やや面倒なのでここでは省略することにする．これを用いると，次の L^2 初期値に対する局所解の存在定理が証明できる．

定理 4 (L^2 初期値に対する局所解の存在)．任意の $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ に対し，正の実数 $T > 0$ および $[-T,T] \times \mathbb{R}^d$ 上定義された (3) の解 $u \in C([-T,T]; L^2(\mathbb{R})) \cap L^8_T L^4$ が存在する．さらに，T は λ のみに依存するある定数 $c > 0$ に対して

$$T \geq \frac{c}{\|u_0\|_{L^2}^4}$$

をみたすようにとることができる．

（注意）　$L^8_T L^4$ は $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ の関数を $[-T,T] \times \mathbb{R}$ 上に制限したもの全体の，$L^8_T L^4$ ノルムに関する完備化とする．

（証明の方針）　前節の定理 3 と同様であるが，今回は $T > 0$ を十分小さくとって，$\Phi[u_0]$ が

$$X := \big\{ u \in L^8_T L^4 \,\big|\, \|u\|_{L^8_T L^4} \leq 2C\|u_0\|_{L^2} \big\}$$

上の縮小写像となることを示す．上式に現れる定数 C は Strichartz 評価式の右辺に現れるものと同じである．□

3.4　保存則と大域解の存在

本講座における最後の仕事として，L^2 初期値に対する積分方程式 (3) の時間大域解の存在を証明しよう．方針としては，前節で存在を証明した時間局所解に対し，その最後の存在時刻を初期時刻として新しい時間局所解をみつけ，それらをつないでいくことでいくらでも長い時間存在する時間大域解を構成する．ここで問題となるのは，局所解の存在時間 T が初期値に応じて変化することである．局所解をつないでいく間に初期値は変化し続けるから，仮にその存在時間が急速に小さくなっていくとすると，それらを合計してもある有限の時間までしか到達できない可能性がある．そのようなことが起こらないことを示すのが証明の本質的な部分である．

今回考えた非線形 Schrödinger 方程式は，何らかの物理量と関連するいくつかの **保存量** を持つ．その中でも，質量保存あるいは電荷保存に対応する L^2 ノルムの保存則を示そう．

定理 5 (L^2 保存則)．$u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ とし，$u : [-T,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を前節で得られた (3) の局所解とする．このとき，任意の $t \in [-T,T]$ に対して $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ が成り立つ．

（証明）　ここでは u_0 や u が十分滑らかである場合に示す．一般の場合については，初期値 u_0 を $C_c^\infty(\mathbb{R})$ の関数で近似し，対応する近似解が元の解に収束することに注意すればよい．（これをいうためには，適切性の 3 番目の性質である初期値に対する安定性を用いる．）

十分滑らかな解 u に対しては，$\|u(t)\|_{L^2}^2$ は t について C^1 級の関数である．実際に導関数を計算すると，

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\overline{u(t,x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \Big\{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\overline{u(t,x)} + u(t,x)\overline{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)}\Big\}\,dx.$$

実際に素性の良い解に対しては 2 番目の等式のように微分と積分の順序交換が可能である．

右辺に現れた $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ に方程式の左辺を代入すると，部分積分により

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \Big\{\big(i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\lambda|u|^2 u\big)\overline{u} + u\Big(-i\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} - i\lambda|u|^2\overline{u}\Big)\Big\}(t,x)\,dx \\ &= i\int_{\mathbb{R}} \Big\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\overline{u} - u\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\Big\}(t,x)\,dx \\ &= i\Big[\Big\{\frac{\partial u}{\partial x}\overline{u} - u\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}\Big\}(t,\cdot)\Big]_{-\infty}^{\infty} - i\int_{\mathbb{R}} \Big\{\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} - \frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}\Big\}(t,x)\,dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

従って $\|u(t)\|_{L^2}^2$ は定数関数である．　□

このように，非線形方程式 (3) の解 u に対しても，斉次線形方程式と同様，L^2 ノルムが時間によらず一定であることがわかった．最初の方程式で u^3 や $\overline{u}^3$ ではなくゲージ不変性を持つ非線形項 $|u|^2 u$ を考えたのも，定数 λ を実数としたのも，すべてはこの L^2 保存則を成り立たせるためである．（しかしながら，物理的観点からは保存則が成立するようなモデルを扱うのは妥当と考えられる．）

さて，前節の局所解の存在定理によれば，各ステップにおける存在時間は初期値の L^2 ノルムが等しければ共通にとれる．よって，L^2 ノルムが変化しない局所解を一定の時間幅ずつ伸ばしていくことができるので，時間大域解が構成できることになる．かくして，次の定理を得る．

定理 6 (L^2 初期値に対する大域解の存在)**.** 任意の $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ に対し，$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上定義された (3) の解 $u \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}))$ が存在する．

このように保存則によって大域可解性を示せるようにすることは，滑らかでない初期値に対して（弱）解の存在を示す最大のメリットといえる．一般に，初期値の滑らかさが失われれば失われるほど，非線形相互作用の制御が困難になり解の構成がしにくくなる．方程式によっては，保存則と対応する滑らかさで解の存在を示すのに，完備距離空間の設定やその後の非線形評価の段階で相当複雑な技巧が必要となることもあり，数学者の腕の見せ所でもある．