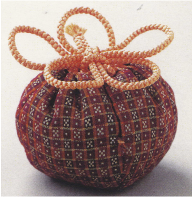
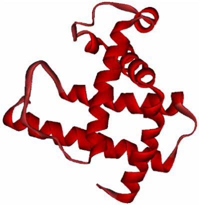
結び目の数学

鈴木咲衣

RIMS 公開講座, 2016 年 8 月 1 日 ～ 4 日



講義の目標

講義の目標

1日目：結び目理論の研究対象と研究方法を理解する.

2日目：ジョーンズ多項式の定義を理解する.

3日目：ジョーンズ多項式を研究する.

4日目：量子トポロジーの最先端の研究を垣間見る.

絡み目不変量を作るレシピ（復習）

絡み目不変量 $f\colon \{\text{絡み目}\}/\sim \quad \to \quad I$

$\updownarrow$ 1:1　　　$\nearrow$ ここを作る

$\{\text{絡み目の図式}\}/\sim_{\text{RI, RII, RIII}}$

レシピ

(i) 絡み目図式に対して値を対応させる.

$$f\colon \{\text{絡み目の図式}\} \to I$$

(ii) ライデマイスター移動での不変性を示す.

絡み目不変量を作るレシピ（復習）

ジョーンズ多項式 $V\colon \{\text{絡み目}\}/\sim \quad \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$

$\updownarrow$ 1:1 $\nearrow$ ここを作る

$\{\text{絡み目の図式}\}/\sim_{\text{RI, RII, RIII}}$

レシピ

(i) 絡み目図式に対して値を対応させる（昨日）.

$$V\colon \{\text{絡み目の図式}\} \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$$

(ii) ライデマイスター移動での不変性を示す（今日）.

ジョーンズ多項式（復習）

(a) カウフマン括弧

$$\langle\ \ \rangle \colon \{\,\text{絡み目の図式}\,\} \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$$

を定義する.

(b) カウフマン括弧を補正する.

$$V_D(t) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle |_{A^2 = t^{-1/2}}$$

ただし D は絡み目の図式で,

$$w(D) = (D\ \text{の正交点の数}) - (D\ \text{の負交点の数}).$$

ジョーンズ多項式（復習）

(a) カウフマン括弧 $\langle\ \ \rangle\colon \mathcal{L} \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ を以下の性質で定義する．

(K1) $\langle$  $\rangle = A\langle$  $\rangle + A^{-1}\langle$  $\rangle$

交点が帰納的に減り，いくつかの円周のみが残る．

(K2) $\langle D \bigcirc \rangle = -(A^2 + A^{-2})\langle D \rangle$

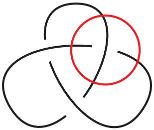
円周が帰納的に減り，一つの円周が残る．

(K3) $\langle \bigcirc \rangle = 1$

最後に残った円周を 1 にすれば $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ の元が得られる．

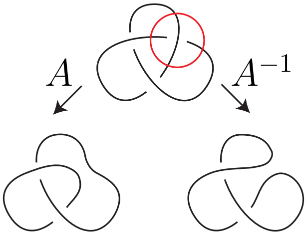
三葉結び目のジョーンズ多項式

(K1)



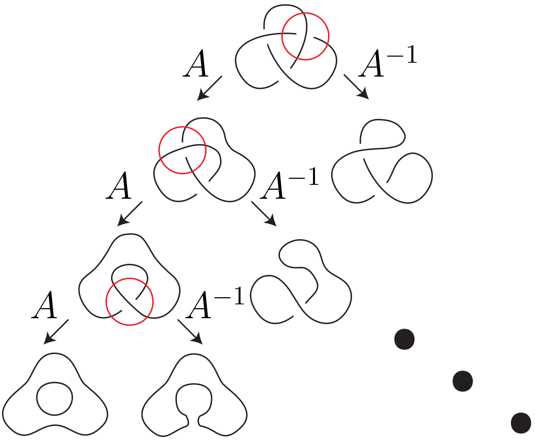
三葉結び目のジョーンズ多項式

(K1)



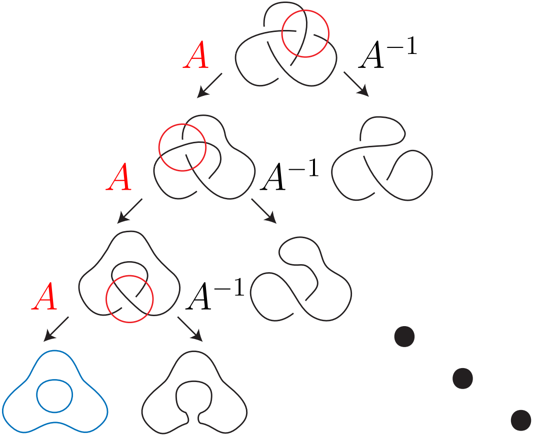
三葉結び目のジョーンズ多項式

(K1)



三葉結び目のジョーンズ多項式

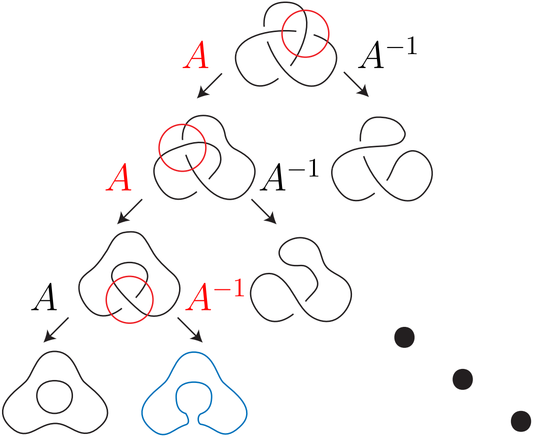
(K2,K3)



$$-(A^2+A^{-2})A^3+1\cdot A+\cdots$$

三葉結び目のジョーンズ多項式

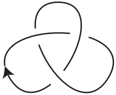
(K2,K3)



$$-(A^2 + A^{-2})A^3 + 1 \cdot A + \cdots$$

三葉結び目のジョーンズ多項式

$A^2 = t^{-1/2}$ と置いて

$V($  $) = (-A^3)^{-3}(-A^5 - A^{-3} + A^{-7})$

$$= (-t^{-3/2})^{-3}(-t^{-5/2} - t^{3/2} + t^{7/2})$$

絡み目不変量を作るレシピ（復習）

ジョーンズ多項式 $V\colon \{\,\text{絡み目}\,\}/\sim \quad \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$

$\Updownarrow$ 1:1　　　$\nearrow$ ここを作る

$\{\,\text{絡み目の図式}\,\}/\sim_{\text{RI, RII, RIII}}$

レシピ

(1) 絡み目図式に対して値を対応させる（昨日）.

$$V\colon \{\,\text{絡み目の図式}\,\} \to \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$$

(2) ライデマイスター移動での不変性を示す（今日）.

三日目の目次

(1) ジョーンズ多項式が不変量であることの確認

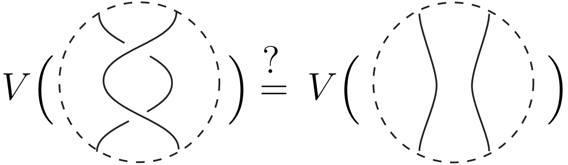
(2) ジョーンズ多項式の性質

(3) 未解決問題

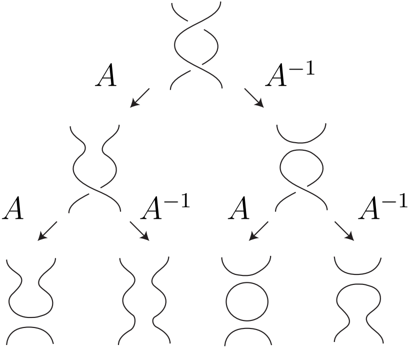
(4) 最先端の研究（量子トポロジー）

(1) ジョーンズ多項式が不変量であることの確認

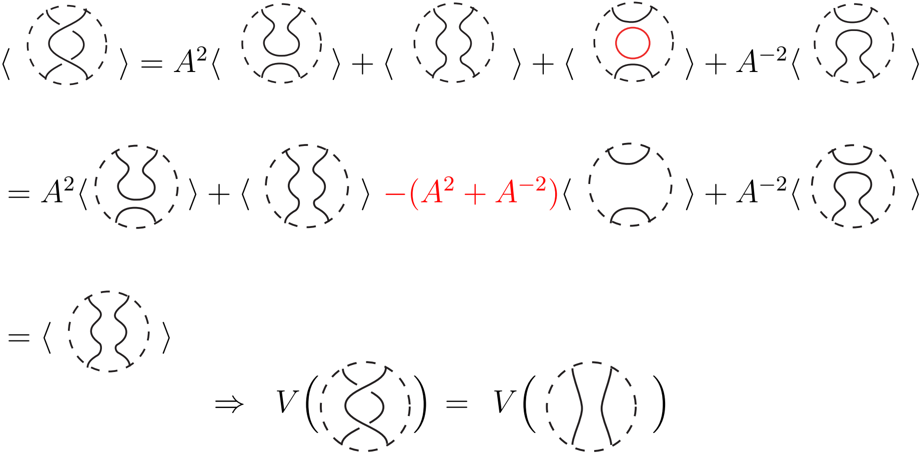
ジョーンズ多項式が RII で不変であることの確認



カウフマン括弧の性質 (K1) より左辺は次のようになる.



すなわち



[RII での不変性の証明終了]

(2) ジョーンズ多項式の性質

(a) スケイン関係式

(b) ジョーンズ多項式と絡み目の幾何学的性質

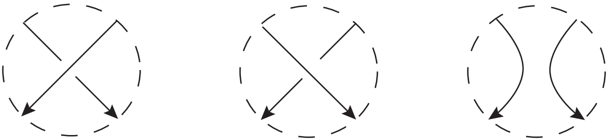
(a) スケイン関係式

スケイン関係式

$A^2 = t^{-1/2}$ と置くと，

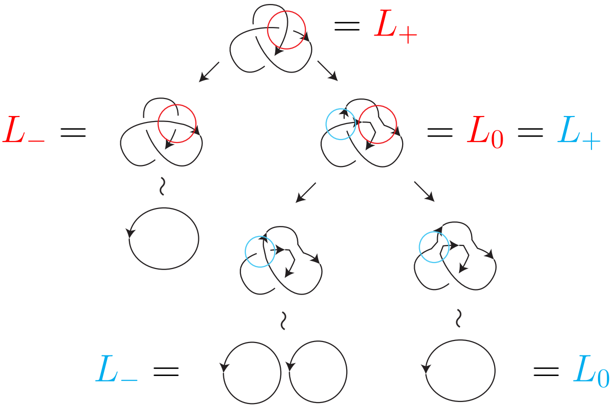
$$\begin{cases} t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{L_0}(t), \\ V_{\mathsf{Unknot}}(t) = 1. \end{cases}$$

ただし L_+, L_-, L_0 は以下の点線で囲まれた部分以外は同じであるような３つの絡み目（図式ではなく３次元的）．



L_+ L_- L_0

スケイン関係式



カウフマン括弧と違って３次元的に計算できる．
$w(L)$ を計算する必要もない．

（証明）カウフマン括弧の性質 (K1) を２回使うと

$\langle$  $\rangle = A\langle$  $\rangle + A^{-1}\langle$  $\rangle$ (1)

$\langle$  $\rangle = A\langle$  $\rangle + A^{-1}\langle$  $\rangle$ (2)

$\{(1) \times \mathrm{A}\} - \{(2) \times \mathrm{A}^{-1}\}$ ：

$A\langle$  $\rangle - A^{-1}\langle$  $\rangle = (A^2 - A^{-2})\langle$  $\rangle$

$w($  $) = w($  $) - 1 = w($  $) + 1$ に注意すると

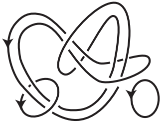
$A^4(-A^3)^{-w(}$  $^{)}\langle$  $\rangle - A^{-4}(-A^3)^{-w(}$  $^{)}\langle$  $\rangle$

$= -(A^2 - A^{-2})(-A^3)^{-w(}$  $^{)}\langle$  $\rangle$

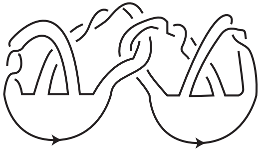
[証明終了]

(b) ジョーンズ多項式と絡み目の幾何学的性質

リボン絡み目と境界絡み目のジョーンズ多項式



リボン絡み目



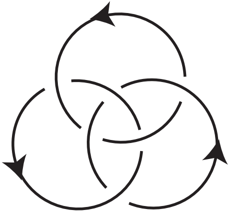
境界絡み目

$L : n$ 成分リボン絡み目 or 境界絡み目

$$\Rightarrow \quad V_L(t) \in (t^{1/2} + t^{-1/2})^{n-1}\mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$$

⇒"リボン絡み目と境界絡み目は自明な絡み目に近い"

ボロミアン絡み目のジョーンズ多項式

$V\Bigg($  $\Bigg)$

$$= -t^3 - t^{-3} + 3t^2 + 3t^{-2} - 2t - 2t^{-1} + 4$$

$\Rightarrow$ ボロミアン絡み目はリボンでも境界でもない.

$\Rightarrow$ リボン絡み目や境界絡み目より自明な絡み目から遠い.

(3) 未解決問題

未解決問題

- ジョーンズ多項式は自明な結び目を判定できるか？
  $V_L(t) = 1 \Rightarrow L = O$?
- ジョーンズ多項式の像となるような $\mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ の部分集合を決定せよ．
  素な結び目の像は？ 連結和との関係は？
- ジョーンズ多項式の 3 次元的な解釈？
  他の幾何学的不変量との関係は？
- ジョーンズ多項式 v.s. 双曲体積（体積予想）
  絡み目の補空間の双曲体積がジョーンズ多項式から得られる？

(4) 最先端の研究（量子トポロジー）

最先端の研究（量子トポロジー）

- ジョーンズ多項式（1984 年〜）
  量子トポロジーの起源
- 色付きジョーンズ多項式（1980 年代後半〜）
  ジョーンズ多項式の R 行列を一般化
- 普遍量子 sl_2 不変量（1980 年代後半〜）
  色付きジョーンズ多項式を 1 つの不変量に統一
- 数理物理の枠組みを用いた理解（1980 年代後半〜）
  チャーン-サイモンズ理論
- ジョーンズ多項式の圏化（1990 年代後半〜）
  オイラー数がジョーンズ多項式となるようなホモロジー不変量

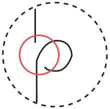
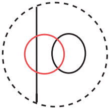
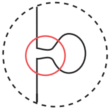
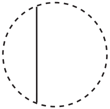
演習問題 3

演習問題3

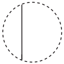
- ジョーンズ多項式が RI, RIII で不変であることを示してみよう
- ある結び目 K のジョーンズ多項式とその鏡像 $\bar{K}$ のジョーンズ多項式にはどんな関係があるだろう.
- ある結び目 K のジョーンズ多項式と向きを逆にした結び目 $\vec{K}$ のジョーンズ多項式にはどんな関係があるだろう.
- ある結び目 K と K' の連結和のジョーンズ多項式を K と K' のジョーンズ多項式を用いて表してみよう.

ジョーンズ多項式の RI での不変性

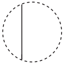
RI の左辺で交点を減らすと

$\langle$  $\rangle = A\langle$  $\rangle + A^{-1}\langle$  $\rangle = -A^3\langle$  $\rangle$

ここで

$w($  $) = -A^3 w($  $)$

より

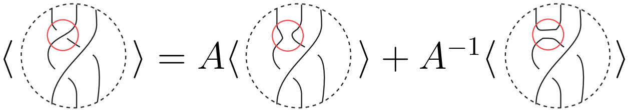
$V($  $) = V($  $)$

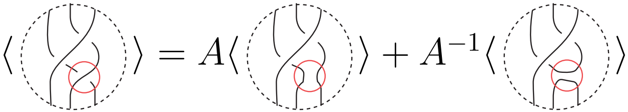
が従う.

[証明終了]

ジョーンズ多項式の RIII での不変性

RIII の両辺の交点を一箇所減らすと





ここで，右辺同士は RII で移りあい，RII でカウフマン括弧は不変なので両者は等しい．

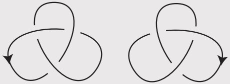
[証明終了]

鏡像のジョーンズ多項式

定理

L: 絡み目,　$\bar{L}$: 絡み目 L の鏡像

$$V_{\bar{L}}(t) = V_L(t^{-1})$$



（証明）絡み目 L の図 D と鏡像 $\bar{L}$ の図 $\bar{D}$ は交点のひもの上下が逆になっているのでカウフマン括弧の性質 (K1) で A と A^{-1} を逆にした関係式が成り立つ.

鏡像のジョーンズ多項式

すなわち

$\langle$  $\rangle = A\langle$  $\rangle + A^{-1}\langle$  $\rangle$　　　(1)

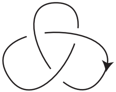
$\langle$  $\rangle = A\langle$  $\rangle + A^{-1}\langle$  $\rangle$　　　(2)

(1), (2) より，$\langle \bar{D} \rangle (A) = \langle D \rangle (A^{-1})$ が従う.
さらに $w(D) = -w(D)$ より $V_{\bar{L}}(t) = V_L(t^{-1})$ も従う.

[証明終了]

三葉結び目とその鏡像のジョーンズ多項式

$V($  $) = (-A^{3})^{-3}(-A^{5} - A^{-3} + A^{-7})$

$V($  $) = (-A^{-3})^{-3}(-A^{-5} - A^{3} + A^{7})$

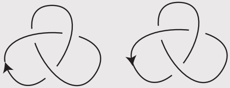
三葉結び目とその鏡像はイソトピックでない！

逆向きの結び目のジョーンズ多項式

定理

L: 絡み目, $\vec{L}$: L の向きを逆にした絡み目

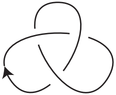
$$V_{\vec{L}}(t) = V_L(t)$$

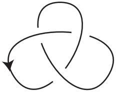


(証明)
カウフマン括弧は向きに依らない. また, $w(L) = w(\vec{L})$ より主張が従う.

[証明終了]

三葉結び目とその逆向きのジョーンズ多項式

$V($  $) = (-A^3)^{-3}(-A^5 - A^{-3} + A^{-7})$

$V($  $) = (-A^3)^{-3}(-A^5 - A^{-3} + A^{-7})$

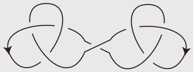
（この場合は２つがイソトピックだから当然.）

結び目の連結和とジョーンズ多項式

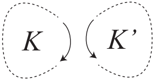
定理

K, K': 結び目,　$K\#K''$: K と K' の連結和

$$V_{K\#K''}(t) = V_K(t) \times V_{K'}(t)$$

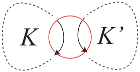


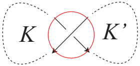
（証明） K と K' を隣においた絡み目を $K + K'$ とおくと,

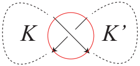
$V($  $) = -(t^{1/2} + t^{-1/2})V(K)V(K')$

結び目の連結和とジョーンズ多項式

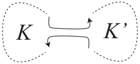
（証明続き）スケイン関係式より

$(t^{1/2}-t^{-1/2})V($ 

$) = t^{-1}V($ 

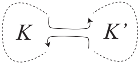
$) - tV($ 

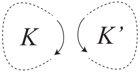
$)$

$= -(t-t^{-1})V($ 

$)$

したがって

$V($ 

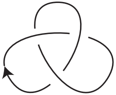
$) = -\dfrac{1}{t^{1/2}+t^{-1/2}}V($ 

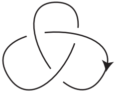
$)$

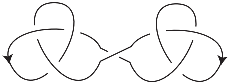
$$= V(K)V(K')$$

[証明終了]

三葉結び目と鏡像の連結和のジョーンズ多項式

$V($  $) = (-A^3)^{-3}(-A^5 - A^{-3} + A^{-7})$

$V($  $) = (-A^{-3})^{-3}(-A^{-5} - A^3 + A^7)$

$V($  $) = (-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) \times (-A^{-5} - A^3 + A^7)$

3日目お疲れさまでした