# 超準解析入門
# －超実数と無限大の数学－

磯野優介*
数学入門公開講座

平成 29 年 7 月 31 日～8 月 3 日

**概要**

「無限に大きい数」は存在しません．どんな数を持ってきても，それに 1 を足せば，より大きな数が出来るからです．同様に「無限に小さい数」も存在しません．このような無限数は，数学的に厳密に定義出来ないにもかかわらず，古くから研究に用いられてきました（いわゆる「無限小解析」）．その後 19 世紀に入り，厳密さを備えた $\varepsilon$-$\delta$ 論法が登場し，無限小解析は歴史から姿を消します.

超準解析とは,「無限に大きい，小さい数」を，数学として厳密に定式化し，取り扱う学問です．この枠組みでは，無限数を用いた計算や証明が可能で，現代数学を用いた無限小解析の再現とも言えます．この講義では，そのような無限数を含む「超実数」を構成し，それを用いて解析学の基礎的な定理を実際に証明してみようと思います.

## 目 次



*京都大学数理解析研究所 特定助教
E-mail: isono@kurims.kyoto-u.ac.jp

# 1　イントロダクション

数学において**無限**（記号で書くと $\infty$）という概念を最初に学ぶのは，高校3年生の数学IIIです．**極限**を意味する lim なる記号が突然あらわれ，$\lim_{n\to\infty} a_n$ は $n$ を大きくしていった時の数列 $(a_n)_n = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ の極限だと言われます．さらには $0.9999\cdots$ のように無限に続く列が表れてこれは1だと言われたり，$\frac{\sin x}{x}$ は $x$ が0に近づけば1になると言われたり... なんだかよく分からないものが始まったと戸惑った人も多いでしょう．私もこれらを初めて学んだ際，一体何がしたいのかと頭をかしげたのをよく覚えています．

ともあれ，もう少し $\lim_{n\to\infty} a_n$ について考察を続けてみましょう．$\lim_{n\to\infty} a_n$ は数列 $(a_n)_n$ の**極限値**と呼ばれ，実数値，$\infty$，$-\infty$ 等になります（値が決まらないという事もあります）．簡単な場合には $\lim_{n\to\infty} n+5 = \infty+5 = \infty$ や $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = \frac{3}{\infty} = 0$ などの形式的な計算も許されますが，この方法では $\infty - \infty$ や $\frac{\infty}{\infty}$ は計算出来ません．例えば $\lim_{n\to\infty}(n^2 - n)$ は，ただちには無限を代入出来ません．しかしこの場合は

$$\lim_{n\to\infty}(n^2 - n) = \lim_{n\to\infty} n^2(1 - \frac{1}{n}) = \infty(1 - \frac{1}{\infty}) = \infty$$

のように計算が出来ます．という事は，$n^2 - n$ は無限に大きくなっており，$\infty - \infty = \infty$ のような形になっているという事です．これは $n^2$ の方が $n$ よりも「強い無限」であるという事で，無限には強弱のようなものがあると分かります．そしてそれらが同程度の強さの時には，$\infty - \infty$ や $\frac{\infty}{\infty}$ がちゃんとした実数になるのだろうと想像がつきます．

さて，上の例では簡単な計算のみで処理出来ましたが，いつもこのように上手くいくとは限りません．そのため，lim をきちんと研究する手法が必要になり，これがいわゆる**解析学**と呼ばれる学問（の基礎）です．

せっかくなので，簡単には計算出来ない有名な例を一つ上げておきましょう．正の実数からなる数列 $(a_n)_n$ が正の実数 $a > 0$ に収束している（つまり $\lim_{n\to\infty} a_n = a$）として，

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n}$$

で定まる数列 $(b_n)_n$ は，果たして何に収束するでしょうか．単に $n = \infty$ とすると $\frac{\infty}{\infty}$ の形になってしまい，簡単には解けない事が分かるでしょう.（答えは命題4.9を見てください.）

### $\varepsilon$-$\delta$ 論法と超準解析

ニュートンとライプニッツが17世紀に微分と積分を考案して以来，極限をどのように扱うべきかは数学の重要な問題でした．ライプニッツは，$\frac{1}{\infty}$ を0ではない数（つまり無限小）として捉えており，このように∞を一つの数とみなす研究方法は**無限小解析**と呼ばれています．無限小解析は，長い間主流の考え方でしたが，数学としてそれを厳密に正当化する事は出来ませんでした．

19世紀前半に，コーシーやワイエルシュトラスの手によって，**$\varepsilon$-$\delta$ 論法**と呼ばれる方法が開発されます．これは収束に関する簡潔な手続きを与えるもので，要するに「∞を手続きに読み替える」論法です．これは極めて厳密に，そして扱いやすい形で極限を取り扱う方法を提供してくれました．この論法の開発以後，解析学はこれを基礎に展開していきます．現代においてもその重要性は変わらず，例えば数学科の大学一年生は必ずこれを学びます（大学生からの評判はすこぶる悪いようですが...）この論法が広まるに伴い，上で見たような $\infty$ を数とみなす考え方は,（少なくとも厳密な数学としては）用いられる事はなくなります．

20 世紀に入り，数学は高度に抽象化して行きます．集合論を基礎におき，さらなる厳密さを獲得し，選択公理を含む新たな公理体系も幅広く認められるようになりました．そしてこれらの技術的発展を元に 1960 年代，アブラハム・ロビンソンは**超準解析**と呼ばれる新しい解析学を確立します．これは実数を拡張した**超実数**と呼ばれるものを用いる研究方法で，超実数の立場から実数の研究を行おうというものです．この超実数は，ライプニッツの無限小解析を念頭に置いており，例えば**無限大超実数**（どんな実数よりも大きな数）や**無限小超実数**（どんな実数よりも小さい数）を含んでいます．

超準解析では，最終的には実数の事を研究したいのだから，単に無限に大きな数を含むというだけでは不十分です．つまり，実数の性質を反映するような超実数が必要となります．超準解析における超実数は，和や積などの四則演算はもちろんの事，関数 $f(x)$ に対して無限を代入したり，無限の間の大小関係を調べたりする事が出来ます．例えば $\infty$，$\infty'$ というような二つの無限大超実数に対して，普通の実数のように $\infty < \infty'$ や $\frac{1}{\infty}$ を考えたり，関数 $f(x)$ に対して $f(\infty)$ を考えたりする事が出来ます．超準解析における超実数は実数を研究するのに十分なもので，まさにこれは**現代数学を用いた無限小解析の再現**と言えるでしょう．

### 超準解析とモデル理論

**モデル理論**とは，数学で扱う構造そのものを研究する理論です．ロビンソンは超実数を構成した後，モデル理論の枠組みで超実数を捉え直し，超準解析を進めていきました．特に，実数で成立する性質が全て超実数でも成立する，という事実がモデル理論を用いて厳密に証明出来ます．しかしモデル理論は初学者には分かりづらい理論ですし，我々の講義時間も限られていますので，**この講義ではモデル理論には一切触れません**．

### この講義の目標

この講義の目標は，超準解析の基礎を（可能な限り厳密に）学ぶ事です．講義の流れは以下の通りです．まずは実数の構成を復習し，それを土台に超実数の構成方法について学びます．その後，超実数を用いて解析学の基礎的な定理のいくつかを証明し，残された時間でやや先進的な話題に触れます．実数の構成を復習するのは，それが超実数の構成方法に深く関わっているからです．

## 1.1 記号の復習

この講義に必要な用語と記号を復習します．**集合**とは「ものの集まり」を意味しています．例えば自然数全体の集合は $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ のように表します．集合の中に入っているものを**元（げん）**または**要素**といい，例えば「3 は $\mathbb{N}$ の元である」のように使います．**数列**とは，$(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ のように数字が並んでいるもので，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ または $(a_n)_n$ で表します．新しいものを定義する際に，等号の代わりに := を使う事があります．もし $A := B$ と書いたら，$B$ はすでに知っているもので，今後は $A$ という新しい名前を $B$ に対して使うという意味です．また，分数 $\frac{a}{b}$ は文中では $a/b$ のように書きます．下に，集合論の用語をまとめておきます．

- もし $x \in X$ と書いたら，集合 $X$ から $x$ という元を取る，という意味である．
- **空集合**とは元を持たない集合の事で，$\emptyset$ と書く．どんな集合 $X$ に対しても $\emptyset \subset X$ と約束する．(空集合は，便利だから導入しているだけなので，深く考えない事.)

- 集合 $X, Y$ に対して，**$X$ と $Y$ の和集合**とは $X$ と $Y$ の元が全て集まった集合で，これを $X \cup Y$ と書く．**$X$ と $Y$ の共通部分**とは $X$ と $Y$ の両方に入っている元が全て集まった集合で，これを $X \cap Y$ と書く．共通の元がない時は $X \cap Y = \emptyset$ とする．

- 集合 $X, Y$ に対して，**$Y$ が $X$ の部分集合**とは $Y$ の元が全て $X$ に入っているという事で，$Y \subset X$ と書く（$Y = X$ でもよい）．この時 $Y$ の**補集合**とは，$X$ の元であり $Y$ の元でないような元の集合の事で，$Y^c$ と書く．いつでも $X = Y \cup Y^c$，$X^c = \emptyset$ である．

- 集合を新しく考えたい時は $\{x \mid x$ についての条件 $\}$ のように書く．例えば

  $$\{n \mid n \text{ は正の偶数}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ は偶数}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2m \text{ と書ける } m \in \mathbb{N} \text{ がある}\}$$

  はいずれも正の偶数全体の集合である.（条件の書き方は，相手に伝われば何でもよい.）

- 自然数の集合は $\mathbb{N}$，整数の集合は $\mathbb{Z}$，有理数の集合は $\mathbb{Q}$，実数の集合は $\mathbb{R}$ で表す.

# 2　実数 $\mathbb{R}$ の構成

この章では，実数の構成方法について復習します．これはイントロダクションで述べたように，超実数を構成する際の参考になるからです.

## 2.1　$\varepsilon$-$\delta$ 論法による収束の定義

この節では $\varepsilon$-$\delta$ 論法について簡単に説明しておきます．この講義では，必ずしも必要なものではないため，必要最小限の情報に留めます.

まず最初に，実数 $a$ を一つ取り，これに対して考察します．この $a$ が $0$ であるという条件は次の条件と同じです.

- どんな正の数 $\varepsilon > 0$ に対しても，$|a| < \varepsilon$ が成立する.

実際，$a = 0$ なら明らかにこの条件は成立するし，もし $a \neq 0$ ならばこの条件は満たしません（$\varepsilon = |a|/2$ とすれば $|a| \geq \varepsilon$ となるからです）．この言い換えを用いる事で，**0 という数字を使わずに $a = 0$ を表せます**．つまり，$a = 0$ という条件を，ある種の手続きに言い換えた事になります.

以上の考えを，数列に対して適用してみます．まず実数からなる数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考えましょう．この数列が $0$ に収束する，という条件を考えます．つまり，番号 $n$ をどんどん大きくしていくと，$a_n$ がどんどん $0$ に近づいていくという事です．本当に $0$ になるわけではないので，$a_n = 0$ のような条件は使えません．そこで，上で見た $a = 0$ の言い換えを参考に，次のように考えましょう.

- どんな正の数 $\varepsilon > 0$ に対しても，ある番号 $N \in \mathbb{N}$ が存在して，この $N$ より大きい全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| < \varepsilon$ が成立する.

数列の番号についての条件が入るので，ちょっと見た目が複雑になりますが，さほど難しい条件ではないと思います．つまり，上で見た「どんな正の数 $\varepsilon > 0$ よりも小さい」という条件を,「ある番号 $N$ から先ではずっと満たす」という条件と合わせて考えているという事です.（注．$\varepsilon$ を一つ決めるごとに，何か一つ $N$ があるという条件なので，$\varepsilon$ を変えると $N$ も変わ

ります．このあたりがやや分かりづらい所です.）これが満たされている時，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ と書くことにしましょう．

より一般に数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がある実数 $a$ に収束する，と言いたい時は，単に数列 $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ が $0$ に収束する条件を使えば大丈夫です．この時は $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と書きます．以上見てきた事をもとに，定義をまとめておきましょう．

**定義 2.1.** 実数からなる数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が，**実数 $a$ に収束する**とは次を満たす時に言う．どんな正の数 $\varepsilon > 0$ に対しても，ある番号 $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$|a_n - a| < \varepsilon$ が全ての $n > N$ に対して成立する．これが成り立つ時，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と書く．

**演習 2.2.**

1. 定義に基づいて $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ を示せ．
2. $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ は定まらない，つまりどのような数にも収束しない事を示せ．(収束先の実数があると仮定して矛盾すればよい.)

**演習 2.3.** 数列 $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ と実数 $a, b \in \mathbb{R}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ を満たしているとする．この時定義に基づいて次を示せ．

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab.$$

**演習 2.4.** 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が**無限に発散する**，つまり $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ の定義は次のものである．($\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ の定義は各自考えよ.)

- どんな正の数 $r > 0$ に対しても，ある番号 $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$a_n \geq r$ が全ての $n > N$ に対して成立する．

もし全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > 0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ と $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$ は同じ条件である事を示せ．

### 2.2 コーシー列を用いた実数 $\mathbb{R}$ の構成

この節では，有理数 $\mathbb{Q}$ を用いて実数 $\mathbb{R}$ を作ります．構成の方法は一つではありませんが，ここでは最もよく知られた方法の一つである，**コーシー列を使う方法**について解説します．特にこの方法は，後で超実数を作る際の参考になるため，やや詳しく解説します．

まず最初に,「用いて作る」という言葉の意味が曖昧なので，きちんと説明しましょう．一般に数学では，研究対象となるものを，集合論を用いて構成する必要があります．しかし集合論の基礎を学ぶ段階で，自然数 $\mathbb{N}$ だけは集合として最初に構成するため，それ以外のものを構成する事になります．具体的には，自然数から整数 $\mathbb{Z}$ を作り，そこから有理数 $\mathbb{Q}$ を作り，そこから実数 $\mathbb{R}$ を作ります．ここで $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ を作るのは非常に簡単で，$\mathbb{R}$ を作るのは大変です．この節では，この大変な部分，有理数 $\mathbb{Q}$ という集合を用いて実数 $\mathbb{R}$ の集合を構成する，という部分に着目するという事です．以上を踏まえて，本文に入ります．

まずは，実数の小数点展開について考察しましょう．普通，実数の直感的な理解は，小数点以下を展開する事で得られます．例えば，$1/2 = 0.5000\cdots$，$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$，$\pi = 3.1415\cdots$ のように考えます．我々は後で，有理数についてのみ知っていると仮定するので，有理数を小数点展開して現れるものは知っている事になります．だから例えば，$\sqrt{2} = 1.414213\cdots$ の事は分からないとしても，

$$1.000000\cdots, \quad 1.400000\cdots, \quad 1.410000\cdots, \quad 1.414000\cdots, \quad 1.414200\cdots$$

などのように,「小数点展開の途中から全て 0 にしたもの」については（これらは有理数なので）理解出来るわけです．今，このようにして得られた有理数を順番に $a_1, a_2, a_3, \ldots$ と書く事にしましょう．(つまり，$a_n$ は $\sqrt{2}$ を小数点展開して，小数点第 $n$ 位以下を全て 0 にしたものです.）すると

$$\left|\sqrt{2}-a_1\right| = 0.414213\cdots, \quad \left|\sqrt{2}-a_2\right| = 0.014213\cdots, \quad \left|\sqrt{2}-a_3\right| = 0.004213\cdots$$

のようになり，$a_3$ のところを $a_n$ として $n$ を大きくすれば，この値はどんどん小さくなります．具体的には $\left|\sqrt{2}-a_n\right| < 1/10^{n-1}$ と書けて，特に $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ が成立していると分かります．これは，$\sqrt{2}$ という数を $a_n$ という有理数で近似しているという事です．ここで，$\sqrt{2}$ を任意の実数 $a$ に変えても同じ事が言えるので（$a$ は小数点展開出来るからです），次が分かった事になります.

- どんな実数 $a$ に対しても，ある有理数からなる数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ となる.

さて，この考え方を用いて実数の構成を行います．具体的には，有理数の集まりから，逆に「小数点展開出来る数」を全て復元しようというのがアイデアです．要するに,「有理数からなる数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ であって，$\lim_{n\to\infty} a_n$ と書いても大丈夫なもの」を上手く定義する事で，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が一つの実数を表すと理解しよう，というものです．そしてそのような有理数の列を決めるために，コーシー列という概念を使います.

**定義 2.5.** 有理数からなる数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が**コーシー列**であるとは，どんな正の有理数 $\varepsilon > 0$ に対しても，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して次の条件を満たす事である：$N$ より大きな二つの自然数 $n, m$ は必ず $|a_n - a_m| < \varepsilon$ を満たす.

**注意 2.6.** ここでは有理数から実数を作る事に焦点を置いているから，この定義では一切実数を使っていない．普通は，コーシー列は実数からなる数列に対して定義される．その場合はすでに実数を知っているのだから，正の数 $\varepsilon > 0$ は実数として選ぶのが普通である．この場合,「どんな正の有理数 $\varepsilon > 0$ に対しても」と「どんな正の実数 $\varepsilon > 0$ に対しても」は同じ条件を定めているから，あまり深く考える必要はない.

実は，実数からなる数列に対して，**コーシー列と収束列は同じ**です．詳しく言うと，実数からなる数列 $(a_n)_n$ がある数 $a \in \mathbb{R}$ に収束すればそれはコーシー列だし，逆に $(a_n)_n$ がコーシー列ならば収束先の実数 $a \in \mathbb{R}$ が存在します.（前者の証明は簡単ですが，後者の証明は難しく，これは**実数の完備性**と呼ばれる性質です．この講義では深入りしません.）これらは同じ条件ですが，**コーシー列は収束先の元 $a$ に一切言及していない**事に注意しましょう.

さて，上で見たように実数 $a$ を有理数からなる数列 $(a_n)_n$ で近似して $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とします．数列 $(a_n)_n$ は収束列だから勝手にコーシー列になります．そして $(a_n)_n$ を「有理数からなるコーシー列」として扱えば，収束先の実数 $a$ については言及しなくてよいので，有理数の世界で全てを説明できるという事になります.

この考察により，**有理数からなるコーシー列が一つの数を表す**という考え方が有効であるように思えます．しかし，異なる数列が同じ数を表す事があるため，その分を同一視するという操作がさらに必要となります.

例えば，上で $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ を考えましたが，ここで $b_n := a_{2n}$ なる新しい有理数の数列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考えてみましょう．$b_n$ は $\sqrt{2}$ の小数点展開の $2n$ 以下を全部 0 に変えたものなので，やはり $\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}$ です．一方で $(a_n)_n$ と $(b_n)_n$ は異なる数列だから，異なる数

列が同じ数を表しています．しかしこの時，$(a_n - b_n)_n$ という「差を表す数列」を見ると，これは0に収束する数列です．より一般に，実数 $a$ に対して $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ となっていれば，必ず $(a_n - b_n)_n$ は0に収束します．つまり，同じ数を表す数列のずれは，必ずコーシー列で表される事になります．よって，**差が0に収束する時は同一視する**という考え方を用いる事にしましょう．

**演習 2.7.** 数列 $(a_n)_n$ と $a \in \mathbb{R}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ である時，この数列 $(a_n)_n$ は必ずコーシー列になる事を示せ．

**演習 2.8.** $0.9999\cdots$ とは，小数点展開するとずっと9が並んでいる実数という意味である．これを，有理数からなる数列 $(a_n)_n$ の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ で表せ．それを用いて $1 = 0.9999\cdots$ を証明せよ．

## 実数の構成

以上を踏まえて，いよいよ有理数から実数を構成します．まず有理数の集合 $\mathbb{Q}$ と，その四則演算や絶対値等の事は知っているとします．すると有理数だけからなる数列 $(a_n)_n$ に対して，コーシー列が定義出来ます．次の集合を考えましょう．

$$\widetilde{\mathbb{R}} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ は有理数からなるコーシー列 }\}.$$

次に「差が0に収束するものを同一視」してそれを $\mathbb{R}$ と書く事にしましょう．つまり $(a_n)_n, (b_n)_n \in \widetilde{\mathbb{R}}$ に対して，これを $\mathbb{R}$ の元と思い，さらに $(a_n - b_n)_n$ が0に収束する時には $(a_n)_n = (b_n)_n$ と思うという事です．ここで $\widetilde{\mathbb{R}}$ や $\mathbb{R}$ は，$\mathbb{Q}$ を用いてちゃんと集合として構成出来る事に注意しておきます（集合論の一般論なので，ここでは触れません）．

さて，このようにして作った $\mathbb{R}$ を，以下のようにして我々の知っている実数と対応付けられます．まず，有理数 $r$ は数列 $(r, r, r, r, r, \dots) \in \mathbb{R}$ と同一視する事が出来ます．つまり $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ とみなせます．上で見たように，「小数点展開で得られる数 $a$」は必ず有理数のコーシー列 $(a_n)_n$ で $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と書けるのだったから，この数列 $(a_n)_n$ が $\mathbb{R}$ の元として元の数 $a$ を表していると理解します．そうする事で，「小数点展開で得られる数」は全て $\mathbb{R}$ の元として実現されました．最後に，四則演算を数列の成分で定義します．つまり有理数からなる数列 $(a_n)_n, (b_n)_n$ に対して

$$(a_n)_n + (b_n)_n := (a_n + b_n)_n, \quad (a_n)_n - (b_n)_n := (a_n - b_n)_n,$$
$$(a_n)_n(b_n)_n := (a_n b_n)_n, \quad \frac{(a_n)_n}{(b_n)_n} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$$

とする事で，$\mathbb{R}$ 上で四則演算が定義出来ます．(ただし割り算は $(b_n)_n \neq 0$ としないといけません.）これらが上手く定まるためには，まずコーシ―列の和や積が再びコーシー列である事を示さないといけません．さらに，二つのコーシー列 $(a_n)_n$ と $(a'_n)_n$ が同一視されている時，他のコーシー列 $(b_n)_n$ に対して，$(a_n + b_n)_n$ と $(a'_n + b_n)_n$ が同一視される事も示さないといけません．これは，和が数列の選び方によらず定まっている事を意味します．同様に差，積，商に対しても確認が必要です．

これらの演算は，有理数に対する演算のみを用いて定義されていて，$\mathbb{R}$ の中の部分集合 $\mathbb{Q}$ についても，本来のものと同じ演算になっています．他にも例えば，$0 \le (a_n)_n$ は $(a_n)_n = (b_n)_n$ かつ $0 \le b_n$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ で成り立つような数列 $(b_n)_n$ が存在する事，と定義すればいいし，絶対値は $|(a_n)_n| := (|a_n|_n)$ で定義出来ます，

記号が煩雑なので，$\mathbb{R}$ の元は $\alpha, \beta$ とも書く事にしましょう．我々は四則演算と $|\alpha|$，$0 \leq \alpha$ を定めたので，$\alpha \leq \beta$，$\alpha < \beta$，$\alpha \geq \beta$，$\alpha > \beta$ 等も同様に定めましょう．

以上によって，有理数 $\mathbb{Q}$ から実数 $\mathbb{R}$ を作る事が出来ました．今回の構成では，実数を有理数の数列として理解していますが，**頭の中で考える際には必ずしも数列だと思う必要はありません**．大事なのは，我々が実数だと考えている対象と同じものが，数学的対象として（つまり集合として）実現出来ているという点です．また実際に研究を行う際は，実数を特徴づける性質を抜き出しておいて，それのみを用いて証明を行う事が多いです．

**演習 2.9.** $\mathbb{R}$ 上の演算が上手く定まっている事を，以下を示す事で確認せよ．

1. 有理数からなるコーシー列 $(a_n)_n, (b_n)_n$ に対して，$(a_n+b_n)_n$ と $(a_nb_n)_n$ はいずれもコーシー列である．さらに，コーシー列 $(a'_n)_n$ と $(b'_n)_n$ が $(a_n)_n = (a'_n)_n$ かつ $(b_n)_n = (b'_n)_n$ を満たしていれば，$(a_n + b_n)_n = (a'_n + b'_n)_n$ かつ $(a_nb_n)_n = (a'_nb'_n)_n$ が成り立つ．以上より，$\mathbb{R}$ 上の和と積が定まる．

2. 有理数からなるコーシー列 $(a_n)_n$，$(b_n)_n$ に対して，$(a_n - b_n)_n$ がコーシー列ならば $(|a_n| - |b_n|)_n$ もコーシー列である．特に $\mathbb{R}$ 上の絶対値が定まる．

3. 全ての $\mathbb{R}$ の元 $\alpha$ に対して $\alpha \leq |\alpha|$，$0 \leq |\alpha|$ が成り立つ．

4. （ちょっと難しい）全ての $\mathbb{R}$ の元 $\alpha, \beta$ に対して $\alpha \leq \beta$ か $\alpha \geq \beta$ のどちらかが成り立つ．さらに，両方が同時に成り立つのは $\alpha = \beta$ の時のみである．

5. $\mathbb{R}$ の元 $\alpha$ が $0 < \alpha$ ならば，ある有理数 $\delta > 0$ が存在して $\delta \leq \alpha$ となる．

6. $\mathbb{R}$ の元 $\alpha$ が $0 \neq \alpha$ ならば，数列 $(a_n)_n$ を $\alpha = (a_n)_n$ かつ $(1/a_n)_n$ がコーシー列であるように取れる．特にこの $(a_n)_n$ を用いて $1/\alpha$ が $\mathbb{R}$ の元として定まり，$\mathbb{R}$ 上の商が定義出来る．

**演習 2.10.** （難しい）上のようにして作られた実数に対して，四則演算や絶対値が定まったので，コーシー列という概念を考える事が出来る．この時，コーシー列が収束列になる事を示せ．これは上で述べた，実数の完備性の事である．

**演習 2.11.** （難しい）上の実数の構成では,「小数点展開で得られる数」を全て含むように構成した．逆に上のように作られた実数 $\alpha = (a_n)_n$ が，小数点展開の形で書けるかどうかを考察せよ．(つまり，$(a_n)_n = (b_n)_n$ なる $(b_n)_n$ を上手く探してきて，各 $b_n$ を $\sqrt{2}$ を小数点展開した時のように取れるのかという事.)

## 3 超実数 ${}^*\mathbb{R}$ の構成

イントロダクションで説明したように，超実数とは，実数に無限大や無限小を仲間に入れたもので，しかも実数の性質を保つものです．この章では，超積という方法を用いて超実数を構成します．最初に基本的な考え方とその問題点について概観した後，フィルターと呼ばれる対象を学び，それを用いて超実数を実際に構成します．

## 3.1 基本的な考え方と問題点

基本的な考え方は，有理数 $\mathbb{Q}$ から実数 $\mathbb{R}$ を構成する方法と同じです．実数の構成の際は，有理数のなす数列を使いました．今回も同様に，まずは実数のなす数列について考えましょう．つまり今回の我々の対象は $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$（各 $a_n$ は実数）となります．

無限に小さい数や大きい数を仲間に入れたいので，今回の数列にはコーシー列という条件を入れる事が出来ません．コーシー列はいつも収束すると言ったので，数列は収束先にどんどん近づいていき，無限に大きい数を表す事が出来ないからです．具体的には，コーシー列 $(a_n)_n$ を取ってくると，収束先 $a \in \mathbb{R}$ が $\lim_n a_n = a$ となるように存在するので，$a_n$ の大きさはどんどん $a$ に近づいていきます．これでは，$a_n = n$ のようにどんどん大きくなっていくものは，仲間に入れる事が出来ません．また，無限に大きい数が作れないという事は，($(1/a_n)_n$ を考える事で）無限に小さい数も作れないという事です．

このような事情から，**コーシー列という条件は忘れて全ての数列を考えます**．これなら，$a_n = n$ のような数列も仲間に入るので，これを一つの数のように見なすことで超実数を作りたいわけです．当然この場合も，有理数から実数を作った時のように，同一視するという操作が必要になります．つまり，二つの数列

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots), \quad (b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots)$$

が同じかどうかは，これらの差である

$$(a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, a_4 - b_4, \ldots)$$

が 0 かどうかで決まるようにしたいわけです．実数を作った時は，これが 0 に収束するコーシー列の時に 0 とみなしました．では，今回はどのように同一視を行えばよいでしょうか．実はここに，大きな技術的問題があります．

### 何が問題か？

次の二つの数列を考えましょう．

$$\alpha = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots), \quad \beta = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots).$$

これらはたくさん 1 が並んでいるので，0 ではないように思えます．四則演算を，前回のように数列の成分で定義したとすれば，

$$\alpha + \beta = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots), \quad \alpha\beta = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$

となります．これらはさすがに 1 と 0 であるべきだから，我々は $\alpha + \beta = 1$ かつ $\alpha\beta = 0$ を得ます．我々の目標とする超実数は，実数と同じ性質を満たすべきだと言ったので，この場合は実数と同じように，「$\alpha = 1$ かつ $\beta = 0$」か「$\alpha = 0$ かつ $\beta = 1$」のどちらかでなければいけません．という事は，$\alpha$ か $\beta$ のどちらか一つが必ず 0 になり，もう一つは必ず 1 になります．ではどちらが適切な答えでしょうか．数列 $\alpha$ と $\beta$ を眺めてみても，どちらが 0 でどちらが 1 になるべきか，適切な答えはないように思えます．この点を解決しない限り，超実数は上手く定義出来ません．

この問題を以下にまとめておきましょう．この答えは，この章の最後に明らかになります．(演習 3.16 の下を見て下さい.)

**問題 3.1.** 次の二つの数列

$$\alpha = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots), \quad \beta = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$$

は超実数として，どちらが 0 でどちらが 1 になるべきか？

さて，より一般に数列 $\gamma = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ に対して，これがいつ 0 になるべきでしょうか．直感的には「多くの $a_n$ に対して $a_n = 0$」である時に 0 であると思いたいので，**どのような $\mathbb{N}$ の部分集合が大きいのかという事を決める**必要が出てきます．上の例で言えば，$\alpha$ は全ての偶数で 0 になっており，$\beta$ は全ての奇数で 0 ですから,「$\mathbb{N}$ の偶数（または奇数）からなる部分集合が大きいかどうか」を決めなければいけません．

どのような部分集合が大きいと言えるか，という問題を解決するために，超準解析ではフィルターと呼ばれる概念を使います．次節ではこれについて説明します．

## 3.2　フィルターと超フィルター

この節では，自然数 $\mathbb{N}$ の部分集合の集まりについて考えます．つまり**部分集合の集合**という事で，例えば $X = \{1, 2\}$，奇数全体の集合を $Y$，7 の倍数の集合を $Z$ としたときに

$$\mathcal{F} = \{X, Y, Z, \ldots\}$$

は部分集合の集合です．ちょっとややこしいですね．実際には，とてもたくさんの部分集合が集まったものを考えます．

まずはフィルターという言葉を定義しましょう．

**定義 3.2.** $\mathcal{F}$ を自然数 $\mathbb{N}$ の部分集合の集まりとする．$\mathcal{F}$ が**フィルター**であるとは次の条件を満たす事である．

1. $\mathcal{F}$ は空集合でない．
2. $A, B \in \mathcal{F}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{F}$ である．
3. $A \in \mathcal{F}$ かつ $A \subset B \subset \mathbb{N}$ ならば $B \in \mathcal{F}$ である．
4. $\mathcal{F}$ は空集合を含まない．

**注意 3.3.** 条件 1 は，空集合なら考える意味がないので当然の条件である．条件 2 は共通部分を，条件 3 はより大きな部分集合を考えても，やはり $\mathcal{F}$ に入っているという事だ．条件 4 は，もし空集合を含めば,（条件 3 を用いると）全ての $\mathbb{N}$ の部分集合を含むようになり，考える意味がなくなるからやはり当然の条件である．つまり，フィルターとして本質的な条件は 2 と 3 だけである．

これだけではあまりにも抽象的なので，例を二つ紹介します．特に二つ目の例が重要です．

**例 3.4.** 自然数 $3 \in \mathbb{N}$ を含む $\mathbb{N}$ の部分集合を全て集めて $\mathcal{F}$ とすると，これはフィルターになる．より一般に，一つの自然数 $n \in \mathbb{N}$ をとり，それを含む部分集合の全体を考えるとこれはフィルターになる．

**例 3.5.** 自然数の**有限部分集合**とは，有限個の自然数の集まりの事である．自然数の有限部分集合の補集合の集まりを $\mathcal{F}$ とすると，これはフィルターである．式で書くと

$$\mathcal{F} = \{X^c \mid X \subset \mathbb{N} \text{ は有限集合 }\}$$

となる．これを**フレッシェ・フィルター**という．

**演習 3.6.** 上の二つの例が，実際にフィルターである事を確認せよ.（ヒント:部分集合 $A, B \subset \mathbb{N}$ に対して $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ である．もし $A \subset B$ ならば $B^c \subset A^c$ である．また，定義より $A^{cc} = A$ がいつでも成立する.）

我々の目的は，どのような $\mathbb{N}$ の部分集合を「大きい部分集合」とみなすか，というルールを決める事でした．そのために，このフィルターという概念を使います．つまり，特別なフィルター $\mathcal{F}$ を一つ用意して「$\mathcal{F}$ の元であるような $\mathbb{N}$ の部分集合」を大きい部分集合という事にしたいわけです．しかし後に超実数を定義するためには，どんなフィルターでもよいわけではなく，特別な条件を満たすフィルターを選ぶ必要があります．そこで，超フィルターと呼ばれる特別なフィルターを定義します．

**定義 3.7.** $\mathcal{F}$ を自然数 $\mathbb{N}$ の部分集合の集まりとし，フィルターの条件を満たしているとする．この $\mathcal{F}$ が**超フィルター**であるとは次の条件を満たす事である．

- もし他のフィルター $\mathcal{F}'$ が $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ を満たすならば，$\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ である．つまり $\mathcal{F}$ より大きいフィルターは存在しない．

要するに超フィルターとはとても大きいフィルターという事です．しかし定義は出来るものの，このようなものが本当に存在するのでしょうか．実は**超フィルターが存在する事は決して明らかではなく**，だからこそ超実数の構成は簡単ではないのです．この存在を証明するには，現代数学の基礎である**選択公理**と呼ばれるものが必要になりますが，これについてはあまり踏み込まない事にします．興味のある方は，最後の参考文献を見て下さい．選択公理を認めれば証明自体は難しくありませんが，ここでは概略のみに留めましょう．

**定理 3.8.** どんなフィルター $\mathcal{F}$ に対しても，それを含む超フィルターが存在する．つまり $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{F}}$ であるように超フィルター $\widetilde{\mathcal{F}}$ が存在する．

**証明の概略**. フィルター $\mathcal{F}$ に対して，それより大きなフィルターが一つもなければそれは超フィルターであり，証明する事は何もない．なのでそれより大きなフィルターが存在すると仮定してよくて，それを $\mathcal{F}_1$ と書く．次に $\mathcal{F}_1$ についても同じ議論をすれば，より大きな $\mathcal{F}_2$ が取れて，どんどん大きなフィルターの列が取れる事になる．以下のようになっている．

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots .$$

そこで新しい集合を $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$（全ての $\mathcal{F}_n$ を合わせた大きな集合の事）と定めると，これも $\mathbb{N}$ の部分集合の集合であり，しかもこれ自身がフィルターの条件を満たしている事が分かる．よって再びこれまでと同じ手続きが出来る事になり，再びフィルターの列が取れて，それらを合わせた集合がフィルターになって，と繰り返される．

さて，この手続きがどこかで止まるだろうか．もし止まれば，目的の超フィルターが出来るが，止まるかどうかは全く明らかではない．しかしこれが実際にはどこかで止まる，という事が選択公理によって証明出来る.（実際には選択公理と同値の，ツォルンの補題と呼ばれるものによって証明出来る.）よって，目的の超フィルターは存在する． □

この定理を用いて，例 3.5 のフレッシェ・フィルターを含む形の超フィルターが構成出来ます．これが超実数を作るうえで最も重要なステップです．この時，構成された超フィルターがどのような形かは分からないし，そのような超フィルターは一つではない（つまりフレッシェ・フィルターを含む超フィルターがたくさんある）という点には注意しておきます．

では，この節の最後に，超フィルターの重要な特徴づけを見ておきましょう．特に二つ目の条件が最も重要で，これによって部分集合が大きいか小さいかを判定する事になります．

**命題 3.9.** フィルター $\mathcal{F}$ に対して，次の *4* つの条件は同値である．

*1.* $\mathcal{F}$ は超フィルターである．

*2.* どんな部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ に対しても，$A \in \mathcal{F}$ か $A^c \in \mathcal{F}$ のどちらか一つが必ず成立する．(この時両方が成立する事はない.)

*3.* 部分集合 $A, B \subset \mathbb{N}$ が $A \cup B \in \mathcal{F}$ ならば，$A \in \mathcal{F}$ か $B \in \mathcal{F}$ のどちらかが成立する．(この時は両方成立してもよい.)

*4.* 部分集合 $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{N}$ が $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$ ならば，ある $i$ に対して $A_i \in \mathcal{F}$ である．

**証明.** 1. $\Rightarrow$ 2. ここだけやや証明が面倒なので，概略のみとする．対偶を示すため，条件 2 が成り立たないとして，$\mathcal{F}$ が超フィルターでない事を示す．条件 2 が成り立たないので，$A \notin \mathcal{F}$ かつ $A^c \notin \mathcal{F}$ なる $A \subset \mathbb{N}$ がある．実はこういう条件を満たせば，$\mathcal{F}$ と $A$ を含むフィルター $\mathcal{F}_1$ が作れる．(これは難しくはないが，確認が面倒なのでここでは省略する.）よって $\mathcal{F}$ は超フィルターではない．最後に書いてある，$A \in \mathcal{F}$ と $A^c \in \mathcal{F}$ が同時に成立しない事は，フィルターの条件から $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{F}$ となって矛盾する事から分かる．

2. $\Rightarrow$ 1. 対偶を示す．$\mathcal{F}$ が超フィルターでないと仮定して条件 2 が成立しない事を示せばよい．まず $\mathcal{F}$ が超フィルターでないから，$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ かつ $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_1$ なるフィルター $\mathcal{F}_1$ がある．この時 $A \in \mathcal{F}_1$ かつ $A \notin \mathcal{F}$ なる $A \subset \mathbb{N}$ がある（なければ $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ になる）．今もし $A^c \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}_1$ となり，特に $A \in \mathcal{F}_1$ と合わせて，フィルターの定義より $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{F}_1$ となって矛盾する．よって $A^c \notin \mathcal{F}$ である．この $A$ が $A \notin \mathcal{F}$ かつ $A^c \notin \mathcal{F}$ を満たすので，条件 2 が成り立っていない事が分かる．

2. $\Rightarrow$ 3. $A \cup B \in \mathcal{F}$ とする．$A \notin \mathcal{F}$ かつ $B \notin \mathcal{F}$ と仮定して矛盾すればよい．条件 2 より，$A^c \in \mathcal{F}$ かつ $B^c \in \mathcal{F}$ となっていて，するとフィルターの条件より $A^c \cap B^c \in \mathcal{F}$ である．ここで実は $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ となっているので（確認せよ），最初の仮定と合わせて $A \cup B \in \mathcal{F}$ かつ $(A \cup B)^c \in \mathcal{F}$ となっていて，再びフィルターの条件よりこれらの共通部分である空集合が $\mathcal{F}$ になり矛盾する．

3. $\Rightarrow$ 2. $A \subset \mathbb{N}$ を取る．フィルターの定義によりいつでも $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ である．$A \cup A^c = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$ なので，条件 3 より $A \in \mathcal{F}$ か $A^c \in \mathcal{F}$ のどちらかが成立する．

3. $\Rightarrow$ 4. これは演習とする．

4. $\Rightarrow$ 3. これは明らかである． □

**演習 3.10.** 上の命題の 3. $\Rightarrow$ 4. を証明せよ．(ヒント：$B := A_2 \cup \cdots \cup A_n$ とおいてみよ.）

## 3.3　超積を用いた超実数 ${}^*\mathbb{R}$ の構成

ではいよいよ超実数を構成しましょう．以下のように超フィルターを一つ構成します．

- 例 3.5 のフレッシェ・フィルターを取り，それを定理 3.8 を用いてより大きな超フィルターに取り換え，これを $\mathcal{F}$ と書く．**以降ずっとこの $\mathcal{F}$ を用いて考える**．

この $\mathcal{F}$ は超フィルターだから，命題 3.9.2 により，どんな $\mathbb{N}$ の部分集合 $A$ に対しても，$A$ か $A^c$ のどちらかが必ず $\mathcal{F}$ に入っており，両方が入る事はありません．そこで，$A \subset \mathbb{N}$ が $\mathcal{F}$ に入っている時に「$A$ が大きい」と言い，$A^c$ が $\mathcal{F}$ に入っている時には「$A$ が小さい」と言う事にすれば，全ての $\mathbb{N}$ の部分集合に対して，それが大きいか小さいかが決まった事になります．また $\mathcal{F}$ はフレッシェ・フィルターから作ったので，$\mathbb{N}$ の有限部分集合の補集合は

$\mathcal{F}$ に入っており，特に $\mathbb{N}$ **の有限部分集合はいつも小さい**という事も分かります．これらは重要な事なので，まとめておきましょう．

**約束 3.11.** 超実数を考える際は，いつも次の条件を満たす超フィルター $\mathcal{F}$ を一つ固定して考えている事にする．

- $\mathcal{F}$ は定義 *3.2* の 4 つの条件と，さらに命題 *3.9* の条件を満たす．特にどんな部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ に対しても，$A \in \mathcal{F}$ か $A^c \in \mathcal{F}$ のどちらか一つのみが必ず成立する．
- どんな有限部分集合 $X \subset \mathbb{N}$ に対しても $X^c \in \mathcal{F}$ である．

以上を元に，次のような集合を考えましょう．

$$^*\mathbb{R} := \{\, \text{実数からなる数列全体を } \mathcal{F} \text{ で同一視したもの} \,\}.$$

これはつまり，$^*\mathbb{R}$ の元とは実数からなる数列であり，そのようなものを二つ取り $(a_n)_n, (b_n)_n$ とした時，これらが同じ元であるという事を $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \subset \mathbb{N}$ という部分集合が大きい（つまりこれが $\mathcal{F}$ に入る）という事で定めます．以下にまとめておきましょう．

**定義 3.12.** **超実数の集合** $^*\mathbb{R}$ とは，実数からなる数列全体の集合を $\mathcal{F}$ で同一視したものの事である．つまり各数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が一つの超実数を表し，二つの数列 $(a_n)_n, (b_n)_n$ が

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \in \mathcal{F}$$

を満たせば $(a_n)_n = (b_n)_n$ とみなすという事である．一般に，数列と超フィルターを用いたこのような構成方法を**超積**という．

**注意 3.13.** すでに述べたように，フレッシェ・フィルターを含む超フィルターはたくさんあるのだが，それを一つ固定するごとに超実数が定まっている．つまり，我々の超実数の構成は超フィルターの選び方に依存している．実は全ての超フィルターの情報を合わせてもっと大きな超実数を定める事が出来て，その状況ではしかるべき意味で超実数が一意的に定まる事が知られている．

有理数 $\mathbb{Q}$ から実数 $\mathbb{R}$ を作った時と同様に，$a \in \mathbb{R}$ を $(a, a, a, a, \ldots) \in {}^*\mathbb{R}$ という数列と同一視する事で，全ての実数を $^*\mathbb{R}$ の中に入れましょう．つまり $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$ とします．そして，実数 $\mathbb{R}$ の四則演算を拡張する形で，$^*\mathbb{R}$ の元に対しても四則演算を次のように定義しましょう．実数からなる数列 $(a_n)_n, (b_n)_n$ に対して，

$$(a_n)_n + (b_n)_n := (a_n + b_n)_n, \quad (a_n)_n - (b_n)_n := (a_n - b_n)_n,$$
$$(a_n)_n(b_n)_n := (a_n b_n)_n, \quad \frac{(a_n)_n}{(b_n)_n} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$$

とします．(ただし，割り算をする時は $(b_n)_n \neq 0$ とします.）今回は実数を作った時と違い，コーシー列になるかどうかの確認はいりませんが，数列の取り方に依存するかどうかの確認は必要です．これについては，次の演習を見てください．ここからは，実数を作った時と同様に，超実数を $\alpha, \beta$ 等でも表す事にしましょう．

**演習 3.14.** 二つの超実数 $\alpha, \beta \in {}^*\mathbb{R}$ が，異なる数列による表示

$$\alpha = (a_n)_n = (a'_n)_n, \quad \beta = (b_n)_n = (b'_n)_n$$

を持つ時，超実数として $(a_n + b_n)_n = (a'_n + b'_n)_n$ かつ $(a_n b_n)_n = (a'_n b'_n)_n$ である事を示せ．

**演習 3.15.** 部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ が $A^c \in \mathcal{F}$ とする．実数からなる数列 $(a_n)_n$ に対して，新しい数列 $(b_n)_n$ を

$$n \in A \text{ ならば } b_n := 1, \quad n \in A^c \text{ ならば } b_n := a_n$$

として定めると，超実数として $(a_n)_n = (b_n)_n$ となる事を示せ．特にここから，超実数 $\alpha$ が $\alpha \neq 0$ ならば $1/\alpha$ が定まる事を示せ．

**演習 3.16.** 超実数 $\alpha, \beta, \gamma$ に対して，次の基本的な性質が成立する事を示せ．

*1.* $\alpha = \beta$ かつ $\beta = \gamma$ ならば $\alpha = \gamma$ である．

*2.* $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

*3.* $\alpha\beta = 0$ ならば $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ である．

**問題 3.1 の答え**．ここでようやく，問題 3.1 に答える事が出来ます．問題は

$$\alpha = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots), \quad \beta = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$$

という二つの超実数を考えると，$\alpha + \beta = 1$ かつ $\alpha\beta = 0$ となるから，どちらかが 1，どちらかが 0 になるというものでした．実際すぐ上の演習より，$\alpha\beta = 0$ からどちらかが 0 になり，$\alpha + \beta = 1$ よりもう一つは 1 になります．ではどちらが 0 でしょうか．答えは定義に戻ればよくて，$\alpha = 0$ とは偶数全体の集合が $\mathcal{F}$ の元である事，$\beta = 0$ とは奇数全体の集合が $\mathcal{F}$ の元である事です．命題 3.9.2 によって，どちらか一つが必ず成り立つわけですが，どちらが成り立つかは $\mathcal{F}$ に依存します．そして $\mathcal{F}$ は定理 3.8 によって抽象的に構成されているので，実際にどちらが入るかは分かりません．よって問題 3.1 には，**どちらが 0 かは超フィルター $\mathcal{F}$ の取り方に依存している**，としか答えられないという事になります．やや歯切れの悪い答えに見えるかもしれませんが，超実数のような超越的な対象を扱う上では，このような現象はあまり不自然ではないと思います．

最後に，超実数にも大小の概念を入れて，無限大超実数を定義しましょう．超実数の大小は，実数の大小関係を拡張していて，しかもコーシー列の時より簡単に定まります．

**定義 3.17.** 二つの超実数 $\alpha = (a_n)_n$, $\beta = (b_n)_n \in {}^*\mathbb{R}$ に対して，$\alpha \leq \beta$ を次で定める．

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq b_n\} \in \mathcal{F}.$$

同様に $\alpha < \beta$, $\alpha \geq \beta$, $\alpha > \beta$，$\alpha \neq \beta$ も定める．また，絶対値を $|\alpha| := (|a_n|)_n$ で定める．

**注意 3.18.** ここでも数列の選び方によらない事は確認しないといけない．例えば，$\alpha = (a_n)_n = (a'_n)_n \in {}^*\mathbb{R}$ の時に，$\alpha \leq \beta$ の条件は，どちらの数列を用いても同じ条件になっている事を示さないといけない．絶対値 $|\alpha|$ も同様である．

**定義 3.19.** *1.* 超実数 $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ が**有限超実数**であるとは，ある実数 $a, b \in \mathbb{R}$ が存在して $a < \alpha < b$ となる事である．

*2.* 有限超実数でない超実数の事を**無限大超実数**と言う．

*3.* 超実数 $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ が**無限小超実数**であるとは，どんな正の数 $\varepsilon > 0$ に対しても $|\alpha| < \varepsilon$ となる事である．

例えば $\alpha = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots) \in {}^*\mathbb{R}$ という超実数を考えると，どんな実数 $b \in \mathbb{R}$ に対しても $b < \alpha$ を満たす事がすぐに分かります.（これは $b$ より小さい自然数が有限個しかなくて，フレッシェ・フィルターの条件から有限集合は小さいので，無視出来るからです.）つまりこの $\alpha$ は，**どんな実数よりも大きな無限大超実数**です．この $\alpha$ に 1 を足した $\alpha+1$ は，やはり無限大超実数であり，しかも $\alpha$ よりも真に大きい事になります．このように，無限大実数はいくらでもたくさん作れる事がすぐにわかります．同様にして，$1/\alpha = (1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots) \in {}^*\mathbb{R}$ のようにどんどん小さくなる数列を考えれば，これは**どんな正の実数 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ よりも小さい**事がすぐに分かり，しかも 0 ではありません.

さらには，下の演習により，どんな二つの超実数に対しても大小が決まります．だからどんな超実数 $\alpha$ も $\alpha = 0$，$\alpha > 0$，$\alpha < 0$ のどれかが成り立っており，それぞれ 0，正，負に対応します．特に，$\alpha \neq 0$ が無限大超実数や無限小超実数でも，正や負の符号が定まるわけです．ここから例えば，**無限大超実数は $+\infty$ か $-\infty$ のいずれかを表す**という事です.

これらの性質は，我々の構成した超実数が，期待した通りの条件を満たしている事を意味しています．超実数のより具体的な性質や使い方については，次章で学ぶことにしましょう.

**演習 3.20.** 超実数 $\alpha, \beta \in {}^*\mathbb{R}$ に対して次を示せ.

1. $\alpha = \beta$ か $\alpha \neq \beta$ のどちらかが必ず成立する.
2. $\alpha \leq |\alpha|$，$0 \leq |\alpha|$ である.
3. $\alpha = \beta$，$\alpha < \beta$，$\alpha > \beta$ のどれかが必ず成立する．また，これらは二つ以上同時に成立しない.
4. $\alpha \leq \beta$ である事と，$\alpha < \beta$ か $\alpha = \beta$ のどちらか一つが成立する事は同じである.
5. $\alpha \leq \beta$ かつ $\alpha \geq \beta$ ならば $\alpha = \beta$ である.

**演習 3.21.** 0 でない超実数 $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ に対して，$\alpha$ が無限大超実数である事と $1/\alpha$ が無限小超実数である事は同じである事を示せ.

## 4　超実数を用いた解析学の展開

この章では，前章で構成した超実数 ${}^*\mathbb{R}$ を用いて，解析学の基礎的な事項を実際に証明してみます．とは言っても講義時間が少ないため，本当に限られた話題にしか言及しません．超実数はいつも超フィルターから出来ているので，超フィルターが突然文脈に現れる事があります．注意しましょう.

### 4.1　数列の収束

最初にいくつかの用語を定義しましょう.

**定義 4.1.** 超実数 $\alpha$ が**超自然数**であるとは，自然数からなる数列 $(a_n)_n$ を用いて $\alpha = (a_n)_n$ と書ける事である．この時もし $\alpha$ が無限大超実数ならば，**無限大超自然数**という．超自然数の集合を ${}^*\mathbb{N}$ で表す．以後は分かりやすさのため，超自然数は $\omega, \lambda$ 等の記号で表す事が多い.

**定義 4.2.** 実数のなす数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と超自然数 $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，超実数 $a_\omega$ を

$$a_\omega := (a_{\omega_n})_n = (a_{\omega_1}, a_{\omega_2}, a_{\omega_3}, \ldots) \in {}^*\mathbb{R}$$

で定める．例えば $\omega = (k,k,k,\ldots) = k \in \mathbb{N}$ の時は $a_\omega = (a_k, a_k, a_k, \ldots) = a_k \in \mathbb{R}$ だから，$a_\omega$ とは数列 $(a_n)_n$ の $\omega$ 番目を見ていると思える．

**演習 4.3.** 超実数 $a_\omega$ が上手く定まっている事を示せ．つまり，超自然数 $\omega$ が $\omega = (\omega_n)_n = (\lambda_n)_n$ ならば，$(a_{\omega_n})_n = (a_{\lambda_n})_n$ となる事を示せ．

**注意 4.4.** この定義では，数列 $(a_n)_n$ から超実数 $a_\omega$ を作っている．同じ方法で，超実数 $(a_n)_n$ から超実数 $a_\omega$ を作る事は出来ない（なぜか考えよ）．数列と超実数の違いは，超フィルターで同一視をするかどうかである．

**定義 4.5.** 超実数 $\alpha, \beta$ に対して，$\alpha - \beta$ が無限小超実数の時 $\alpha \approx \beta$ と書く．

**演習 4.6.**
1. 超実数 $\alpha, \beta, \gamma$ に対して，$\alpha \approx \beta$ かつ $\beta \approx \gamma$ ならば $\alpha \approx \gamma$ である事を示せ．
2. 実数 $a \in \mathbb{R}$ が $a \approx 0$ ならば $a = 0$ である事を示せ．実数 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $a \approx b$ と $a = b$ は同じである事を示せ．

次の定理は，数列の収束という $\varepsilon$-$\delta$ 論法における概念を，**超実数のみを用いた条件**に言い換えるものです．

**定理 4.7.** 実数列 $(a_n)_n$ と実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ である事の必要十分条件はどんな無限大超自然数 $\omega$ に対しても $a_\omega \approx a$ となる事である．

**注意 4.8.** この定理が証明されれば，最初から $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ の定義を，$a_\omega \approx a$ **が全ての無限大超自然数** $\omega$ **に対して成立する事**としてもよい事になる．これは「数列の $\infty$ 番目がいつも同じ数」という意味であり，より直感的な収束の定義である．

**証明.** まず $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を仮定する．この収束の定義は，どんな $\varepsilon > 0$ に対してもある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$|a_n - a| < \varepsilon$ が $n > N$ を満たす全ての自然数 $n$ に対して成立する，であった．今，無限大超自然数 $\omega = (\omega_n)_n$ を取り，$a_\omega \approx a$ を示す．それには $a_\omega - a$ が無限小であればよいので，どんな正の数 $\varepsilon > 0$ に対しても $|a_\omega - a| < \varepsilon$ である事を示せばよい．

正の数 $\varepsilon > 0$ を一つ取る．収束の定義にある $N \in \mathbb{N}$ を取ると，$\omega$ は無限大なので $N < \omega$ であり，$A := \{n \in \mathbb{N} \mid N < \omega_n\}$ は超フィルター $\mathcal{F}$ に入る．この時 $N$ の取り方から，$n \in A$ なる全ての $n$ は $|a_{\omega_n} - a| < \varepsilon$ を満たす．特に $B := \{n \in \mathbb{N} \mid |a_{\omega_n} - a| < \varepsilon\}$ とおくと $A \subset B$ だから，フィルターの性質より $B$ も超フィルター $\mathcal{F}$ に入る．これは $|a_\omega - a| < \varepsilon$ という意味であるから，求める式を得る．

次に，$a_\omega \approx a$ が全ての無限大超自然数 $\omega$ について成立すると仮定して $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を示す．これには対偶証明を行うので，$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$ と仮定して，$a_\omega \approx a$ が成立しない無限大超自然数 $\omega$ を探す．

まず $\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$ なので，次が成立する．ある正の実数 $\delta > 0$ が存在して，どんな自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対しても，$n > N$ かつ $|a_n - a| \geq \delta$ なる $n \in \mathbb{N}$ が取れる（これを確かめよ）．このような $\delta$ を一つとり，$N = 1, 2, 3, \ldots$ に対して順に $n_1, n_2, n_3, \ldots$ を取っていけば

$$n_k > k \quad \text{かつ} \quad |a_{n_k} - a| \geq \delta, \quad k \in \mathbb{N}$$

のように出来る．これに対して $\omega := (n_k)_k \in {}^*\mathbb{N}$ とおく．作り方から明らかに $|a_\omega - a| \geq \delta$ なので，$a_\omega \approx a$ は成立しない．後は $\omega$ が無限大ならば証明が終わる．それには，各 $k \in \mathbb{N}$

に対して $k < \omega$ である事を示せばよく，それには $\{n \in \mathbb{N} \mid k < \omega_n\}$ が超フィルターに入っていればよい．しかし作り方からこの補集合 $\{n \in \mathbb{N} \mid k \geq \omega_n\}$ は有限集合なので，これが超フィルターに入る事は明らかである． □

ではこの定理の条件を用いて，実際に数列の収束を調べてみましょう．次の命題は，イントロダクションで登場したあの数列についてです．

**命題 4.9.** 実数からなる数列 $(a_n)_n$ と実数 $a \in \mathbb{R}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たしているとする．この時新しい数列 $(b_n)_n$ を

$$b_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n}$$

で定めると，$\lim_{n\to\infty} b_n = a$ を満たす．

**証明.** 最初に，$a = 0$ の場合にのみ証明すれば十分である事を示す.（これは記号を簡略化するための工夫であり，証明の難しさは本質的には変わらない.）

まず $\widetilde{a}_n := a_n - a$ とすると数列 $(\widetilde{a}_n)_n$ は $0$ に収束する．次に

$$b_n - a = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right) - \left(\frac{a + \cdots + a}{n}\right) = \frac{\widetilde{a}_1 + \cdots + \widetilde{a}_n}{n}$$

と書き直せる事から，もし $a = 0$ の場合にこの命題が証明出来ていれば，数列 $(b_n - a)_n$ は $0$ に収束する事になる．これはちょうど $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ だから，求めたい条件である．

以上によって，我々は $a = 0$ と仮定してこの命題を証明する．定理 4.7 を使いたいので，任意に無限大超自然数 $\omega \in {}^*\mathbb{N}$ を取って固定し，これに対して $b_\omega \approx 0$ を示す事にする.（これは $b_\omega$ が無限小超実数であるという意味である.）

まず自然数 $\omega_n$ を用いて $\omega = (\omega_n)_n$ と書く．各 $\omega_n$ のルートを取って，$\sqrt{\omega} := (\sqrt{\omega_n})_n \in {}^*\mathbb{R}$ と書くとこれは無限大超実数である．各 $\sqrt{\omega_n}$ は実数だから，ある自然数 $\lambda_n$ を用いて

$$\lambda_n \leq \sqrt{\omega_n} \leq \lambda_n + 1$$

と書ける．そこで $\lambda := (\lambda_n)_n \in {}^*\mathbb{N}$ とすると，作り方から

$$\lambda \leq \sqrt{\omega} \leq \lambda + 1$$

となる．当然 $\lambda_n \leq \omega_n$ も成り立っているので，これに沿って

$$b_{\omega_n} = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{\lambda_n}}{\omega_n}\right) + \left(\frac{a_{\lambda_n+1} + \cdots + a_{\omega_n}}{\omega_n}\right)$$

と分解する．右辺の第一項を $c_n$，第二項を $d_n$ とすると，$b_{\omega_n} = c_n + d_n$ とかけて，

$$b_\omega = (c_n)_n + (d_n)_n$$

となるから，右辺の $(c_n)_n$ と $(d_n)_n$ がそれぞれ無限小超実数である事を示せばよい．

まずは $(c_n)_n$ の方を見る．これは $\lambda$ の取り方から $\lambda \leq \sqrt{\omega}$ となっている事を用いる．数列 $(a_n)_n$ は $0$ に収束しているので，$|a_n|$ はどんどん小さくなっている．特にある大きな実数 $r > 0$ によって，$|a_n| \leq r$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立っている事になる．すると各 $c_n$ について，

$$\begin{aligned}
|c_n| &= \left|\frac{a_1 + \cdots + a_{\lambda_n}}{\omega_n}\right| \\
&\leq \frac{|a_1| + \cdots + |a_{\lambda_n}|}{\omega_n} \\
&\leq \frac{r + \cdots + r}{\omega_n} = r\frac{\lambda_n}{\omega_n}
\end{aligned}$$

となるので，超実数として

$$|(c_n)_n| \le r\frac{\lambda}{\omega} \le r\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

となっている．特に最後の右辺は，$r$ が普通の実数で $\sqrt{\omega}$ は無限大超実数だから，無限小超実数である．よって $(c_n)_n$ も無限小超実数である．

次に $(d_n)_n$ の方を見る．作り方から $\lambda_n \le \sqrt{\omega_n}$ だったので，$\lambda_n^2 \le \omega_n$ となり，$1 < \lambda_n$ ならば $\lambda_n + 1 \le \omega_n$ も成立している．ここで $\omega$ は無限大だから $\omega_n$ はどんどん大きくなる事を用いると，$\lambda_n + 1 \le \omega_n$ がいつも成り立っていると仮定してよい.(成り立たない所は超フィルターに入らないから，その部分は都合の良いものに取り換えればよい.)

次に各 $n \in \mathbb{N}$ について，次のような議論をする．まず $\{a_{\lambda_n+1}, a_{\lambda_n+2}, \dots, a_{\omega_n}\}$ は有限集合なので，この中で絶対値が最も大きいものがある．この最大値を与えるものを一つ取り，それは $a_k$ という形をしているので，この $k$ を $\nu_n$ と書く．作り方から，$\lambda_n + 1 \le \nu_n \le \omega_n$ かつ全ての $\lambda_n + 1 \le k \le \omega_n$ に対して $|a_k| \le |a_{\nu_n}|$ である．この $\nu_n$ を用いると，$d_n$ に対して次のような不等式が得られる．

$$\begin{aligned}
|d_n| &= \left|\frac{a_{\lambda_n+1} + \cdots + a_{\omega_n}}{\omega_n}\right| \\
&\le \frac{|a_{\lambda_n+1}| + \cdots + |a_{\omega_n}|}{\omega_n} \\
&\le \frac{|a_{\nu_n}| + \cdots + |a_{\nu_n}|}{\omega_n} \\
&= |a_{\nu_n}|\frac{(\omega_n - \lambda_n)}{\omega_n} < |a_{\nu_n}|.
\end{aligned}$$

特にここから，$\nu := (\nu_n)_n \in {}^*\mathbb{N}$ を用いて

$$|(d_n)_n| < |a_\nu|$$

を得る．作り方から $\lambda + 1 \le \nu$ なので $\nu$ は無限大超自然数であり，一方 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ だったので，定理 4.7 から $a_\nu \approx 0$ である．よって $(d_n)_n$ が無限小超実数である事が分かる．

以上により，$b_\omega$ が無限小超実数と分かり，証明が終わる． □

## 4.2 連続関数

この節では，実数 $\mathbb{R}$ 上の関数を，超実数 ${}^*\mathbb{R}$ を用いて調べます．ここで**実数 $\mathbb{R}$ 上の関数**とは，関数 $f$ であって，$x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) \in \mathbb{R}$ が定まるものの事です．これを $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と書きましょう．より一般に $f\colon X \to Y$ と書いたら，$X$ と $Y$ は集合で，各 $x \in X$ に対して $f(x) \in Y$ が定まる，という意味です.

まずは実数 $\mathbb{R}$ 上の関数がいつでも超実数 ${}^*\mathbb{R}$ 上の関数と思える事から始めます.

**定義 4.10.** 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と超実数 $\alpha = (a_n)_n$ に対して，超実数 ${}^*f(\alpha)$ を $(f(a_n))_n$ で定める．特にこの対応を用いて，関数 $f$ から新しい関数 ${}^*f\colon {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ が定義出来る．

例えば $f(x) = x^2 + 3$ とか $g(x) = \sin(\pi x/2)$ などに対して，超実数が代入出来るようになります．試しに $\omega = (1, 2, 3, 4, \dots)$ を代入すると，

$${}^*f(\omega) = \omega^2 + 3 = (4, 7, 12, 19, \dots), \quad {}^*g(\omega) = \sin(\frac{\pi\alpha}{2}) = (1, 0, -1, 0, \dots)$$

のようになり，${}^*f(\omega)$ は無限大ですが，${}^*g(\omega)$ はなんだかよく分からないものになります．要するに $\sin(\infty)$ は上手く定まらないという事ですが，こういうものも統一的に扱えるのも超実数の強みの一つです．

さて，**関数の連続性の超準解析における条件付け**を見ましょう．先に $\varepsilon$-$\delta$ 論法における連続性を復習し，続いて超実数を用いた必要十分条件を証明します．この条件は，数列について述べた定理 4.7 を関数の場合に変更したものと思えば，自然なものに見えると思います．

**定義 4.11.** $I \subset \mathbb{R}$ を部分集合，$f\colon I \to \mathbb{R}$ を関数とする．

1. 関数 $f$ が**点 $a \in I$ で連続**であるとは，どんな正の数 $\varepsilon > 0$ に対してもある $\delta > 0$ が存在して，$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が $|x - a| < \delta$ なる全ての $x \in I$ で成立する事である．これが成り立つ時，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ と書く．

2. 関数 $f$ が**連続**であるとは，$I$ の全ての点で連続である事である．

**定理 4.12.** 関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が点 $a \in I$ で連続であるための必要十分条件は，$\alpha \approx a$ を満たす全ての超実数 $\alpha \in {}^*I$ が ${}^*f(\alpha) \approx f(a)$ を満たす事である．
（ただしここで $\alpha \in {}^*I$ とは，$a_n \in I$ を用いて $\alpha = (a_n)_n$ と書ける事を意味する.）

**注意 4.13.** 数列の場合と同じく，ひとたびこの定理が証明されれば，連続関数の定義を超実数を用いて与える事が出来る．その場合，やはり $\varepsilon$-$\delta$ 論法を一切使わずに議論を進めていく事が出来る．

**証明.** 証明は定理 4.7 のそれと同じように行う．まず $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ を仮定する．$\alpha \approx a$ を満たす超実数 $\alpha \in {}^*I$ を取り，${}^*f(\alpha) \approx f(a)$ を示せばよい．それには，どんな正の数 $\varepsilon > 0$ に対しても $|{}^*f(\alpha) - f(a)| < \varepsilon$ であればよい．

実数列を用いて $\alpha = (a_n)_n$ と書く．正の数 $\varepsilon > 0$ を一つ取り，収束の定義にある $\delta > 0$ を取る．$|\alpha - a| < \delta$ だから，$A := \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \delta\}$ は超フィルター $\mathcal{F}$ に入る．この時 $\delta$ の取り方から，$n \in A$ なる全ての $n$ に対して $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$ となるので，特に $B := \{n \in \mathbb{N} \mid |f(a_{\omega_n}) - f(a)| < \varepsilon\}$ とおくと $A \subset B$ となる．フィルターの性質より $B$ も超フィルター $\mathcal{F}$ に入り，これは $|{}^*f(\alpha) - f(a)| < \varepsilon$ という意味である．

次に，${}^*f(\alpha) \approx f(a)$ が全ての $\alpha \approx a$ なる超実数 $\alpha \in {}^*I$ について成立すると仮定して $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ を示す．対偶証明を行うので，$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ と仮定して，${}^*f(\alpha) \approx f(a)$ が成立しないが $\alpha \approx a$ を満たす超実数 $\alpha \in {}^*I$ を探す．

まず $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ なので，次が成立する（これを確かめよ）．ある正の実数 $\delta > 0$ が存在して，どんな正の数 $r > 0$ に対しても，$|x - a| < r$ かつ $|f(x) - f(a)| \geq \delta$ なる $x \in I$ が取れる．このような $\delta$ を一つとり，$r = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ に対して順に $x_1, x_2, x_3, \ldots$ を

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{かつ} \quad |f(x_n) - f(a)| \geq \delta$$

であるように取る．これに対して $\alpha := (x_n)_n \in {}^*I$ とおく．作り方から明らかに $\alpha \approx a$ かつ $|{}^*f(\alpha) - f(a)| \geq \delta$ なので，証明が終わる． □

さて，せっかくなので一つくらい定理を証明してみましょう．そのために，実数の性質について少し復習しておきます．次の定理の性質は，実数の定義として用いられる事も多いくらい基本的なものですが，ここでは証明しません．我々がコーシー列で具体的に構成した $\mathbb{R}$ についても，もちろん証明する事が出来ます．

**定理 4.14.** 実数の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ が，上に有界な集合であるとする．(つまりある $b \in \mathbb{R}$ があって，$a \leq b$ が全ての $a \in A$ について成立する．) この時ただ一つの元 $r \in \mathbb{R}$ が存在して次を満たす．

- もし $b \in \mathbb{R}$ が $a \leq b$ を全ての $a \in A$ に対して満たしているとしたら，$r \leq b$ が成り立つ．

この $r$ を $A$ **の上限**と呼び，$\sup\{a \mid a \in A\}$ などのように書く．

**注意 4.15.** 上限とは要するに，$A$ **を上から抑える元の中で最小**という事である．この事実は次のような形で用いられる事が多い．集合 $A$ の上限 $r \in \mathbb{R}$ をとると，**どんな正の数** $\varepsilon > 0$ **に対しても，必ずある** $a \in A$ **があって** $r - \varepsilon < a$ **と書ける**．もし書けなければ $a \leq r - \varepsilon$ が全ての $a \in A$ で成立してしまい，上限の定義から $r \leq r - \varepsilon$ となって矛盾するからである．これは基本的だが有用な議論で，次の定理の証明でも用いられている．

さてこの性質を用いて，次の定理を証明しましょう．**有限超実数のすぐ近くに普通の実数がある**という定理で，超実数の最も基本的な性質の一つです．この定理を用いて，最大値の定理というものを証明してみましょう．最大値の定理は連続関数の非常に基本的な性質で，例えば高校生で習う平均値の定理はここから簡単に導く事が出来ます．

**定理 4.16.** 超実数 $\alpha$ が有限超実数ならば，必ずある実数 $a \in \mathbb{R}$ があって $\alpha \approx a$ となる．この時もし $\alpha \in {}^*[0,1]$ ならば，$a \in [0,1]$ となる．(ここで $[0,1] := \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ である．)

**証明.** 次の集合を考える．

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\}.$$

これは $\mathbb{R}$ の部分集合であり，$\alpha$ が有限超実数である事から，上に有界な集合である．このような集合からは上限が取れるので，それを $r \in \mathbb{R}$ とする．この $r$ に対して $\alpha \approx r$ を示したい．

まず $\varepsilon > 0$ を一つとる．上限の定義より，$r - \varepsilon < x$ となる $x \in A$ が取れるから，$x < \alpha$ と合わせて $r - \varepsilon < \alpha$ である．次にもし $r + \varepsilon \leq \alpha$ となったとすると $r + \varepsilon/2 < \alpha$ より $r + \varepsilon/2 \in A$ となり上限の定義に矛盾する．よって $r + \varepsilon > \alpha$ である．これらを合わせると，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても

$$r - \varepsilon < \alpha < r + \varepsilon$$

となり $|\alpha - r| < \varepsilon$ となる．$\varepsilon > 0$ は何でもよいので，$\alpha \approx r$ である．

次に，$\alpha \in {}^*[0,1]$ を仮定して $r \in [0,1]$ を示す．そのため，$r \notin [0,1]$ と仮定して矛盾を導く．まず $r > 1$ とする．$\delta := r - 1 > 0$，$\alpha = (a_n)_n$，$a_n \in [0,1]$ とおくと，$|\alpha - r| < \delta/2$ だから $B := \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - r| < \delta/2\}$ は超フィルターに入る．よって $|a_n - r| < \delta/2$ なる $n$ が，少なくとも一つ存在している．この $a_n$ は $a_n \leq 1$ なので，

$$\delta = r - 1 \leq r - a_n = |r - a_n| < \delta/2$$

となり，これは矛盾である．$r < 0$ の場合も同様に証明出来る．□

**定理 4.17 (最大値の定理).** 連続関数 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ は最大値を持つ．つまりある $t \in [0,1]$ が存在して，$f(x) \leq f(t)$ が全ての $x \in [0,1]$ に対して成立する．

**証明.** 集合 $\{f(x) \mid x \in [0,1]\}$ の上限を取りたいので，まずはこれが上に有界な集合である事を示す．もし有界でないとしたら，どんな $b \in \mathbb{R}$ に対しても $b < f(x)$ となる $x \in [0,1]$ が取れる．そこで各 $n \in \mathbb{N}$ について，$x_n \in [0,1]$ を $n < f(x_n)$ を満たすように取ってこれる．すると超実数 $\alpha := (x_n)_n$ は全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $n < {}^*f(\alpha)$ を満たすから，${}^*f(\alpha)$ は無限

大超実数である．一方 $\alpha$ は $0 \leq \alpha \leq 1$ より有限超実数なので，定理 4.16 より $\alpha \approx a$ なる実数 $a \in [0,1]$ がある．関数 $f$ は連続なので，定理 4.12 より $f(a) \approx {}^*f(\alpha)$ だが，$f(a)$ は実数で ${}^*f(\alpha)$ は無限大実数なのでこれは矛盾である．

以上より集合 $\{f(x) \mid x \in [0,1]\}$ は上に有界なので，その上限 $r$ を取る事が出来る．上限の定義により，全ての $n \in \mathbb{N}$ に対してある $x_n \in [0,1]$ が存在して

$$r - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq r$$

を満たす．そこで $\alpha := (x_n)_n \in {}^*[0,1]$ を考えると，

$$r - \left(\frac{1}{n}\right)_n = \left(r - \frac{1}{n}\right)_n < {}^*f(\alpha) \leq r$$

となり，$|{}^*f(\alpha) - r| < (1/n)_n$ となる．$(1/n)_n$ は無限小超実数なので，${}^*f(\alpha) \approx r$ を得る．一方，定理 4.16 より $\alpha \approx a$ なる $a \in [0,1]$ が存在する．$f$ が連続関数より定理 4.12 が使えて

$$r \approx {}^*f(\alpha) \approx f(a)$$

となり，$f(a)$ と $r$ は実数なので $f(a) = r$ である．この $f(a)$ が求めるものである． □

# 5　超積とフォンノイマン環

突然ですが，この章ではやや先進的な話題について学びます．私の専門分野であるフォンノイマン環論と，そこで使われている超積の技術について眺めてみます．超積がなぜフォンノイマン環論で重要か，という点に焦点を当てたお話になります．

専門的な内容がたくさん出てくるので，**細かい事は気にせず雰囲気を味わおうという視点で読んでください**．私もそのつもりで書きます．

## 5.1　関数解析とフォンノイマン環

### 無限次元ベクトル空間

実数 $\mathbb{R}$ を並べて $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を考えると，これはいわゆるベクトルの空間です．$\mathbb{R}^2$ は別に $\mathbb{R}^n$ でもだいたい同じで，いっそ複素数にして，$\mathbb{C}^n$ にしましょう．頭の中で絵を描こうとすると訳が分かりませんが，単に数字がいくつか並んだものと思えば，別に $\mathbb{R}^2$ も $\mathbb{C}^n$ もあまり変わりません．この考えをさらに推し進めて，数字が無限個並んだものである $\mathbb{C}^\infty$ を考えてみましょう．このようなものを**無限次元ベクトル空間**といいます（注．かなりいい加減な書き方をしています）．連続関数全体の空間

$$C([0,1]) := \{f \colon [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ は連続関数}\}$$

がこれになる事から，このようなものの研究は**関数解析**という名前がついています．このような無限次元ベクトル空間で,「長さと角度」が上手く定まるものを**ヒルベルト空間**といいます．長さや角度というのは，$\mathbb{R}^2$ に対して内積やノルムを考えるのと同じようなものです．

## 無限次元行列

**行列**とは正方形のブロックに数字（実数や複素数）が並んだもので，足し算や掛け算が出来ます．以下のような感じです．

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}.$$

これらはサイズが $2 \times 2$ の行列で，これらは $\mathbb{C}^2$ **から** $\mathbb{C}^2$ **への写像を誘導します**．例えば上の行列 $A$ は，以下のように写像と思えます．

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ に対して } Ax = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix} \text{ を対応させる写像.}$$

一般に写像 $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ が**線形写像**とは

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

を全ての $\lambda \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{C}^2$ に対して満たすものです．上の行列 $A$ から定まる写像は必ず線形写像だし，逆に線形写像はいつも行列の形で再現出来ます．この考えは $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ でも同様で，**サイズ** $n \times n$ **の行列が線形写像と対応します**．しかし，無限次元ベクトル空間に対してはそこまで簡単ではありません．

ヒルベルト空間 $H$ を考えます．線形写像 $f\colon H \to H$ という概念は上と同様に定まりますが，それだけではあまり良い性質を満たしません．ヒルベルト空間には前述のように長さがあるのですが，それを用いて**有界線形作用素**という概念が自然に定義出来ます．そこで

$$\mathbb{B}(H) := \{ f\colon H \to H \mid f \text{ は線形写像かつ有界線形作用素} \}$$

とすると，和や積など様々な事が全て上手くいき，**無限次元行列**の集合が定まります．

## フォンノイマン環

上の $\mathbb{B}(H)$ を考え，その部分集合 $M \subset \mathbb{B}(H)$ を取ります．この部分集合 $M$ が**フォンノイマン環**とは，和や積などが部分集合 $M$ の中で出来て，さらに数列の収束の条件を付けたものの事です．収束の条件というのは，コーシー列が $M$ の元として収束する，のような条件と思って下さい．(解析学を $M$ の中で行うために必要な条件です.)

なぜわざわざこのような部分集合を考えるのでしょうか．フォンノイマンの初期の論文には，その重要性について以下のように書いてあります．

- 量子力学に役に立つから．
- 群の表現論に役立つから．
- これまで見たことのないような数学的対象につながる研究だから．

フォンノイマン環はもともと，フォンノイマンによる量子力学の研究から現れたものです．非常に大雑把に言えば，$\mathbb{B}(H)$ の元が（つまり無限次元の行列が），位置や運動量などの情報を与えています．古い意味では座標だったものが，行列で表されているという事です．この観点から，量子力学への応用が重要である事は理解できると思います．

群の表現論についてはここでは触れない事にして，最後の理由を見てみましょう．フォンノイマン環は，無限次元の非可換環という，それまでまともに研究された事のなかった対象です．これは我々の直感が届かないような対象なのですが，後に数学の他分野との繋がりが多く発見されます．非可換幾何学，部分因子環論，自由確率論などは特に有名で，分野の枠を超えた影響を与えました．これらはいずれも，フォンノイマンの当初の予想を超えた大きな発見であり，フォンノイマン環は数学的にも極めて興味深い対象であると言えるでしょう．

### 何がしたいのか？

量子力学で現れるフォンノイマン環は，非常に特別な形をしています．具体的には**超有限**と呼ばれるもので，要するに有限次元のもので良い近似が出来るフォンノイマン環です．フォンノイマン環の難しさの多くは，無限次元であるという点から来ているので，有限次元からの近似は極めて重要な条件です．

初期のフォンノイマン環論で最も重要な問題は，**量子力学で現れるフォンノイマン環を数学的に特徴付け，完全に分類する**事でした．つまり，それらがどういう性質を持つフォンノイマン環であるかをはっきりさせ，さらには表れ得るものを全て列挙せよという事です．次節で述べるように，これは 1970 年代に多くの進展を見せ，そして完全な解決に至ります．そしてその研究に大きく貢献したのが，超積を用いた研究なのです．

## 5.2　フォンノイマン環の超積とその応用

超積とは，定義 3.12 にも書いた通り，数列の集まりを超フィルターで同一視する操作だった事を思い出しておきましょう．

### ヒルベルト空間の超積

関数解析は超積と非常に相性が良く，例えば上で見たヒルベルト空間から簡単に超積を作る事が出来ます．作り方は超実数を作る時とほぼ一緒で，数列の空間を超フィルターで同一視するだけです．

では試しに作ってみましょう．まずヒルベルト空間 $H$ を固定し，各ベクトル $a \in H$ に対して，その長さを $\|a\|_H$ で書く事にします．ヒルベルト空間のベクトルからなる列 $(a_n)_n$ $(a_n \in H)$ を考えます．そのような列の全体を超フィルターで同一視して $H^{\mathcal{F}}$ と書く事にすると，実はこれも新しくヒルベルト空間になります.（本当は少しだけ工夫がいります.）新しい長さは

$$\|(a_n)_n\|_{H^{\mathcal{F}}} := \lim_{n\to\mathcal{F}} \|a_n\|_H$$

で定義出来ます．ここで極限 $\lim_{n\to\mathcal{F}}$ は，有限超実数から実数を対応させた定理 4.16 と同じ操作です.（$(\|a_n\|_H)_n$ が有限超実数であるようなものだけを考えています.）以上より，**ヒルベルト空間という構造を用いて超積を取って，再びヒルベルト空間が出来た**事になります．

さてこのようにヒルベルト空間の超積が作れた訳ですが，これが実際にヒルベルト空間になる事の証明は非常に簡単で，超実数を作る程度の知識で十分です．我々は次にフォンノイマン環の超積を考えますが，実はその構成は簡単ではありません．

## フォンノイマン環の超積

フォンノイマン環を定義するには，ヒルベルト空間が必要でした．だからフォンノイマン環の超積を作ろうと思うと，上で見たヒルベルト空間の超積を使おうと考えるのが自然です．しかし実際にこの考えに基づいて作ってみると，無駄に大きなフォンノイマン環が出てきてしまい，あまり役には立ちません．そこで別の視点を使います．

まずフォンノイマン環は，普通とは異なる「長さ」を持っています.（知っている人に向けて書けば，$\mathbb{B}(H)$ の強作用素位相に概ね対応しています.）しかしこれを用いて超積を取っても，フォンノイマン環にはなりません．これをさらに適切な部分集合に制限し，さらには上手くヒルベルト空間を作る事で，新しいフォンノイマン環を作れます．これを**フォンノイマン環の超積**として定義し，$M^{\mathcal{F}}$ と書きましょう．

ヒルベルト空間の場合とはっきり違うのは，超積 $M^{\mathcal{F}}$ の定義が簡単ではなく，**これが実際にフォンノイマン環になる事の証明がやや難しい**点です．これが難しいからこそ，$M^{\mathcal{F}}$ のフォンノイマン環としての構造を調べる事に意味が出てくるわけです．これは超実数や超積ヒルベルト空間を考える場合との大きな違いだと思います．

最後に少し注意すると，実は超積 $M^{\mathcal{F}}$ は，最初に述べた無駄に大きなフォンノイマン環の部分集合としても実現出来ます．実は，これらの関係や具体的な構造がはっきりと分かったのは，比較的最近になってからです．ここからも，フォンノイマン環の超積 $M^{\mathcal{F}}$ が簡単な構造をしていない事が分かってもらえると思います．

## コンヌの分類定理

フォンノイマン環の超積は,（少なくとも特別な場合については）1960 年代後半に登場し，いくつかの応用も見つかっていました．例えば互いに異なるフォンノイマン環がたくさんある，という事がはっきり分かったのは，興味深い応用例です.（全く違う構成をしたフォンノイマン環が，自然に同一視出来るという事がよくあるので，はっきり違うものだと示すのはとても大事です.）しかしその重要性を完全に決定づけたのは，1970 年代の**アラン・コンヌによる一連の研究**でしょう．

以下，コンヌの超積を用いた研究を，非常に大雑把に説明してみます．専門用語の羅列になってしまうので，面倒なら下の定理 5.1 まで飛ばしてください．

まず**完全因子環**という概念を超積を用いて定義し，その重要な特徴付けを与えました．これは古くから知られている性質 $(\Gamma)$ というものに関係していて，そちらの視点から見ても有用な特徴付けになっています．次に**マクダフ型**と呼ばれる環の超積による特徴付けを一般的なものに拡張し，さらにその自己同型を研究しました．自己同型の研究は，当時発見されたばかりの**竹崎双対性**と合わせて，フォンノイマン環の理解には欠かせないものです．最後に，上で述べた超有限フォンノイマン環の新しい特徴付けを与えました．実は**単射的**と呼ばれる抽象的な条件と同値になります．全くの抽象的な条件から，これが有限次元で近似出来るという条件を導くのですから，これは大変に素晴らしく，しかも実用性の高い定理です．証明には，最初の完全因子環の研究や，自己同型が内部的である条件なども用いられており，そのそれぞれが興味深い結果なのですが，それら全てがコンヌ自身により証明されたもので

す．さらにこの結果を上のマクダフ型フォンノイマン環の自己同型の研究と組み合わせる事で，コンヌは超有限フォンノイマン環のほとんど全てを分類する事に成功します．コンヌは単射性以外にもいくつかの同値条件を得たので，現在ではこれらを合わせて**従順性**という言葉が用いられています．以下にまとめておきましょう．

**定理 5.1 (コンヌ，1976 年).** 超有限フォンノイマン環は，従順性と呼ばれる条件で特徴づけられる．特にここから，量子力学で現れるフォンノイマン環は全て分類出来る．

本当は一つだけ分類出来ないクラスが残ったのですが，これは 1985 年にハーゲラップが解決し，完全な分類が得られました．これにより，**量子力学で現れるフォンノイマン環を全て列挙する**という偉業が達成されたのです．すでに述べたように，これは当時の有名な未解決問題の解決で，コンヌはこの業績を主として 1982 年にフィールズ賞を受賞しました．フィールズ賞とは数学におけるノーベル賞に当たるもので，いかにコンヌの業績が素晴らしいかが分かっていただけると思います．

### 最後に

以上見てきたように，フォンノイマン環論において超積は極めて有効な道具です．コンヌの研究以来，超積は普遍的な道具の一つとして扱われており，もはやこれなしでの研究はあり得ないと言ってよいほどです．

超準解析から生まれた超積は，非常に一般的で有効な考え方です．そしてフォンノイマン環論においては，その有効性はさらに顕著になっているように思います．それは上で見たように，フォンノイマン環の超積が簡単には定義出来ない事に端を発しているのでしょう．

## 参考文献


[1] 齋藤正彦 『超積と超準解析－ノンスタンダードアナリシス』 東京図書，1992 年．ISBN 4-489-00374-9.

[2] A. Robinson. *Non-standard analysis.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1966.

[3] 高木貞治 『数の概念』 岩波書店，1970 年．ISBN 4-00-005153-9.

[4] 高木貞治 『解析概論』 岩波書店，2010 年．ISBN 978-4-00-005209-2.

[5] 田中尚夫 『選択公理と数学――発生と論争、そして確立への道』 遊星社 (出版) 星雲社 (発売)，2005 年 10 月．ISBN 4-434-06805-9.

[6] 竹崎正道 『作用素環の構造』 岩波書店，1983 年．ISBN 4-00-005398-1.


[1] は超準解析の有名な教科書である．数学の基礎を学んだ人を対象にしているので，記述はやや難しい．本講義は，この本の第一章の半分程度に相当する．我々の命題 4.9 は，この本の例 1.3.16 に書かれている．[2] は世界で最初の超準解析の教科書であり，創始者であるロビンソンの手によるものである．これは参考として書いただけなので，読む必要はない．

超準解析以外についての文献も上げておく．実数の構成については [3] の付録，$\varepsilon$-$\delta$ 論法を用いた解析学の基礎については [4] を見よ．選択公理については [5] が詳しい．我々が超フィルターの構成に用いたツォルンの補題は，この本の定理 16.2 に書いてある．また，フォンノイマン環の超積やコンヌの仕事に興味がある人は [6] の第 VII 章以降を見よ（注．この本はかなり専門的で難しい）．