五重積公式の ADE 一般化

—場の理論の視点から—

河合　俊哉

京都大学数理解析研究所

公開講座　2017/7/31–8/4

はじめに

- Jacobi の三重積公式

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^{n-1}u)(1-q^n u^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)} u^n$$

はじめに

- Jacobi の三重積公式

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^{n-1}u)(1-q^nu^{-1})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}u^n$$

- Watson の五重積公式

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^{n-1}u)(1-q^nu^{-1})(1-q^{2n-1}u^2)(1-q^{2n-1}u^{-2})$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{2}n(3n-1)}(u^{3n}-u^{-3n+1})$$

はじめに

The expression on the right is obviously symmetric in α and β.

THEOREMS STATED BY RAMANUJAN (VII): THEOREMS ON CONTINUED FRACTIONS

G. N. WATSON†.

In this paper I discuss the theorems numbered‡ (4)–(7) in Section IX of Ramanujan's letter of January 16, 1913; this section contains theorems on continued fractions, and (4)–(7) are the theorems concerned with continued fractions associated with q-series and modular functions.

The theorems are as follows:

(4) *If*
$$u = \frac{x}{1} + \frac{x^5}{1} + \frac{x^{10}}{1} + \frac{x^{15}}{1} + \frac{x^{20}}{1} + \ldots,$$

---

* *Werke*, 3 (1866), 130.

† Received 29 August, 1928; read 8 November, 1928.

‡ The theorems numbered (1) and (3) in Section IX have been dealt with by Mr. Preece in No. VI of this series of papers; (2) will be discussed separately later.

Journal of the London Mathematical Society (1929) **4** 39 – 48

はじめに

It is not obvious that the values of z just specified are the only zeros of $f(z)$; to prove that this is the case, we proceed to construct a function with no other zeros, and to identify it with $f(z)$.

Let

$$\boxed{\phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} [(1+q^{5n-1}/z)(1+q^{5n-4}z)(1-q^{10n-7}/z^2)(1-q^{10n-3}z^2)],}$$

and then $\phi(z)$ is expansible into a Laurent series, thus

$$\phi(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_m z^m.$$

It is easily verified from the definition of $\phi(z)$ that

$$\phi(z) \equiv -q^8 z^3 \phi(zq^5),$$

and hence that $\lambda_{m+3} = -q^{5m+8}\lambda_m$. It follows at once that $\phi(z)$ is expressible in the form

はじめに

by reversing the order of the terms in the first series on the right. Since the product on the left is obviously equal to unity, we deduce the value of λ_0 at once from Euler's identity, and consequently we have

$$\phi(z).\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{5m}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-)^m q^{\frac{1}{2}m(15m+1)} z^{3m} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-)^m q^{\frac{1}{2}(5m-2)(3m-1)} z^{1-3m}.$$

We now perceive that

$$\begin{aligned} J_1 = \phi(1) &= \prod_{n=1}^{\infty}\left[(1+q^{5n-1})(1+q^{5n-4})(1-q^{10n-7})(1-q^{10n-3})\right] \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(1-q^{10n-8})(1-q^{10n-2})}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})}(1-q^{10n-7})(1-q^{10n-3})\right] \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(1-q^{5n-3})(1-q^{5n-2})}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})}\right], \end{aligned}$$

since numbers of the forms $10n-8$, $10n-2$, $10n-7$, $10n-3$ are equivalent to numbers of the forms $5n-3$, $5n-2$; and the last expression is equal to $1/F(q)$.

はじめに

単純で良い数学的対象はしばしば **ADE** 分類されることがある.

- 単純 Lie 代数 で，その Dynkin 図が一本線のみのもの

$$A_n \ (n \geq 1), D_n \ (n \geq 4), E_6, E_7, E_8$$

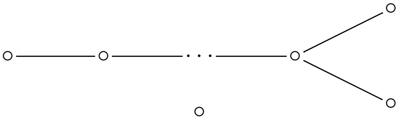
- $SU(2)$ の有限部分群
- 単純特異点

など

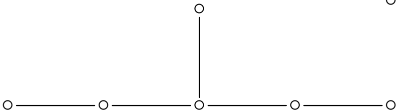
ADE Dynkin 図

A_n $(n \geq 1)$

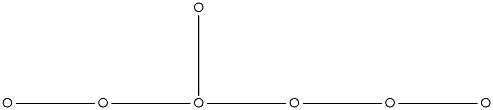
D_n $(n \geq 4)$



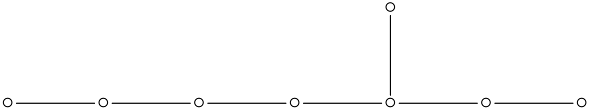
E_6



E_7



E_8

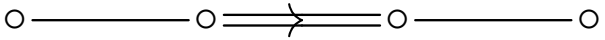


BCFG Dynkin 図

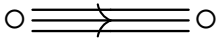
B_n $(n \geq 3)$

C_n $(n \geq 2)$

F_4



G_2



本講の目標

二次元 $\mathcal{N}=2$ 超共形場理論で基本的な役割を果たす楕円種数と呼ばれる量を考えると，五重積公式の ADE 一般化が得られることを説明する．

注：五重積公式は A_2 の場合

ボソン

Hilbert 空間 $\mathcal{H}_B$ の内積 (,) に対する正規直交基底 $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad (i, j \geq 0)$$

が与えられたとき，**消滅演算子** a，**生成演算子** a^* を

$$\begin{aligned} a(e_0) &= 0 \\ a(e_n) &= \sqrt{n}\, e_{n-1}, \qquad (n \geq 1) \\ a^*(e_n) &= \sqrt{n+1}\, e_{n+1} \qquad (n \geq 0) \end{aligned}$$

で導入する．（a^* は a の共役である．）

- 交換関係 ($[X, Y] := XY - YX$)

$$[a, a^*] = I$$

- ボソンの数演算子

$$N_B = a^* a$$

$$[N_B, a^*] = a^*$$

$$[N_B, a] = -a$$

- ボソンが n 個ある状態

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^*)^n (e_0), \qquad (n \geq 0)$$

$$N_B e_n = n e_n$$

- Hamiltonian

$$H_B = N_B$$

- 分配関数

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B}\, q^{H_B} &= 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots \\ &= \frac{1}{1-q}\end{aligned}$$

フェルミオン

2 次元複素ユークリッド空間 $\mathcal{H}_F$ の内積 (,) に対する正規直交基底 f_0, f_1

$$(f_i, f_j) = \delta_{ij}, \quad (i, j = 0, 1)$$

が与えられたとき，**消滅演算子** b，**生成演算子** b^* を

$$\begin{aligned} b(f_0) &= 0, & b(f_1) &= f_0 \\ b^*(f_0) &= f_1, & b^*(f_1) &= 0 \end{aligned}$$

で導入する．

- 反交換関係 ($\{X, Y\} := XY + YX$)

$$\{b, b^*\} = I, \qquad \{b, b\} = \{b^*, b^*\} = 0$$

- フェルミオンの数演算子

$$N_F = b^* b$$

$$[N_F, b^*] = b^*$$

$$[N_F, b] = -b$$

- Hamiltonian

$$H_F = N_F$$

- 分配関数

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_F}\, q^{H_F} = 1 + q$$

-

$$\Gamma(f_0) = f_0, \qquad \Gamma(f_1) = -f_1, \qquad \Gamma^2 = I$$

- 分配関数

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_F}\, \Gamma q^{H_F} = 1 - q$$

超対称性

ボソンとフェルミオンの系を考える.

- Hamiltonian

$$H = H_B \otimes I + I \otimes H_F$$

注 普通は単に $H = H_B + H_F$ と書く. $I \otimes \Gamma$ も単に Γ と書く.

- Witten 指数

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_F} \Gamma q^H = \frac{1-q}{1-q} = 1$$

超対称性

ボソンとフェルミオンの系を考える.

- Hamiltonian

$$H = H_B \otimes I + I \otimes H_F$$

注 普通は単に $H = H_B + H_F$ と書く. $I \otimes \Gamma$ も単に Γ と書く.

- Witten 指数

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_F} \Gamma q^H = \frac{1-q}{1-q} = 1$$

q に依らない!

超対称性

このような相殺の背景には**超対称性**の存在がある.

- 超対称電荷

$$Q = ab^* + a^* b$$

- 超対称性の成す代数

$$\Gamma^2 = I, \qquad \{\Gamma, Q\} = 0, \qquad Q^2 = H$$

超対称性

$$[Q, H] = 0, \qquad [\Gamma, H] = 0$$

Q, H はエルミート（自己共役）.

$$(v, H(v)) = (v, Q^2(v)) = (Q(v), Q(v)) \geq 0, \qquad {}^\forall v$$

$H(v) = Ev, v \neq 0$ ならば

$$(v, H(v)) = E(v, v) \geq 0 \Longrightarrow E \geq 0$$

超対称性

- $[H, \Gamma] = 0$ より同時対角化可能
- $E > 0$ ならば

$$H(v_+) = Ev_+, \quad \Gamma(v_+) = v_+$$

$$H(v_-) = Ev_-, \quad \Gamma(v_-) = -v_-$$

$$v_\mp = \frac{1}{\sqrt{E}} Q(v_\pm)$$

-

$$H(v) = 0 \Longrightarrow Q(v) = 0$$

-

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_F} \Gamma q^H$$

は q に依らない整数.

場の理論とは

- 空間の各点に量子力学的自由度を特殊相対論と整合性を持つように配したもの.
- 無限自由度を扱うので一般にとても難しい.

二次元共形場理論とは

- 空間 1 次元+時間 1 次元
- 共形不変性
- Virasoro 代数と言う無限次元 Lie 代数が支配
- 表現論的手法を使って解析が可能

二次元 $\mathcal{N}=2$ 共形場理論とは

- Virasoro 代数の超対称化の一種である $\mathcal{N}=2$ 超 Virasoro 代数で支配されている.
- 超弦理論のコンパクト化の観点から盛んに研究
- 複素幾何，代数幾何との関連が深い.

二次元 $\mathcal{N}=2$ 共形場理論

- 理論の自由度を特徴付ける数として**中心電荷**と呼ばれるものがあり，これを $\hat{c}$ と記す．
- 一般には $\hat{c}$ は実数だが，本講では $\hat{c}$ は正有理数と仮定する．
- ある正整数 h が定まり，少なくとも $\hat{c}h \in \mathbb{Z}$ を満たしているとする．（後述）

記法

- 上半平面

$$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$$

-

$$\mathbf{e}\left[x\right] = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$$

-

$$q = \mathbf{e}\left[\tau\right] \quad (\tau \in \mathbb{H})$$

楕円種数

二次元 $\mathcal{N}=2$ 共形場理論に関連する**楕円種数**と呼ばれる量を考える.

- これは前述の分配関数の類似物である.
- 良い関数等式をみたす.
- しばしば明示的に計算できる.

楕円種数

楕円種数 $Z(\tau, z)$ は $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ 上の正則関数で次の関数等式をみたす.

- 任意の $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$Z\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = \mathbf{e}\left[\frac{\hat{c}}{2}\frac{cz^2}{c\tau + d}\right] Z(\tau, z)$$

- 任意の $(r, s) \in (h\mathbb{Z})^2$ に対して

$$Z(\tau, z + r\tau + s) = (-1)^{\hat{c}(r+s)}\mathbf{e}\left[-\frac{\hat{c}}{2}(r^2\tau + 2rz)\right] Z(\tau, z)$$

楕円種数

- $q = \mathbf{e}[\tau]$, $y = \mathbf{e}[z]$ とおくとき，次の形の展開を持つ．

$$Z(\tau, z) = \sum_{n \geq 0} \mathfrak{z}_n(z) q^n, \qquad y^{\hat{c}/2} \mathfrak{z}_n(z) \in \mathbb{Z}[y^{1/h}, y^{-1/h}]$$

楕円種数

- $q = \mathbf{e}[\tau]$, $y = \mathbf{e}[z]$ とおくとき，次の形の展開を持つ．

$$Z(\tau, z) = \sum_{n \geq 0} \mathfrak{z}_n(z) q^n, \qquad y^{\hat{c}/2} \mathfrak{z}_n(z) \in \mathbb{Z}[y^{1/h}, y^{-1/h}]$$

注：最初の関数等式で $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$Z(\tau, -z) = Z(\tau, z)$$

よって，

$$\mathfrak{z}_n(-z) = \mathfrak{z}_n(z) \quad (n \geq 0)$$

chi-y 種数

chi-y 種数と呼ばれる量 χ_y を

$$\mathfrak{z}_0(z) = y^{-\hat{c}/2}\chi_y$$

で導入する．

- （要請）χ_y は次数 $\hat{c}h$ の $y^{1/h}$ の整数係数多項式で，次の形をしている．

$$\chi_y = 1 + \cdots + y^{\hat{c}}$$

-

$$\chi_{y^{-1}} = y^{-\hat{c}}\chi_y$$

Witten 指数

超対称性による相殺機構より，楕円種数は次の性質を有する (はず).

- $Z(\tau, 0)$ は τ に依存せず整数になる.

この整数を **Witten 指数**と言い，$\mathfrak{X}$ と記す.

即ち

$$\mathfrak{X} := Z(\tau, 0) = \chi_y|_{y=1}$$

Jacobi のテータ関数

$$\vartheta(\tau, u) = x^{-\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{n-1}x)(1 - q^n x^{-1})}{(1 - q^n)^2}, \quad (x = \mathbf{e}\left[u\right])$$

- 奇関数である．

$$\vartheta(\tau, -u) = -\vartheta(\tau, u)$$

- u の関数として見たとき，極を持たず $r\tau + s$ $((r, s) \in \mathbb{Z}^2)$ の各点で一位の零を持つ．
- $u \to 0$ のとき

$$\vartheta(\tau, u) \sim -u$$

Jacobi のテータ関数

- 任意の $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{u}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{-1}\mathbf{e}\left[\frac{1}{2}\frac{cu^2}{c\tau+d}\right]\vartheta(\tau, u)$$

- 任意の $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ に対して

$$\vartheta(\tau, u+r\tau+s) = (-1)^{r+s}\mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}(r^2\tau+2ru)\right]\vartheta(\tau, u)$$

準斉次多項式と孤立特異点

$\omega_1, \ldots, \omega_N$ を 1/2 以下の正の有理数とする．複素係数多項式 $f(x_1, \ldots, x_N)$ は

$$f(t^{\omega_1} x_1, \ldots, t^{\omega_N} x_N) = t f(x_1, \ldots, x_N), \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

をみたすとする．このとき，f は重み $(\omega_1, \ldots, \omega_N)$ の**準斉次多項式**であるという．

準斉次多項式と孤立特異点

$\omega_1, \ldots, \omega_N$ を 1/2 以下の正の有理数とする．複素係数多項式 $f(x_1, \ldots, x_N)$ は

$$f(t^{\omega_1} x_1, \ldots, t^{\omega_N} x_N) = t f(x_1, \ldots, x_N), \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

をみたすとする．このとき，f は重み $(\omega_1, \ldots, \omega_N)$ の**準斉次多項式**であるという．

$\partial_1 f = \cdots = \partial_N f = f = 0$ の唯一の解が $(x_1, \ldots, x_N) = (0, \ldots, 0)$ であると仮定する．f は原点に（のみ）**孤立特異点**を持つという．

Landau-Ginzburg 模型

このような f に対して，f を超ポテンシャルに持つ $\mathcal{N}=2$ **Landau-Girzburg** 模型と呼ばれる二次元 $\mathcal{N}=2$ 超共形場理論が存在する．

その楕円種数は

$$Z(\tau, z) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\vartheta(\tau, (1-\omega_i)z)}{\vartheta(\tau, \omega_i z)}$$

である．

Landau-Ginzburg 模型

この楕円種数は期待される関数等式をみたす.

- $$\begin{aligned}\hat{c} &= \sum_{i=1}^{N}(1-\omega_i)^2 - \sum_{i=1}^{N}\omega_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N}(1-\omega_i) - \sum_{i=1}^{N}\omega_i \\ &= \sum_{i=1}^{N}(1-2\omega_i)\end{aligned}$$

- h は $\omega_i h \in \mathbb{Z}$ なる適当な正整数.

Landau-Ginzburg 模型

- chi-y 指数

$$\chi_y = \prod_{i=1}^{N} \frac{1 - y^{1-\omega_i}}{1 - y^{\omega_i}}$$

- Witten 指数 (=特異点理論の Milnor 数)

$$\mathfrak{X} = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{\omega_i} - 1 \right)$$

ADE 特異点

$\mathfrak{g}$	rk	(h, d_1, d_2, d_3)	$f(x_1, x_2, x_3)$
A_{h-1}	$h-1$	$(h, 1, \frac{h}{2}, \frac{h}{2})$	$x_1^h + x_2^2 + x_3^2$
$\mathrm{D}_{\frac{h}{2}+1}$	$\frac{h}{2}+1$	$(h, 2, \frac{h}{2}-1, \frac{h}{2})$	$x_1^{\frac{h}{2}} + x_1 x_2^2 + x_3^2$
E_6	6	$(12, 3, 4, 6)$	$x_1^4 + x_2^3 + x_3^2$
E_7	7	$(18, 4, 6, 9)$	$x_1^3 x_2 + x_2^3 + x_3^2$
E_8	8	$(30, 6, 10, 15)$	$x_1^5 + x_2^3 + x_3^2$

- $\omega_i = d_i/h \quad (i = 1, 2, 3)$.
- rk は $\mathfrak{g}$ の階数.
- h は $\mathfrak{g}$ の Coxeter 数.

ADE LG 模型

- $$\hat{c} = 1 - \frac{2}{h} < 1$$

- $$\mathfrak{X} = \mathrm{rk}$$

- $$\chi_y = \sum_{i=1}^{\mathrm{rk}} y^{(m_i - 1)/h}$$

Coxeter 指数

$\mathfrak{g}$	m_i
A_{h-1}	$1, 2, \ldots, h-1$
$\mathrm{D}_{\frac{h}{2}+1}$	$1, 3, \ldots, h-3, h-1, \frac{h}{2}$
E_6	$1, 4, 5, 7, 8, 11$
E_7	$1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$
E_8	$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$

$$m_i + m_{\mathrm{rk}+1-i} = h$$

例：$\mathfrak{g} = A_2$

楕円種数：

$$Z(\tau, z) = y^{-\frac{1}{6}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{n-1} y^{\frac{2}{3}})(1 - q^n y^{-\frac{2}{3}})}{(1 - q^{n-1} y^{\frac{1}{3}})(1 - q^n y^{-\frac{1}{3}})}$$

右辺は

$$y^{-\frac{1}{6}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1} y^{\frac{1}{3}})(1 + q^{n-1} y^{-\frac{1}{3}})(1 - q^{2n-1} y^{\frac{2}{3}})(1 - q^{2n-1} y^{-\frac{2}{3}})$$

とも表せる．

例：$\mathfrak{g} = A_2$

ここで，五重積公式を使うと

$$Z(\tau, z) = \mathbb{I}(\tau, z) + \mathbb{I}(\tau, -z)$$

を得る．ただし，

$$\mathbb{I}(\tau, z) = \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{3}{2}(n-\frac{1}{6})^2} y^{n-\frac{1}{6}}$$

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

問　　$\mathbb{I}(\tau, \pm z)$ の意味は？

アフィン Lie 代数

$\mathfrak{g}$: 単純 Lie 代数，$(\ |\ )$: Cartan-Killing 形式

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}\kappa$$

$$[a \otimes t^n + \lambda\kappa, b \otimes t^m + \mu\kappa] = [a, b] \otimes t^{n+m} + (a\,|\,b)n\delta_{n+m,0}\kappa$$

アフィン Lie 代数

- **可積分表現**と呼ばれる良いクラスの表現がある．この表現では κ は**レベル** k と呼ばれる非負整数をとり，k で決まる有限個の種類がある．
- アフィン Lie 代数とその可積分表現に対して**菅原構成**と呼ばれる Virasoro 代数とその表現を作る手段がある．
- アフィン Lie 代数のレベル k の可積分表現はレベル k の **Wess-Zumino-Witten 模型**と呼ばれる共形場理論に対応する．

テータ関数

$$\theta_{m,n}(\tau, u) = \sum_{j \in \mathbb{Z} + \frac{m}{2n}} \mathbf{e}\left[n(j^2\tau + ju)\right]$$

積公式

$$\begin{aligned}
&\theta_{m,n}(\tau, u)\theta_{m',n'}(\tau, u') \\
&\qquad = \sum_{j \in \mathbb{Z}_{n+n'}} \theta_{mn'-m'n+2nn'j,nn'(n+n')}\left(\tau, \frac{u-u'}{n+n'}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad \times \theta_{m+m'+2nj,n+n'}\left(\tau, \frac{nu+n'u'}{n+n'}\right)
\end{aligned}$$

アフィン Lie 代数 $A_1^{(1)}$ の Weyl-Kac 指標

- $A_1^{(1)}$ のレベル $k = h - 2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の可積分表現の **Weyl-Kac 指標**

$$\chi_\ell(\tau, u) = \frac{\theta_{\ell,h}(\tau, u) - \theta_{-\ell,h}(\tau, u)}{\theta_{1,2}(\tau, u) - \theta_{-1,2}(\tau, u)} \quad (\ell = 1, 2, \ldots, h-1)$$

- 対応する Wess-Zumino-Witten 模型の Virasoro 代数の中心電荷（を 3 で割ったもの）は

$$\frac{k}{k+2} = 1 - \frac{2}{h}$$

$A_1^{(1)}$ のストリング関数

ストリング関数 $c_m^\ell(\tau)$:

- $$\chi_\ell(\tau, u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{2k}} c_m^\ell(\tau)\theta_{m,k}(\tau, u)$$

- $$c_m^\ell(\tau) = 0 \quad \text{if } \ell \equiv m \mod 2$$

- 具体形も知られている.（後述）

例：$k=1$

テータ関数の積公式と Euler の公式

$$\eta(\tau)=q^{\frac{1}{24}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}$$

を使うと

$$\chi_1(\tau,u)=\frac{\theta_{0,1}(\tau,u)}{\eta(\tau)},\qquad \chi_2(\tau,u)=\frac{\theta_{1,1}(\tau,u)}{\eta(\tau)}$$

$$c_0^1(\tau)=c_1^2(\tau)=\frac{1}{\eta(\tau)}$$

$\mathcal{N}=2$ 極小模型

$$\chi_\ell(\tau,u)\theta_{a,2}(\tau,u-z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}_{2h}}\overbrace{\chi^{\ell,a}_m(\tau,z)}^{\text{導入}}\theta_{m,h}(\tau,u-\frac{2}{h}z)\quad(a\in\mathbb{Z}_4)$$

テータ関数の積公式を使うと,

- $k>0$ のとき,

$$\chi^{\ell,a}_m(\tau,z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}c^\ell_{m-a+4j}(\tau)\,q^{\frac{h}{2k}\left(\frac{m}{h}-\frac{a}{2}+2j\right)^2}y^{\frac{m}{h}-\frac{a}{2}+2j}$$

- $k=0$ のとき,

$$\chi^{1,a}_m(\tau,z)=\delta^{\mathbb{Z}_4}_{m,a}$$

$\mathcal{N}=2$ 極小模型

$$\mathbb{I}^{\ell}_{m}(\tau,z)=\chi^{\ell,1}_{m}(\tau,z)-\chi^{\ell,-1}_{m}(\tau,z)$$

- $\mathbb{I}^{\ell}_{m}(\tau,z)=0 \quad \text{if } \ell\neq m \mod 2$
- $\mathbb{I}^{\ell}_{-m}(\tau,z)=-\mathbb{I}^{\ell}_{m}(\tau,-z)=-\mathbb{I}^{h-\ell}_{h-m}(\tau,z)$
- $$\mathbb{I}^{\ell}_{m}(\tau,0)=\delta^{\mathbb{Z}_{2h}}_{m,\ell}-\delta^{\mathbb{Z}_{2h}}_{m,-\ell}$$

$A_1^{(1)}$ WZW 模型のモジュラー不変分配関数

$A_1^{(1)}$ に付随した Wess-Zumino-Witten 模型の物理的に許容される分配関数を考える問題：

- $\mathcal{N}_{\ell,\ell'}$ $(\ell,\ell' = 1,\ldots,h-1)$ は非負整数かつ $\mathcal{N}_{1,1} = 1$.
- 分配関数

$$\sum_{\ell,\ell'=1}^{h-1} \mathcal{N}_{\ell,\ell'} \chi_\ell(\tau)\overline{\chi_{\ell'}(\tau)} \qquad (\chi_\ell(\tau) := \chi_\ell(\tau,0))$$

が

$$\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

で不変.

$A_1^{(1)}$ WZW 模型のモジュラー不変分配関数

ADE で分類される ！

$\mathfrak{g}$	$\sum_{\ell,\ell'=1}^{h-1} \mathcal{N}_{\ell,\ell'} \chi_\ell \overline{\chi_{\ell'}}$
A_{h-1}	$\sum_{\ell=1}^{h-1} \lvert\chi_\ell\rvert^2$
$\mathrm{D}_{\frac{h}{2}+1}\ (2 \nmid \frac{h}{2})$	$\sum_{i=1}^{\frac{h-2}{4}} \lvert\chi_{2i-1} + \chi_{h-(2i-1)}\rvert^2 + 2\lvert\chi_{\frac{h}{2}}\rvert^2$
$\mathrm{D}_{\frac{h}{2}+1}\ (2 \mid \frac{h}{2})$	$\sum_{i=1}^{\frac{h}{2}} \lvert\chi_{2i-1}\rvert^2 + \lvert\chi_{\frac{h}{2}}\rvert^2 + \sum_{i=1}^{\frac{h}{4}-1} (\chi_{2i}\overline{\chi_{h-2i}} + \chi_{h-2i}\overline{\chi_{2i}})$
E_6	$\lvert\chi_1 + \chi_7\rvert^2 + \lvert\chi_4 + \chi_8\rvert^2 + \lvert\chi_5 + \chi_{11}\rvert^2$
E_7	$\lvert\chi_1 + \chi_{17}\rvert^2 + \lvert\chi_5 + \chi_{13}\rvert^2 + \lvert\chi_7 + \chi_{11}\rvert^2$
	$+\lvert\chi_9\rvert^2 + (\chi_3 + \chi_{15})\overline{\chi_9} + \chi_9\overline{(\chi_3 + \chi_{15})}$
E_8	$\lvert\chi_1 + \chi_{11} + \chi_{19} + \chi_{29}\rvert^2 + \lvert\chi_7 + \chi_{13} + \chi_{17} + \chi_{23}\rvert^2$

(Cappelli-Itzykson-Zuber, Kato)

$A_1^{(1)}$ WZW 模型のモジュラー不変分配関数

- h は $\mathfrak{g}$ の Coxeter 数.
- $\mathscr{N}_{\ell,\ell}$ は ℓ が Coxeter 指数である重複度.
- $\mathscr{N}_{h-\ell,h-\ell'} = \mathscr{N}_{\ell,\ell'}$.

$\mathcal{N} = 2$ 極小模型

楕円種数は

$$Z(\tau, z) = \sum_{\ell,\ell'=1}^{h-1} \mathcal{N}_{\ell,\ell'} \, \mathbb{I}_{\ell'}^{\ell}(\tau, z)$$

で与えられる.

例　$\mathfrak{g} = A_2$

$$Z(\tau, z) = \mathbb{I}_1^1(\tau, z) + \mathbb{I}_2^2(\tau, z)$$

$$\mathbb{I}_1^1(\tau, z) = \mathbb{I}(z), \qquad \mathbb{I}_2^2(\tau, z) = \mathbb{I}(-z)$$

LG 模型と極小模型の楕円種数が一致 $\Leftrightarrow$ 五重積公式

自然な問

同じ $\mathbf{ADE}$ 型の $\mathbf{LG}$ 模型と極小模型の楕円種数は一致するか？

自然な問

同じ **ADE** 型の **LG** 模型と極小模型の楕円種数は一致するか？

YES!

Atkin and Swinnerton-Dyer の補題

$q \in \mathbb{C},\ 0 < |q| < 1$ に対し

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{C} \mid |q| < |x| \leq 1\}$$

とおく．$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上の有理関数 $\mathcal{F}(x)$ が

$$\mathcal{F}(qx) = Kx^{-n}\mathcal{F}(x) \quad (K \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z})$$

を満たすならば

$$\#\{\mathcal{F} \text{ の } \mathcal{A} \text{ 上の零点}\} - \#\{\mathcal{F} \text{ の } \mathcal{A} \text{ 上の極}\} = n$$

あるいは恒等的に $\mathcal{F}(x) = 0$.

Atkin and Swinnerton-Dyer の補題

$\because$　偏角の原理より，$\epsilon > 0$ を十分小さく取れば

$$
\begin{aligned}
&\#\{\mathcal{F}\text{ の }\mathcal{A}\text{ 上の零点}\} - \#\{\mathcal{F}\text{ の }\mathcal{A}\text{ 上の極}\} \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\oint_{|x|=1+\epsilon} - \oint_{|x|=|q|(1+\epsilon)}\right]\frac{\mathcal{F}'(x)}{\mathcal{F}(x)}\,dx \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{|x|=1}\frac{n}{x}\,dx = n
\end{aligned}
$$

楕円種数の零点

楕円種数 $Z(\tau, z)$ は z の関数と見たときに

$$\mathcal{P} = \{\alpha\tau + \beta \mid 0 \leq \alpha, \beta < h\}$$

内で丁度 $\hat{c}h^2$ 個の零点を持つか，あるいは恒等的に $Z(\tau, z) = 0$ である.

$\because \quad y = x^h$ とし，$\mathcal{F}(x) = Z(\tau, z)$ とおけば,

$$\mathcal{F}(qx) = (-1)^{\hat{c}h} q^{-\hat{c}h^2/2} x^{-\hat{c}h^2} \mathcal{F}(x)$$

楕円種数の一致

同じ関数等式を満たす 2 つの楕円種数は z の関数とみたときに $\mathcal{P}$ 内の $\hat{c}h^2 + 1$ 個以上の点で一致すれば恒等的に等しい.

捩れ楕円種数

$\mathcal{D}$ を $\hat{c}h \equiv \mathcal{D}h \mod 2$ となる整数とする.

$$Z_{(r,s)}(\tau, z) := (-1)^{\mathcal{D}(r+s+rs)}\mathbf{e}\left[\frac{\hat{c}}{2}(r^2\tau + 2rz + rs)\right]Z(\tau, z{+}r\tau{+}s)$$

$$(r, s) \in (\mathbb{Z}_h)^2$$

捩れ Witten 指数

$$\mathfrak{X}_{(r,s)} := Z_{(r,s)}(\tau, 0)$$

超対称性により，これも τ に依らない整数になる．
さらに，一般に

$$\mathfrak{X}_{(r,s)} = \sum_{d|h} u_d (\Delta_d)_{(r,s)}, \quad u_d \in \mathbb{Z}$$

$$(\Delta_d)_{(r,s)} = \begin{cases} d & \text{if } d \mid r \text{ and } d \mid s, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

の形に表せることが示せる．

LG 模型の場合

$$\mathfrak{X}_{(r,s)} = (-1)^N \prod_{i \in \mathcal{S}_{(r,s)}} \left(1 - \frac{1}{\omega_i}\right)$$

$$\mathcal{S}_{(r,s)} = \{i \in \{1, \ldots, N\} \mid r\omega_i \in \mathbb{Z} \text{ and } s\omega_i \in \mathbb{Z}\}$$

$$u_1 = (-1)^N, \quad u_d = \frac{1}{d} \sum_{\mathrm{lcm}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_\ell}) = d} \frac{(-1)^{N-\ell}}{\omega_{i_1} \cdots \omega_{i_\ell}} \quad (d > 1)$$

（a_i は ω_i を既約分数で表したときの分母の正整数）

楕円種数一致の証明

- 同じ ADE 型の LG 模型と極小模型の捩れ Witten 指数は一致する.

$\mathfrak{g}$	$\sum_{d\mid h} u_d \Delta_d$
A_{h-1}	$\Delta_h - \Delta_1$
$\mathrm{D}_{\frac{h}{2}+1}$	$\Delta_h - \Delta_{\frac{h}{2}} + \Delta_2 - \Delta_1$
E_6	$\Delta_{12} - \Delta_6 - \Delta_4 + \Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1$
E_7	$\Delta_{18} - \Delta_9 - \Delta_6 + \Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1$
E_8	$\Delta_{30} - \Delta_{15} - \Delta_{10} - \Delta_6 + \Delta_5 + \Delta_3 + \Delta_2 - \Delta_1$

$$\mathscr{N}_{\ell,\ell'} = \sum_{d|h} u_d (\Omega_d)_{\ell,\ell'}$$

$$(\Omega_d)_{\ell,\ell'} = \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{h}{d} \mid \frac{\ell+\ell'}{2} \text{ and } d \mid \frac{\ell-\ell'}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 同じ ADE 型の LG 模型と極小模型の楕円種数は
$$\mathcal{L} := \{r\tau + s \mid (r, s) \in (\mathbb{Z}_h)^2\} \subset \mathcal{P}$$
で同じ値を持つ.
-
$$\#\mathcal{L} = h^2 > \hat{c}h^2$$

q 解析の記法

- q-Pochhammer 記号

$$(x;q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty}(1-xq^n), \qquad (q)_\infty = (q;q)_\infty \quad (|q|<1)$$

- テータ関数

$$\theta(x,q) = \frac{(x;q)_\infty (q/x;q)_\infty}{(q)_\infty^2} \quad (x \neq 0)$$

- 三重積公式

$$(x;q)_\infty(q/x;q)_\infty(q;q)_\infty = (q)_\infty^3\theta(x,q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\binom{n}{2}}x^n$$

ただし，$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

- 関数等式

$$\theta(q/x,q) = \theta(x,q)$$
$$\theta(x^{-1},q) = -x^{-1}\theta(x,q)$$
$$\theta(q^i x,q) = (-1)^i q^{-\binom{i}{2}}x^{-i}\theta(x,q) \quad (i\in\mathbb{Z})$$

Kroneckerの公式

- $0<|q|<|x|<1$ かつ y は q の整数べきでないとすると,
$$\sum_{r\in\mathbb{Z}} \frac{x^r}{1-q^r y} = \frac{\theta(xy,q)}{\theta(x,q)\theta(y,q)}$$

- $0<|q|<|x|<1$ かつ $|q|<|y|<1$ のとき,
$$\left(\sum_{r,s\geq 0} - \sum_{r,s<0}\right) q^{rs}x^r y^s = \frac{\theta(xy,q)}{\theta(x,q)\theta(y,q)}$$

Kac-Peterson の公式

$$c^{\ell}_{m}(\tau) = \frac{q^{d_{\ell,m}}}{(q)^3_\infty} \left(\sum_{r,s\geq 0} - \sum_{r,s<0} \right) (-1)^{r+s} q^{\binom{r+s+1}{2} + krs + \frac{\ell-1+m}{2} r + \frac{\ell-1-m}{2} s}$$

$$d_{\ell,m} = \frac{\ell^2}{4h} - \frac{m^2}{4k} - \frac{1}{8}$$

簡便な表式

$\ell \equiv m \mod 2$ に対して

$$\mathbb{I}^{\ell}_{m}(\tau, z) = q^{\frac{\ell^2 - m^2}{4h}} y^{\frac{m-1}{h} - \frac{\hat{c}}{2}} \frac{\theta(y, q)\theta(q^{\ell}, q^{h})}{\theta(q^{\frac{\ell+m}{2}} y^{-1}, q^{h})\theta(q^{\frac{\ell-m}{2}} y, q^{h})}$$

簡便な表式

$\ell \equiv m \mod 2$ に対して

$$\mathbb{I}^{\ell}_{m}(\tau, z) = q^{\frac{\ell^2 - m^2}{4h}} \, y^{\frac{m-1}{h} - \frac{\hat{c}}{2}} \, \frac{\theta(y, q)\theta(q^{\ell}, q^{h})}{\theta(q^{\frac{\ell+m}{2}} y^{-1}, q^{h})\theta(q^{\frac{\ell-m}{2}} y, q^{h})}$$

簡便な表式

$\ell \equiv m \mod 2$ に対して

$$\mathbb{I}^{\ell}_{m}(\tau, z) = q^{\frac{\ell^2 - m^2}{4h}} y^{\frac{m-1}{h} - \frac{\hat{c}}{2}} \frac{\theta(y, q)\theta(q^{\ell}, q^{h})}{\theta(q^{\frac{\ell+m}{2}} y^{-1}, q^{h})\theta(q^{\frac{\ell-m}{2}} y, q^{h})}$$

注　これより，$\mathcal{N} = 2$ 極小模型の chi-y 種数も

$$\chi_y = \sum_{i=1}^{\mathrm{rk}} y^{(m_i - 1)/h}$$

であることが分かる．

五重積公式の ADE 一般化

定理　各 $\mathfrak{g} = \mathrm{A}_\bullet, \mathrm{D}_\bullet, \mathrm{E}_\bullet$ に対して

$$\prod_{i=1}^{3} \frac{\theta(x^{h-d_i}, q)}{\theta(x^{d_i}, q)} = \sum_{\ell,\ell'=1}^{h-1} \mathscr{N}_{\ell,\ell'}\, \mathbb{J}^{\ell}_{\ell'}(x, q)$$

が成り立つ．ここに

$$\mathbb{J}^{\ell}_{\ell'}(x, q) = q^{\frac{\ell^2-\ell'^2}{4h}} x^{\ell'-1} \frac{\theta(x^h, q)\theta(q^\ell, q^h)}{\theta(q^{\frac{\ell+\ell'}{2}} x^{-h}, q^h)\theta(q^{\frac{\ell-\ell'}{2}} x^h, q^h)}.$$

である．

$\mathfrak{g} = A_{h-1}$ の場合

定理は

$$\frac{\theta(x^{h-1}, q)}{\theta(x, q)} = \sum_{\ell=1}^{h-1} x^{\ell-1} \frac{\theta(x^h, q)\theta(q^\ell, q^h)}{\theta(q^\ell x^{-h}, q^h)\theta(x^h, q^h)}$$

を意味する.

別証

$\theta(q^h, q^h) = 0$ に注意すると，右辺は

$$\begin{aligned}
&\theta(x^h, q) \sum_{\ell=1}^{h} x^{\ell-1} \frac{\theta(q^\ell, q^h)}{\theta(q^\ell x^{-h}, q^h)\theta(x^h, q^h)} \\
&= \theta(x^h, q) \sum_{\ell=1}^{h} x^{\ell-1} \sum_{r\in\mathbb{Z}} \frac{(q^\ell x^{-h})^r}{1 - q^{hr} x^h} \\
&= \theta(x^h, q) \sum_{r\in\mathbb{Z}} \frac{(q/x^h)^r}{1 - q^r x}.
\end{aligned}$$

一方，左辺は

$$\frac{\theta(x^{h-1},q)}{\theta(x,q)} = \theta(x^h,q)\frac{\theta(q/x^{h-1},q)}{\theta(q/x^h,q)\theta(x,q)} = \theta(x^h,q)\sum_{r\in\mathbb{Z}}\frac{(q/x^h)^r}{1-q^r x}$$