

五重積公式の ADE 一般化

—場の理論の視点から—

河合俊哉

1 初めに

二次元量子場の理論、特に共形場理論は無限自由度の量子論を取り扱う物理として取り扱いやすく、研究が大きく進んでいる分野の一つです。二次元共形場理論においては、分配関数等の物理量を明示的に求めることがしばしば可能で、これらを通して既知ないし未知の非自明な恒等式に遭遇する機会が少なくありません。例えば Jacobi の三重積公式

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^{n-1}u)(1 - q^n u^{-1}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)} u^n \quad (1.1)$$

がボゾン・フェルミオン対応と呼ばれる事象に関係していることは有名です。

さて、Jacobi の三重積公式に似た Watson の五重積公式と呼ばれる次の古典的な公式が知られています。

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^{n-1}u)(1 - q^n u^{-1})(1 - q^{2n-1}u^2)(1 - q^{2n-1}u^{-2}) \\ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}n(3n-1)} (u^{3n} - u^{-3n+1}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

この公式は何度も再発見された歴史があり、多くの異なる証明法があるようです¹。この講義では、五重積公式とその自然な拡張が、二次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論と呼ばれる共形場理論の研究から登場する様子を紹介したいと思います。

以下では複素上半平面 $\{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau > 0\}$ を \mathbb{H} 、整数上の二次の特殊線形群を $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ と書きます。また、虚数単位を $\sqrt{-1}$ とし、 $\mathbf{e}[x] = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$ という記法を使います。正の整数 n に対して $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とおきます。 \mathbb{Z}_n 上の Kronecker 記号を $\delta_{a,b}^{\mathbb{Z}_n}$ と記します。すなわち、 a, b を \mathbb{Z}_n の代表元としたとき $a \equiv b \pmod{n}$ ならば $\delta_{a,b}^{\mathbb{Z}_n} = 1$ 、それ以外なら $\delta_{a,b}^{\mathbb{Z}_n} = 0$ とします。

¹S. Cooper, The quintuple product identity, *Int. J. Number Theory* **2** 115 (2006).

2 二次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論

二次元共形場理論とは二次元量子場の理論の一種で共形不変性と呼ばれる特殊な対称性を有するものです。質量を持たない自由ボゾン場や自由フェルミオン場の理論は最も簡単な例と言えます。二次元共形場理論の研究が過去数十年において大きく進展した背景には共形不変性が二次元においては Virasoro 代数と呼ばれる無限次元 Lie 代数で記述されることの認識があります。Virasoro 代数を前面に出してその表現論的視点から物理量を捉えることが可能になったのです。

ところで、これも過去数十年において盛んに研究されてきた概念ですが、超対称性というものがあります。超対称性を標語的に言えばボゾンとフェルミオンの入れ替えに対する対称性です。何か場の理論が与えられたとき、これを超対称性を持つように拡張するということがよく行われます。二次元共形場理論を超対称化した二次元超共形場理論は Virasoro 代数に代わってその超対称化である超 Virasoro 代数が支配することになります。超 Virasoro 代数には幾つかの種類があり、特に $\mathcal{N} = 2$ 超 Virasoro 代数と称されるものに対する二次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論は複素(代数)幾何との関わりが深いことから超弦理論(のコンパクト化)への応用を目的として、多くの研究がなされてきました。

3 楕円種数

これから述べることの物理的背景にあるのは上に述べた二次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論です。しかしながら、本講はこの理論を基礎から解説することを意図するものではありません。また、限られた時間ではそれは不可能でしょう。そこで、全くもって天下一の恐縮ですが、二次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論に対する楕円種数と称される量及びその期待される性質から始めることにします。

以下では二次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論の中でも比較的性質の良いものしか考慮しません。(曖昧な言い方をすれば、スペクトルの離散性がある場合のみ考慮していることになります。) そのようなクラスの理論に対しては楕円種数 $Z(\tau, z)$ が $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ 上の正則関数として定まり、次の関数等式をみたすことが期待されます。

$$Z\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}\right) = e\left[\frac{\hat{c}}{2} \frac{cz^2}{c\tau + d}\right] Z(\tau, z), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad (3.1)$$

$$Z(\tau, z + r\tau + s) = (-1)^{\hat{c}(r+s)} e\left[-\frac{\hat{c}}{2}(r^2\tau + 2rz)\right] Z(\tau, z), \quad \forall (r, s) \in (h\mathbb{Z})^2. \quad (3.2)$$

ここで、 \hat{c} は中心電荷(正確に言うと中心電荷を3で割ったもの)と呼ばれる理論の自由度を特徴付ける正の有理数であり、 h は $\hat{c}h$ が整数となる(多くの場合最小の)正の整数です。

楕円種数を二次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論の立場から正確に定義していないので余り意味がないかもしれませんが、この関数等式の背景に関してコメントします。(3.1) は(ここでは述べていない)楕円種数の定義に対して、それが $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用でおおよそ元に戻ることを表し、また(3.2) は $\mathcal{N} = 2$ 超 Virasoro 代数に一般に付随するスペクトラルフローという概念を具現化したものです。

また、 $q = e[\tau]$ 、 $y = e[z]$ としたとき、楕円種数は

$$Z(\tau, z) = \sum_{n \geq 0} \mathfrak{Z}_n(z) q^n \quad (3.3)$$

なる展開を持つものとします。ここで、 $y^{\hat{c}/2} \mathfrak{Z}_n(z)$ は $y^{1/h}$ の整数係数 Laurent 多項式であるとして、整数係数であることを要請する理由は楕円種数が符号付きで(離散)状態を数える生成関数であることに由来します。展開(3.3)は(3.1)および(3.2)と整合性を持つことを確かめることができます。

関数等式(3.1)で $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ とすると、楕円種数は

$$Z(\tau, -z) = Z(\tau, z) \quad (3.4)$$

なる対称性をみやすことが分かります。これより、

$$\mathfrak{Z}_n(-z) = \mathfrak{Z}_n(z), \quad (n \geq 0) \quad (3.5)$$

であることは明らかです。今、通称 chi-y 種数と呼ばれる量 χ_y を

$$\mathfrak{Z}_0(z) = y^{-\hat{c}/2} \chi_y \quad (3.6)$$

により、導入します。(ここでは詳説できない)二次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論の議論から、 χ_y は定数項1、次数 $\hat{c}h$ の $y^{1/h}$ のモニックな整数係数多項式になることが期待されています。つまり、 χ_y は

$$\chi_y = 1 + \cdots + y^{\hat{c}} \quad (3.7)$$

という形をしています。(3.5)より

$$\chi_{y^{-1}} = y^{-\hat{c}} \chi_y \quad (3.8)$$

という性質が導かれます。

ここで、超対称性の存在による相殺機構の帰結として楕円種数は次の著しい性質を有することを述べておく必要があります。すなわち、楕円種数で $z = 0$ とおいた $Z(\tau, 0)$ は τ に依存せず整数になることです。この整数は Witten 指数と呼ばれており、以下では \mathfrak{X} と記すことにします。つまり、

$$\mathfrak{X} = Z(\tau, 0) = \chi_y|_{y=1} \quad (3.9)$$

という関係が成り立ちます。

これまでに列挙してきた楕円種数の性質は二次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論の具体例から検証することが出来ます。例えば Calabi-Yau 多様体を標的空間とする $\mathcal{N} = 2$ 非線形シグマ模型と呼ばれる場合には、 \hat{c} は Calabi-Yau 多様体の複素次元で $h = 1$ となり、 χ_y は Hirzebruch による幾何学的な意味での chi-y 種数と本質的に一致します。また Witten 種数は Calabi-Yau 多様体の Euler 標数と一致します。物理と関係なさそうな楕円種数という名称は、このような例を念頭においている結果と言えるでしょう。

最後に、 \hat{c} が正の偶数、 $h = 1$ のとき、楕円種数は Eichler-Zagier が The Theory of Jacobi Forms で言うところの重み 0、指数 $\hat{c}/2$ の弱 Jacobi 形式になることを注意しておきます。

4 特異点理論と $\mathcal{N} = 2$ Landau-Ginzburg 模型

$\omega_1, \dots, \omega_N$ を $1/2$ 以下の正の有理数とします。複素係数多項式 $f(x_1, \dots, x_N)$ を重み $(\omega_1, \dots, \omega_N)$ の準斉次多項式とします。即ち、

$$f(t^{\omega_1} x_1, \dots, t^{\omega_N} x_N) = t f(x_1, \dots, x_N), \quad \forall t \in \mathbb{C} \quad (4.1)$$

が成り立つものとします。これより、原点は f の零点ですが、さらに f は原点に孤立特異点をもつものとします。即ち、 $\partial_1 f = \dots = \partial_N f = 0$ の唯一の解が $(x_1, \dots, x_N) = (0, \dots, 0)$ であるとします。このとき、 f を超ポテンシャルとする $\mathcal{N} = 2$ Landau-Ginzburg 模型と呼ばれる理論があり、その楕円種数は

$$Z(\tau, z) = \prod_{i=1}^N \frac{\vartheta(\tau, (1 - \omega_i)z)}{\vartheta(\tau, \omega_i z)} \quad (4.2)$$

で与えられることが知られています。ここで、 $\vartheta(\tau, u)$ は

$$\vartheta(\tau, u) = x^{-\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{n-1}x)(1 - q^n x^{-1})}{(1 - q^n)^2}, \quad (x = \mathbf{e}[u]) \quad (4.3)$$

で定義される(規格化された)テータ関数です。 u の関数として見たとき、 $\vartheta(\tau, u)$ は極を持たず $r\tau + s$ ($(r, s) \in \mathbb{Z}^2$) の各点で一位の零を持ちます。(4.2) の分母の零点は分子の零点でもありますので、特異点は除去可能です。関数等式

$$\vartheta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{u}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{-1} \mathbf{e}\left[\frac{1}{2} \frac{cu^2}{c\tau + d}\right] \vartheta(\tau, u), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad (4.4)$$

$$\vartheta(\tau, u + r\tau + s) = (-1)^{r+s} \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}(r^2\tau + 2ru)\right] \vartheta(\tau, u), \quad \forall (r, s) \in \mathbb{Z}^2 \quad (4.5)$$

を使い、 h を適宜えらぶことにより、楕円種数は前節で述べた性質をみたすことが確認できます。このとき、

$$\hat{c} = \sum_{i=1}^N (1 - 2\omega_i) \quad (4.6)$$

であることが分かります。仮定より、 \hat{c} は非負の有理数であることに注意します。chi-y種数は容易に求まり、

$$\chi_y = \prod_{i=1}^N \frac{1 - y^{1-\omega_i}}{1 - y^{\omega_i}} \quad (4.7)$$

で与えられます。また、Witten 指数は

$$\mathfrak{X} = \prod_{i=1}^N \left(\frac{1}{\omega_i} - 1 \right) \quad (4.8)$$

となります。これは、特異点理論で Milnor 数と呼ばれているものの公式と一致し、正の整数になります。

さて、本講で考えたいのは $N = 3$ で $\hat{c} < 1$ の場合です。このとき、 $f(x_1, x_2, x_3)$ として許されるのは本質的に次の形に分類されることが知られています。特異点理論の単純特異点の ADE 分類と呼ばれるものです。

\mathfrak{g}	rk	(h, d_1, d_2, d_3)	$f(x_1, x_2, x_3)$
A_{h-1}	$h - 1$	$(h, 1, \frac{h}{2}, \frac{h}{2})$	$x_1^h + x_2^2 + x_3^2$
$D_{\frac{h}{2}+1}$	$\frac{h}{2} + 1$	$(h, 2, \frac{h}{2} - 1, \frac{h}{2})$	$x_1^{\frac{h}{2}} + x_1 x_2^2 + x_3^2$
E_6	6	(12, 3, 4, 6)	$x_1^4 + x_2^3 + x_3^2$
E_7	7	(18, 4, 6, 9)	$x_1^3 x_2 + x_2^3 + x_3^2$
E_8	8	(30, 6, 10, 15)	$x_1^5 + x_2^3 + x_3^2$

ここで、 \mathfrak{g} は simply-laced な²単純 Lie 代数を表し、rk は \mathfrak{g} の階数です。また、 h は \mathfrak{g} の Coxeter 数と呼ばれ、A 型に対しては 2 以上の整数、D 型に対しては 6 以上の偶数です。

整数 d_1, d_2, d_3 は $\omega_1 = d_1/h, \omega_2 = d_2/h, \omega_3 = d_3/h$ となるように選んであります。個々に計算してみると

$$\hat{c} = 1 - \frac{2}{h} \quad (4.10)$$

となることが分かり、確かにこれは $\hat{c} < 1$ を満たしています。また、Witten 指数を (4.8) より求めると $\mathfrak{X} = \text{rk}$ であることが分かります。

²Dynkin 図に一重線しか現れないもの

さらに興味深いことに、(4.7) を使って χ - y 種数の展開式を計算してみると、

$$\chi_y = \sum_{i=1}^{\text{rk}} y^{(m_i-1)/h} \quad (4.11)$$

となることが見出されます。ここで、 m_i ($i = 1, \dots, \ell$) は次の表に与えられる \mathfrak{g} の Coxeter 指数と呼ばれる整数です。

\mathfrak{g}	m_i	
A_{h-1}	$1, 2, \dots, h-1$	
$D_{\frac{h}{2}+1}$	$1, 3, \dots, h-3, h-1, \frac{h}{2}$	
E_6	$1, 4, 5, 7, 8, 11$	
E_7	$1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$	
E_8	$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$	

最も簡単なケースは $\mathfrak{g} = A_1$ のときですが、 $Z(\tau, z) = 1$ となり、面白くありません。最初の非自明な例は $\mathfrak{g} = A_2$ のときです。この場合

$$Z(\tau, z) = y^{-\frac{1}{6}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{n-1}y^{\frac{2}{3}})(1 - q^n y^{-\frac{2}{3}})}{(1 - q^{n-1}y^{\frac{1}{3}})(1 - q^n y^{-\frac{1}{3}})} \quad (4.13)$$

となりますが、少し考えると

$$Z(\tau, z) = y^{-\frac{1}{6}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1}y^{\frac{1}{3}})(1 + q^{n-1}y^{-\frac{1}{3}})(1 - q^{2n-1}y^{\frac{2}{3}})(1 - q^{2n-1}y^{-\frac{2}{3}}) \quad (4.14)$$

とも書けることが分かります。ここで Watson の五重積公式を適用すると

$$Z(\tau, z) = \mathbb{I}(\tau, z) + \mathbb{I}(\tau, -z) \quad (4.15)$$

を得ます。ただし、

$$\mathbb{I}(\tau, z) = \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{3}{2}(n-\frac{1}{6})^2} y^{n-\frac{1}{6}} \quad (4.16)$$

であり、Dedekind のエータ関数を

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad (4.17)$$

により、導入しました。

ここに現れた $\mathbb{I}(\tau, \pm z)$ は一体どういう意味があるのでしょうか？ それを理解して (4.15) を他の \mathfrak{g} の場合に拡張できれば五重積公式の ADE 一般化が出来そうです。

5 $\mathcal{N} = 2$ 極小模型

この期待を実行に移すためには $\hat{c} < 1$ の $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論の異なる実現である $\mathcal{N} = 2$ 極小模型と呼ばれるものを知る必要があります。この模型は、今から見るように、楕円種数を計算するという観点からは Landau-Ginzburg 模型より複雑なのですが、模型自身はより早くから研究されていたものです。

先ず準備として最も簡単なアフィン Lie 代数である $A_1^{(1)}$ の可積分表現に対する Weyl-Kac 指標に関する事柄をまとめておきます。正の整数 n と $m \in \mathbb{Z}_{2n}$ に対してテータ関数の一種 $\theta_{m,n}(\tau, u)$ ($(\tau, u) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$) を次式で導入します。

$$\theta_{m,n}(\tau, u) = \sum_{j \in \mathbb{Z} + \frac{m}{2n}} e[n(j^2\tau + ju)]. \quad (5.1)$$

非負整数 k を固定して $h = k + 2$ とおきます。 $A_1^{(1)}$ のレベル k の可積分表現は $\ell \in \{1, 2, \dots, h-1\}$ なる整数で分類され、その各々に対し Weyl-Kac 指標

$$\chi_\ell(\tau, u) = \frac{\theta_{\ell,h}(\tau, u) - \theta_{-\ell,h}(\tau, u)}{\theta_{1,2}(\tau, u) - \theta_{-1,2}(\tau, u)} \quad (5.2)$$

を考えることができます。ストリング関数と呼ばれる関数 $c_m^\ell(\tau)$ があり、Weyl-Kac 指標と

$$\chi_\ell(\tau, u) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{2k}} c_m^\ell(\tau) \theta_{m,k}(\tau, u) \quad (5.3)$$

で関係付けられています。 ℓ と m の偶奇性が同じ時は $c_m^\ell(\tau) = 0$ となる性質があります。例えば $k = 1$ の場合、テータ関数 (5.1) の積公式と Euler の公式

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)} \quad (5.4)$$

を使うと

$$\chi_1(\tau, u) = \frac{\theta_{0,1}(\tau, u)}{\eta(\tau)}, \quad \chi_2(\tau, u) = \frac{\theta_{1,1}(\tau, u)}{\eta(\tau)} \quad (5.5)$$

を示すことができます。すなわち、

$$c_0^1(\tau) = c_1^2(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)} \quad (5.6)$$

となります。一般の場合は複雑ですが、Kac-Peterson により $c_m^\ell(\tau)$ の具体形も知られています。

さて、本題の $\mathcal{N} = 2$ 極小模型ですが、中心電荷として (4.10) を持ち、その記述には指標の分規則

$$\chi_\ell(\tau, u)\theta_{a,2}(\tau, u - z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{2h}} \chi_m^{\ell,a}(\tau, z)\theta_{m,h}(\tau, u - \frac{2}{h}z) \quad (a \in \mathbb{Z}_4) \quad (5.7)$$

により定まる $\chi_m^{\ell,a}(\tau, z)$ を導入すると便利であることが知られています³。再びテータ関数の積公式と (5.3) を使うと、 $k > 0$ のとき、

$$\chi_m^{\ell,a}(\tau, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{m-a+4j}^\ell(\tau) q^{\frac{h}{2k}(\frac{m}{h} - \frac{a}{2} + 2j)^2} y^{\frac{m}{h} - \frac{a}{2} + 2j} \quad (5.8)$$

であることを示すことが出来ます。 $k = 0$ のときは $\chi_1(\tau, u) = 1$ なので、 $\chi_m^{1,a}(\tau, z) = \delta_{m,a}^{\mathbb{Z}_4}$ となります。

$\mathcal{N} = 2$ 極小模型の楕円種数を説明する準備として、

$$\mathbb{I}_m^\ell(\tau, z) = \chi_m^{\ell,1}(\tau, z) - \chi_m^{\ell,-1}(\tau, z) \quad (5.9)$$

とおきます。 ℓ と m の偶奇性が違う時は $\mathbb{I}_m^\ell(\tau, z) = 0$ となります。また、 $\mathbb{I}_{-m}^\ell(\tau, z) = -\mathbb{I}_m^\ell(\tau, -z) = -\mathbb{I}_{h-m}^{h-\ell}(\tau, z)$ なる性質があります。さらに、(5.2) および (5.7) より、容易に

$$\mathbb{I}_m^\ell(\tau, 0) = \delta_{m,\ell}^{\mathbb{Z}_{2h}} - \delta_{m,-\ell}^{\mathbb{Z}_{2h}} \quad (5.10)$$

であることが分かります。この性質は前述の楕円種数と Witten 指数の関係を想起させます。

$A_1^{(1)}$ の Weyl-Kac 指標の特殊値 $\chi_\ell(\tau, 0)$ を $\chi_\ell(\tau)$ と略記することにします。今 $\mathcal{N}_{\ell,\ell'}$ ($\ell, \ell' = 1, \dots, h-1$) を非負整数で条件 $\mathcal{N}_{1,1} = 1$ を満たし、なおかつ

$$\sum_{\ell, \ell'=1}^{h-1} \mathcal{N}_{\ell,\ell'} \chi_\ell(\tau) \overline{\chi_{\ell'}(\tau)} \quad (5.11)$$

が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ による \mathbb{H} への作用

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad (5.12)$$

の元で不変であるとし、これは $A_1^{(1)}$ に付随した Wess-Zumino-Witten 模型と呼ばれる共形場理論の物理的に許容される分配関数を考えることに対応します。Cappelli-Itzykson-Zuber、Kato による有名な結果によると $\mathcal{N}_{\ell,\ell'}$ も次の表のように ADE 分類

³Gepner による提唱

されることが知られています。

\mathfrak{g}	$\sum_{\ell, \ell'=1}^{h-1} \mathcal{N}_{\ell, \ell'} \chi_{\ell} \overline{\chi_{\ell'}}$
A_{h-1}	$\sum_{\ell=1}^{h-1} \chi_{\ell} ^2$
$D_{\frac{h}{2}+1} (2 \mid \frac{h}{2})$	$\sum_{i=1}^{\frac{h-2}{4}} \chi_{2i-1} + \chi_{h-(2i-1)} ^2 + 2 \chi_{\frac{h}{2}} ^2$
$D_{\frac{h}{2}+1} (2 \nmid \frac{h}{2})$	$\sum_{i=1}^{\frac{h}{2}} \chi_{2i-1} ^2 + \chi_{\frac{h}{2}} ^2 + \sum_{i=1}^{\frac{h}{4}-1} (\chi_{2i} \overline{\chi_{h-2i}} + \chi_{h-2i} \overline{\chi_{2i}})$
E_6	$ \chi_1 + \chi_7 ^2 + \chi_4 + \chi_8 ^2 + \chi_5 + \chi_{11} ^2$
E_7	$ \chi_1 + \chi_{17} ^2 + \chi_5 + \chi_{13} ^2 + \chi_7 + \chi_{11} ^2$ $+ \chi_9 ^2 + (\chi_3 + \chi_{15}) \overline{\chi_9} + \chi_9 \overline{(\chi_3 + \chi_{15})}$
E_8	$ \chi_1 + \chi_{11} + \chi_{19} + \chi_{29} ^2 + \chi_7 + \chi_{13} + \chi_{17} + \chi_{23} ^2$

(5.13)

ここで h は再び \mathfrak{g} の Coxeter 数で、A 型に対しては 2 以上の整数、D 型に対しては 6 以上の偶数です。 $\mathcal{N}_{\ell, \ell'}$ は ℓ が Coxeter 指数である重複度を表している点が重要です。また $\mathcal{N}_{h-\ell, h-\ell'} = \mathcal{N}_{\ell, \ell'}$ という対称性にも注意しておきます。

$\mathcal{N} = 2$ 極小模型の楕円種数はどうあるべきでしょうか。答えから言うと、

$$Z(\tau, z) = \sum_{\ell, \ell'=1}^{h-1} \mathcal{N}_{\ell, \ell'} \mathbb{I}_{\ell'}^{\ell}(\tau, z) \tag{5.14}$$

とすればよいことが分かります。もちろん、この表式が望ましい性質を持つことを確かめねばなりません。

6 等価性

これまでに同じ中心電荷を持ち、同じ ADE パターンを持つ Landau-Ginzburg 模型と極小模型に関して説明してきました。そこで、両模型は理論として等価なのか、そうならば両模型の楕円種数は一致するのかと問うのは自然です。楕円種数に限ればこの問の答えは YES です。

実際、各 $\mathfrak{g} = A_{\bullet}, D_{\bullet}, E_{\bullet}$ に対して (5.14) は対応する Landau-Ginzburg 模型の楕円種数と同じ関数等式 (3.1) および (3.2) をみたすことが示せます。また、極小模型の χ -y 種数は Landau-Ginzburg 模型の χ -y 種数 (4.11) に一致します。(これを確かめるには (5.14) で q 展開の初項を拾えばよいのですが、次節で述べる $\mathbb{I}_m^{\ell}(\tau, z)$ の表式 (7.3) を使うと容易です。) 両模型の楕円種数が等しくなることの証明に必要なのは、関数等式および χ -y 種数の一致性と $\hat{c} < 1$ である事実です。(このテキ

ストではこれ以上証明の詳細に立ち入りませんが、講座ではもう少し詳しく説明できたらと思っています。)

さて、ADE Landau-Ginzburg 模型と極小模型の楕円種数の一致を認めると ADE 系列の恒等式群が得られたこととなります。これが、五重積公式の拡張になっていることを見ておきましょう。 $\mathfrak{g} = A_2$ のとき、(5.14) は

$$Z(\tau, z) = \mathbb{I}_1^1(\tau, z) + \mathbb{I}_2^2(\tau, z) \quad (6.1)$$

となります。ここで、(5.6) を使うと

$$\mathbb{I}_1^1(\tau, z) = \mathbb{I}(z), \quad \mathbb{I}_2^2(\tau, z) = \mathbb{I}(-z) \quad (6.2)$$

となることが分かります。従って、(4.15) の右辺と (6.1) の右辺は一致します。

7 公式

最後に、これまでに調べた五重積公式の ADE 一般化を公式らしくまとめておきましょう。

そのためには q 解析の記法を使うと便利です。複素数 x および複素数 q で $|q| < 1$ を満たすものに対して

$$(x; q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - xq^n), \quad (q)_\infty = (q; q)_\infty \quad (7.1)$$

とおきます。さらに、 $x \neq 0$ である場合テータ関数 $\theta(x, q)$ を

$$\theta(x, q) = \frac{(x; q)_\infty (q/x; q)_\infty}{(q)_\infty^2} \quad (7.2)$$

により導入します。(これは以前に定義した $\vartheta(\tau, u)$ と実質的に同じものです。)

極小模型の楕円種数の記述に必要な $\mathbb{I}_m^\ell(\tau, z)$ は分規則 (5.7) を出発点としているため満たすべき関数等式を調べるのには便利なのですが、(5.8) を使うとストリング関数を含んだ複雑なものになっています。幸い Kac-Peterson によりストリング関数の複雑ではあるが具体的な形が知られているので、これを使って式変形すると次の簡便な表式が存在することが分かります。

$$\mathbb{I}_m^\ell(\tau, z) = q^{\frac{\ell^2 - m^2}{4h}} y^{\frac{m-1}{h} - \frac{\ell}{2}} \frac{\theta(y, q)\theta(q^\ell, q^h)}{\theta(q^{\frac{\ell+m}{2}} y^{-1}, q^h)\theta(q^{\frac{\ell-m}{2}} y, q^h)}. \quad (7.3)$$

ここで、 ℓ と m は同じ偶奇性を持つものとしています。

斯くして、ADE Landau-Ginzburg 模型と極小模型の楕円種数の一致の意味するところとして次の公式を得ます。

定理 7.4. 各 $\mathfrak{g} = A_{\bullet}, D_{\bullet}, E_{\bullet}$ に対して (h, d_1, d_2, d_3) を (4.9) により、 $\mathcal{N}_{\ell, \ell'}$ を (5.13) により定める。このとき、

$$\prod_{i=1}^3 \frac{\theta(x^{h-d_i}, q)}{\theta(x^{d_i}, q)} = \sum_{\ell, \ell'=1}^{h-1} \mathcal{N}_{\ell, \ell'} \mathbb{J}_{\ell'}^{\ell}(x, q) \quad (7.5)$$

が成り立つ。ここに

$$\mathbb{J}_{\ell'}^{\ell}(x, q) = q^{\frac{\ell^2 - \ell'^2}{4h}} x^{\ell' - 1} \frac{\theta(x^h, q)\theta(q^{\ell}, q^h)}{\theta(q^{\frac{\ell+\ell'}{2}} x^{-h}, q^h)\theta(q^{\frac{\ell-\ell'}{2}} x^h, q^h)}. \quad (7.6)$$

である。

特に $\mathfrak{g} = A_{h-1}$ のとき、(7.5) は

$$\frac{\theta(x^{h-1}, q)}{\theta(x, q)} = \sum_{\ell=1}^{h-1} x^{\ell-1} \frac{\theta(x^h, q)\theta(q^{\ell}, q^h)}{\theta(q^{\ell} x^{-h}, q^h)\theta(x^h, q^h)} \quad (7.7)$$

となります。この場合は本講のような議論を経ないでも、直接他の方法で証明することが可能です。