素数定理と Riemann ゼータ関数

山下　剛

本稿は公開講座「素数定理と Riemann ゼータ関数」(2017 年 7 月 31 日～8 月 4 日於京都大学数理解析研究所) のテキストである．当講座では素数定理

$$\pi(x) := \#\{p : \text{素数} \mid p \leq x\} \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty)$$

の Hadamard と de la Vallée Poussin による解析的証明 (1896 年) を紹介する[1]．上で, $f(x) \sim g(x) \quad (x \to \infty)$ は $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ を意味するものとした．

目 次

1　導入と証明の方針.

素数とは, 1 と自分自身の 2 つ以外に約数をもたない自然数である．具体的には, 小さいほうから $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$ となる．古代ギリシャでは素数が無限に存在することが知られていたが, 古来より素数がどのように分布しているのか人類の大きな関心の 1 つである．Gauss 自身の回想によると, 与えられた自然数 N 以下に存在する素数の個数 $\pi(N)$

[1] **Erdös と Selberg** によってのちに発見された初等的証明 (1949 年) は非常に技術的であり, あまり "概念的" ではないと思われる (第 1 節最後の「その後の影響」の部分も参照) ため当講座では扱わない (ここで「初等的証明」とは複素解析などの理論を使わない証明という意味であり「簡単な証明」という意味ではない).

をたくさん計算することで Gauss が 15 歳か 16 歳の頃 (つまり 1792 年か 1793 年) に

$$\pi(N) \quad \text{は} \quad \tfrac{N}{\log N} \quad \text{で近似できる,}$$

より正確には冒頭で書いた記号の意味で

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty) \tag{1}$$

であると予想した. たとえば, (今日知られている) 具体的な数値は以下の通り:

x	$\pi(x)$	比 $\frac{\pi(x)}{x/\log x}$
10	4	0.921
10^2	25	1.151
10^3	168	1.161
10^4	1229	1.132
10^5	9592	1.104
10^6	78498	1.084
10^7	664579	1.071
10^8	5761455	1.061
10^9	50847534	1.054
10^{10}	455052511	1.048
10^{11}	4118054813	1.043
10^{12}	37607912018	1.039
10^{13}	346065536839	1.034
10^{14}	3204941750802	1.033
10^{15}	29844570422669	1.031
10^{16}	279238341033925	1.029
10^{17}	2623557157654233	1.027
10^{18}	24739954287740860	1.025
10^{19}	234057667276344607	1.024
10^{20}	2220819602560918840	1.023
10^{21}	21127269486018731928	1.022
10^{22}	201467286689315906290	1.021
10^{23}	1925320391606803968923	1.020
10^{24}	18435599767349200867866	1.019
10^{25}	176846309399143769411680	1.018

ゼータ関数と素数の分布の関係に関する Riemann による 1859 年の革新的な研究 [2] を経て, Riemann のゼータ関数を用いて Hadamard と de la Vallée Poussin が (それぞれ独立に) 予

[2] Riemann ゼータ関数の整数での値は (解析接続の理論が当時存在しなかったにも関わらず "負の整数での値" も込めて) 18 世紀に既に Euler によって研究されていたが, Riemann は近代的な厳密な解析の理論のもと, ゼータ関数のより深い解析的性質及び素数の分布との深い関係を導いた.

想の式 (1) を 1896 年に証明した．これは**素数定理**と今日では呼ばれている ($\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ と置いて，$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) \quad (x \to \infty)$ を素数定理と呼ぶこともある．l'Hôpital の定理を使うと $\lim_{x\to\infty} \frac{x/\log x}{\mathrm{Li}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/\log x - 1/(\log x)^2}{1/\log x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\log x}\right) = 1$ なので，$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty)$ と $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) \quad (x \to \infty)$ は同値である [3]．当講座では前者の方で話を進めることにする)．

証明は大雑把に以下のようになされる: **von Mangoldt 関数**を $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & n = p^m \ (p: \text{素数},\ m \geq 1) \text{ の時}, \\ 0 & \text{他} \end{cases}$$

で定義し，**Chebyshev の** ψ **関数**及び **Chebyshev の** ϑ **関数**を $x > 0$ に対し

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n), \quad \vartheta(x) := \sum_{\text{素数 } p \leq x} \log p$$

で定義する．Riemann ゼータ関数と関係させる都合から積分した $\psi_1(x) := \int_1^x \psi(t)dt$ も導入する．まず

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \Longleftrightarrow \vartheta(x) \sim x \Longleftrightarrow \psi(x) \sim x \Longleftarrow \psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2} \quad (x \to \infty)$$

が難しくなく示せる (第 2 節) ので，$\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2} \ (x \to \infty)$ を示せば十分である．次に $\psi_1(x)$ が Riemann ゼータ関数 (第 3 節で導入) と

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds \quad (c > 1)$$

のように関係することを示す (第 4 節)．ここで $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ は $s = 1$ で 1 位の極をもち留数は 1 である (定理 3.3 を使って分かる) ので，極を取り除くと

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right) ds \quad (c > 1)$$

となる (第 4 節)．ここで $h(s) := \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right)$ とおくと，

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s) ds = \frac{x^{c-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(c+it) e^{it\log x} dt \quad (c > 1) \tag{2}$$

なので

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{c-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(c+it) e^{it\log x} dt = 0 \tag{3}$$

[3] ただし，$\mathrm{Li}(x)$ の方が近似の精度が良い．

を示せば十分である．一般に Riemann-Lebesgue の補題 (付録 B) により, Lebesgue 可積分関数 $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ に対してその Fourier 変換 $\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$ は $\lim_{\xi\to\pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ となる．$c > 1$ の時には $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(c+it)|dt < \infty$ が容易に示せるので, Riemann-Lebesgue の補題から $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(c+it)e^{it\log x}dt = 0$ が分かるが, 一方 x^{c-1} の因子は $x \to \infty$ では ∞ に発散するため, そのままでは式 (3) は出ない．**式 (2) で** $c = 1$ **とできたとすると**発散する x^{c-1} の因子は消えるが, その時には $h(1+it)$ は $\mathrm{Re}(s) = 1$ での $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ の項がでてくるため, Riemann-Lebesgue の補題を使うために必要な $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)|dt < \infty$ が非自明になる．特に, もし $\mathrm{Re}(s) = 1$ 上で $\zeta(s) = 0$ となる点が存在すれば, $\mathrm{Re}(s) = 1$ 上で $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ を上から評価することができない.

証明の核心部分は, $\mathrm{Re}(s) = 1$ **で** $\zeta(s) \neq 0$ **となる事実を示す**

(より正確には $\mathrm{Re}(s) = 1$ 上で $\zeta(s)$ を下から評価し, したがって $\mathrm{Re}(s) = 1$ 上で $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ を上から評価する) ことで, 式 (2) が $c = 1$ でも成立し, かつ $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)|dt < \infty$ であることを示すことにある．これが示されると Riemann-Lebesgue の補題より素数定理が従う (第 5 節), というのが証明の大雑把な流れである．$\mathrm{Re}(s) = 1$ で $\zeta(s) \neq 0$ となる事実 (Hadamard-de la Vallée Poussin の定理) は,

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0$$

を使って導き出される.

その後の影響: この素数定理の証明を端緒に, ゼータ関数やその親類である L 関数について,

その絶対収束域ギリギリの線上での非零性から数論的な帰結を出す

という手法 [4] が生まれた．例えば, Deligne による **Weil 予想** (の一般化である**重さの理論** [5]) の証明でも同様の手法を使う [6] し, **佐藤-Tate 予想**の証明でも同様の手法を使う [7].

2 $\pi(x)$ と Chebychev の関数との関係.

まず $\pi(x)$ を $\vartheta(x)$ と関係させる.

[4] 当講座の内容は **Tauber 型定理**を使うともっとすっきりするが, 前提知識をなるべく仮定しないために本稿のような形をとった.

[5] つまり Weil I ではなく Weil II の方.

[6] ただし, その後 Laumon により ℓ **進 Fourier 変換**の理論を用いてこの “Hadamard-de la Vallée Poussin 型の議論” を避けた証明が与えられた.

[7] ただし, 証明の一番難しい部分は, 解析的に良い性質を持っていることがあらかじめ分かってはいない L 関数が解析的に良い性質を持っていることを証明するために**潜在的保型性**を示す部分である.

補題 2.1 (Abel の等式) $\mathbb{Z}_{>0}$ 上で定義された関数 $a(n)$ に対して $A(x) := \sum_{n\le x} a(n)$ と置く．C^1 級関数 [8] $f(x)$ に対して

$$\sum_{y<n\le x} f(n)a(n) = f(x)A(x) - f(y)A(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt.$$

証明　Riemann-Stieltjes 積分により $\sum_{y<n\le x} f(n)a(n) = \int_y^x f(t)dA(t) = f(x)A(x) - f(y)A(y) - \int_y^x A(t)df(t) = f(x)A(x) - f(y)A(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt.$ □

補題 2.2 $x \ge 2$ に対して

$$\vartheta(x) = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt, \quad \pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2}dt.$$

証明　$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して n が素数のとき $a(n) := 1$, n が素数でないとき $a(n) := 0$ と定めると $\pi(x) = \sum_{1<n\le x} a(n)$, $\vartheta(x) = \sum_{1<n\le x} a(n)\log n$ である．$f(x) = \log x$, $y = 1$ に対して Abel の等式 (補題 2.1) を適用すると $\vartheta(x) = \sum_{1<n\le x} f(n)a(n) = \pi(x)\log x - \pi(1)\log 1 - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t}dt = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt$ を得る (最後の等式は $t < 2$ では $\pi(t) = 0$ より従う).

一方，$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $b(n) := a(n)\log n$ と定めると $\vartheta(x) = \sum_{1<n\le x} b(n)$, $\pi(x) = \sum_{3/2<n\le x} b(n)\frac{1}{\log n}$ である．$f(x) = \frac{1}{\log x}$, $y = 3/2$ に対して Abel の等式 (補題 2.1) を適用すると $\pi(x) = \sum_{3/2<n\le x} f(n)b(n) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} - \pi(3/2)\log(3/2) + \int_{3/2}^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2}dt = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2}dt$ を得る (最後の等式は $t < 2$ では $\vartheta(t) = 0$ より従う). □

系 2.3 $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ $(x \to \infty) \iff \vartheta(x) \sim x$ $(x \to \infty)$.

証明　$\Longrightarrow$ を示す．補題 2.2 の最初の式より $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt = 0$ を示せば十分．仮定より $\frac{\pi(t)}{t} = O\left(\frac{1}{\log t}\right)$ なので [9], $\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt = O\left(\frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\log t}\right)$．今，$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\log t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\log t} \le \frac{\sqrt{x}}{\log 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{\log\sqrt{x}}$ なので $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt = 0$ が分かる.

$\Longleftarrow$ を示す．補題 2.2 の 2 番目の式より $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2}dt = 0$ を示せば十分．仮定により $\vartheta(t) = O(t)$ なので $\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2}dt = O\left(\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}\right)$．今，$\int_2^x \frac{1}{(\log t)^2}dt = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{(\log t)^2} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{(\log t)^2} \le \frac{\sqrt{x}}{(\log 2)^2} + \frac{x-\sqrt{x}}{(\log\sqrt{x})^2}$ なので $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2}dt = 0$ が分かる. □

次に $\vartheta(x)$ を $\psi(x)$ と関係させる.

補題 2.4 $x > 0$ に対して

$$0 \le \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \le \frac{(\log x)^2}{2\sqrt{x}\log 2}.$$

証明　定義から $\psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) = \sum_{m\ge 1}\sum_{p^m\le x} \Lambda(p^m) = \sum_{1\le m\le \log_2 x}\sum_{p\le x^{1/m}} \log p = \sum_{1\le m\le\log_2 x} \vartheta(x^{1/m})$ なので，$0 \le \psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{2\le m\le\log_2 x} \vartheta(x^{1/m})$ となる．一方，$\vartheta(x) \le \sum_{p\le x}\log x \le x\log x$ の評価を使うと $0 \le \psi(x) - \vartheta(x) \le \sum_{2\le m\le\log_2 x} x^{1/m}\log(x^{1/m}) \le (\log_2 x)x^{1/2}\log(x^{1/2}) = \frac{x^{1/2}(\log x)^2}{2\log 2}$. □

[8] 微分可能で導関数が連続な関数のこと.

[9] ここで $O(-)$ は **Landau** の記号．つまり，$f(x) = O(g(x))$ は $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$ であることを意味する.

上の補題から次の系が直ちに得られる:

系 2.5 $\vartheta(x) \sim x\ (x \to \infty) \Longleftrightarrow \psi(x) \sim x\ (x \to \infty)$.

この節の最後に, $\psi(x)$ を $\psi_1(x)$ と関係させる.

補題 2.6 $A(x)$ を広義単調増加関数とし, $A_1(x) := \int_1^x A(t)dt$ とおく. もしある $a > 0$ と定数 C に対して $A_1(x) \sim Cx^a \quad (x \to \infty)$ であれば, $A(x) \sim aCx^{a-1} \quad (x \to \infty)$ である.

証明 $\beta > 1$ に対して $A_1(\beta x) - A_1(x) = \int_x^{\beta x} A(t)dt \ge \int_x^{\beta x} A(x)dt = A(x)(\beta-1)x$ より, $\frac{A(x)}{x^{a-1}} \le \frac{1}{\beta-1}\left(\frac{A_1(\beta x)}{(\beta x)^a}\beta^a - \frac{A_1(x)}{x^a}\right)$. $x \to \infty$ として仮定を使うと $\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{a-1}} \le C\frac{\beta^a-1}{\beta-1}$. ここで $\beta \to 1+$ とすると $\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{a-1}} \le aC$.

次に $0 < \alpha < 1$ に対して $A_1(x) - A_1(\alpha x) = \int_{\alpha x}^x A(t)dt \le \int_{\alpha x}^x A(x)dt = A(x)(1-\alpha)x$ より, $\frac{A(x)}{x^{a-1}} \ge \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{A_1(x)}{x^a} - \frac{A_1(\alpha x)}{(\alpha x)^a}\alpha^a\right)$. $x \to \infty$ として仮定を使うと $\liminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{a-1}} \ge C\frac{1-\alpha^a}{1-\alpha}$. ここで $\alpha \to 1-$ とすると $\liminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{a-1}} \ge aC$. □

上の補題を $A(x) = \psi(x)$ に対して使うと次の系を得る:

系 2.7 $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}\ (x \to \infty) \Longrightarrow \psi(x) \sim x\ (x \to \infty)$.

系 2.3, 系 2.5, 系 2.7 により素数定理は $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2} \quad (x \to \infty)$ を示すことに帰着された.

3 Riemann ゼータ関数.

定義 3.1 (Riemann ゼータ関数) $\sigma := \mathrm{Re}(s) > 1$ に対して $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma} < \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^\sigma}$ を使って $\sum_{n\ge2}\left|\frac{1}{n^s}\right| \le \int_1^\infty \frac{dt}{t^\sigma} = \frac{1}{\sigma-1} < \infty$ より, $\mathrm{Re}(s) > 1$ を満たす複素数 s に対して

$$\zeta(s) := \sum_{n\ge1} \frac{1}{n^s}$$

は絶対収束して $\mathrm{Re}(s) > 1$ で正則な関数を与える. これを **Riemann ゼータ関数**と呼ぶ.

Riemann ゼータ関数が素数の分布と密接に関係するのは次の定理によるところが大きい:

定理 3.2 (Euler 積表示) $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して

$$\zeta(s) = \prod_{p:\,\text{素数}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

注 $\mathrm{Re}(s) > 1$ で無限積が絶対収束することにより, $\mathrm{Re}(s) > 1$ では $\zeta(s) \ne 0$ であることも定理から分かる.

注 以下で与える証明からも分かるように, Euler 積表示の存在は「任意の自然数は素数の積に一意的に分解される」という事実の現れでもある.

注　この Euler 積表示を用いると, 古代ギリシャで Euclid により知られていた事実である「素数が無限個存在すること」の別証明が背理法を用いて以下のようにして得られる: もし素数が有限個であると仮定すると $\lim_{s\to 1}\prod_{p:\text{素数}}\frac{1}{1-p^{-s}}<\infty$ となるが, これは

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots\\&\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots\right.=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty\end{aligned}$$

より得られる $\lim_{s\to 1}\zeta(s)=\infty$ と矛盾. また, Euler 積表示の両辺の対数をとって $s\to 1$ を考えることにより, Euler は 1737 年に $\sum_{p:\text{素数}}\frac{1}{p}=\infty$ を得た ($\sum_{1\leq n<x}\frac{1}{n}$ は $\log(x)$ のオーダーで発散することから, より精密には, $\sum_{p:\text{素数}<x}\frac{1}{p}$ は $\log\log(x)$ というとても遅いオーダーで発散することも分かる). ちなみに平方数については逆数の和は $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\leq 1+\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(n-1)}=1+\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2<\infty$ である [10] ので, (ともに無限集合であるが) “素数は平方数よりも多くある” と感じられる. これは素数の分布の知見について古代ギリシャを越える (2000 年以上ぶりの) 成果であった [11].

証明　自然数は素数の積に一意的に表されることから, $\mathrm{Re}(s)>1$ に対して
$\zeta(s)=\prod_{p:\text{素数}}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\cdots\right)=\prod_{p:\text{素数}}\frac{1}{1-p^{-s}}$. □

定理 3.3 (関数等式) Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は $s=1$ でのみ極 (位数 1, 留数 1) を持つ有理型関数として全平面に解析接続され,

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

を満たす. ここで $\Gamma(s)$ はガンマ関数 (その定義や本稿で使われる性質については付録 A 参照).

注　素数定理を証明する目的の上では, $\epsilon>0$ に対して $\mathrm{Re}(s)>1-\epsilon$ にまで $\zeta(s)$ が (有理型に) 解析接続できることが分かれば十分であるし, 関数等式も使わない. 実際, 補題 5.2 の証明中でもこの定理の証明とは独立に $\mathrm{Re}(s)>0$ への $\zeta(s)$ の (有理型の) 解析接続を証明して, そこでの式を用いて素数定理の証明に必要な評価を得ている [12]. けれども, この定理の美しさから言及せずにはいられなかった.

注　上の定理 3.3 で $s=1$ を考えると, $\zeta(s)$ の $s=1$ での留数が 1 であることから $\zeta(0)=-\frac{1}{2}$ が得られる [13]. また, $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ を使うと $s=2$ から $\zeta(-1)=-\frac{1}{12}$, $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$ を使うと $s=4$ から $\zeta(-3)=\frac{1}{120}$ [14] などが得られる (負の偶数での値は次の注参照). ゼータ関

[10] この値 $\zeta(2)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ はどういう値であるかというのが **Basel の問題**であったが, Euler がこれは円周率を用いて $\frac{\pi^2}{6}$ で表されることを 1735 年 (出版は 1740 年) に示し, 当時の人々を仰天させた. Riemann ゼータ関数の整数点での値も非常に興味深い話題であるが当講座では扱わない.

[11] Dirichlet はこの手法の発展上に**算術級数定理**というとても美しい定理を得たが当講座では話が逸れるので扱わない.

[12] なので, この定理を省略するなら付録 A 及び付録 B の定理 B.1 も不要になる.

[13] この値は, 「整数が素数分解の一意性をもつこと」および「$\mathbb{Z}$ の可逆元は $\{\pm 1\}$ の 2 つ」という事実と (**解析的類数公式**を通じて) 関係している.

[14] これは物理学において**カシミール効果**での真空のエネルギーの計算における発散の繰り込みで使われる.

数の無限和による定義式 $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ は 絶対収束域 $\mathrm{Re}(s) > 1$ でのみ意味をもち, 上の $s = 0, -1, -3, \ldots$ での値は絶対収束域の外にあるので その無限和は意味を持たない が, 敢えて形式的に書くと

$$1+1+1+\cdots \text{“}=\text{”} -\frac{1}{2},\quad 1+2+3+4+\cdots \text{“}=\text{”} -\frac{1}{12},\quad 1+8+27+64+\cdots \text{“}=\text{”} \frac{1}{120}$$

のようになる.

注 $\mathrm{Re}(s) > 1$ で $\zeta(s) \neq 0$ であり, またガンマ関数 $\Gamma(s)$ は $s = 0, -1, -2, \ldots$ で極を持ち他では正則である (付録 A 参照) ことを使うと, 上の定理 3.3 より $\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) < 0$ においては零点 (つまり $\zeta(s) = 0$ となる $s \in \mathbb{C}$) は $s = -2, -4, -6, \ldots$ のみであると分かる. ミレニアム問題にもなっている有名な **Riemann 予想**は, 複素平面において, $s = -2, -4, -6, \ldots$ 以外の $\zeta(s)$ の零点はすべて関数等式の中心線である $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 上にあるだろう, というものである [15].

証明 まず, **テータ関数** [16] $\theta(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi t}$ の関数等式を示す. $f(x) := e^{-\pi t x^2}$ の Fourier 変換 $\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2} e^{-2\pi i x\xi}dx$ は

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t\left(x+i\frac{\xi}{t}\right)^2 - \frac{\pi\xi^2}{t}}dx = e^{-\frac{\pi\xi^2}{t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2}dx = e^{-\frac{\pi\xi^2}{t}}\sqrt{\frac{\pi}{t\pi}} = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\pi\xi^2}{t}}$$

なので, **Poisson の和公式** (付録の定理 B.1 参照) を使うと

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

が分かる.

さて, Riemann ゼータ関数に戻る. $\mathrm{Re}(s) > 1$ とする.

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-t}(\pi^{-1}tn^{-2})^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t} = \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\theta(t)-1)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int_0^{1}(\theta(t)-1)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(\theta(t)-1)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}\\
&= \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(\theta(t)-t^{-\frac{1}{2}})t^{\frac{1-s}{2}}\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(\theta(t)-1)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}\\
&= \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(\theta(t)-1)t^{\frac{1-s}{2}}\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(t^{\frac{1-s}{2}}-t^{-\frac{s}{2}})\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(\theta(t)-1)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}\\
&= \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(\theta(t)-1)t^{\frac{1-s}{2}}\frac{dt}{t} - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty}(\theta(t)-1)t^{\frac{s}{2}}\frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

[15] 当講座で扱っている素数定理との関係で言えば, $\pi(x)$ の誤差項のある評価式と Riemann 予想が同値になることが知られている.

[16] Chebyshev の ϑ 関数とは無関係である.

5番目の等式で $\theta(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right)$ を使った．ここで, $\theta(t)-1$ は $t\to\infty$ で急減少するので, 上の最後の式は s が $0,1$ 以外の複素数で正則な関数を与える．また, 上の最後の式は $s\mapsto 1-s$ で不変なので, 求める関数等式 $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$ を得る．$\zeta(s)$ の $s=1$ での留数が 1 である事も分かる．この関数等式で $s\to 0$ を考えると, 右辺は 1 位の極を持ち, 左辺は $\Gamma(\frac{s}{2})$ で既に 1 位の極を持つので, $\zeta(s)$ は $s=0$ で正則だと分かる． □

4 Chebychev の関数と Riemann ゼータ関数の関係.

$\psi_1(x)$ を $\zeta(s)$ と関係させる．まず補題を 2 つ用意する．

補題 4.1 $\psi_1(x)=\sum_{n\le x}(x-n)\Lambda(n)$.

証明 $a(n)=\Lambda(n),\ A(x)=\psi(x),\ f(x)=x,\ y=1$ に対して Abel の等式 (補題 2.1) を使うと, $\sum_{n\le x}n\Lambda(n)=f(x)\psi(x)-f(1)\Lambda(1)-\int_1^x\psi(t)dt=x\psi(x)-\psi_1(x)$. よって, $\psi_1(x)=x\psi(x)-\sum_{n\le x}n\Lambda(n)=\sum_{n\le x}(x-n)\Lambda(n)$. □

補題 4.2 $c>0$ と $u>0$ と $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}dz=\begin{cases}\frac{(1-u)^k}{k!} & 0<u\le 1\text{ の時},\\ 0 & u>1\text{ の時}.\end{cases}$$

証明 積分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}dz$ を Cauchy の留数定理を使って計算する．ここで積分路 C_R は以下のように定義する．$0<u\le 1$ の時, 原点を中心とした半径 $R(>2k+c)$ の円と $\mathrm{Re}(z)=c$ の 2 つの交点のうち $\mathrm{Im}(z)<0$ の方から $\mathrm{Im}(z)>0$ の向きに真っ直ぐ上に進み, 次に半径 R のその円のうち $\mathrm{Re}(z)\le c$ の部分を反時計回りに進んで出発点に戻る経路. $u>1$ の時, 原点を中心とした半径 $R(>2k+c)$ の円と $\mathrm{Re}(z)=c$ の 2 つの交点のうち $\mathrm{Im}(z)>0$ の方から $\mathrm{Im}(z)<0$ の向きに真っ直ぐ下に進み, 次に半径 R のその円のうち $\mathrm{Re}(z)\ge c$ の部分を反時計回りに進んで出発点に戻る経路. 今, $z=x+iy$ を経路 C_R のうち半径 R の円上にあるとすると, $0<u\le 1$ でも $u>1$ でも, $\left|\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}\right|=\frac{u^{-x}}{|z||z+1|\cdots|z+k|}\le\frac{u^{-c}}{R|z+1|\cdots|z+k|}$ であり, $1\le n\le k$ に対して $|z+n|\ge|z|-n=R-n\ge R-k\ge R/2$ である (最後の不等号では $R>2k$ を使った) ので, 経路 C_R のうち半径 R の円上の部分での積分の寄与の絶対値は $\le 2\pi R\frac{u^{-c}}{R(R/2)^k}=O(R^{-k})$. $k\ge 1$ なのでこの寄与は $R\to\infty$ の時 0 に収束する．したがって, 補題の積分は積分路 C_R での積分の $R\to\infty$ と一致する．

$u>1$ の時, 被積分関数は C_R で囲まれた内部で極を持たないので留数定理より $\int_{C_R}=0$. $0<u\le 1$ の時, 被積分関数は C_R で囲まれた内部で $z=0,-1,\ldots,-k$ で極を持つので, 留数定理より $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}dz=\sum_{n=0}^k\mathrm{Res}_{z=-n}\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}=\sum_{n=0}^k\frac{u^n}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(-n+k)}=\sum_{n=0}^k\frac{(-1)^n u^n}{n!(k-n)!}=\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^k\binom{k}{n}(-u)^n=\frac{(1-u)^k}{k!}$. 補題はこれより従う． □

命題 4.3 $c>1$ と $x\ge 1$ に対して

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)ds.$$

証明　まず, $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

を示す．Euler 積表示 $\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ の対数微分をとると $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{p:\text{素数}} \frac{p^{-s}\log p}{1-p^{-s}} = -\sum_{p:\text{素数}} \log p \sum_{m\geq 1} p^{-ms} = -\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ を得る．この最後の式から, $c > 1$ の時 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c} < \infty$ が分かることにも注意する.

次に, 補題 4.2 を $k = 1$, $u = n/x$ に対して使うと, $n \leq x$ と $c > 0$ に対して $1 - \frac{n}{x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} ds$. 一方, 補題 4.1 より $\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n\leq x}(1 - \frac{n}{x})\Lambda(n)$ なので

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n\leq x} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} ds = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} ds$$

を得る (補題 4.2 より積分は $n > x$ の時 0 になることから最後の等号が従う)．ここで $c > 1$ とすると，任意の $N \geq 1$ に対して $\sum_{n=1}^{N}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} |\frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)}| ds = \sum_{n=1}^{N} \frac{\Lambda(n)}{n^c}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^c}{|s||s+1|} ds \leq C\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c} < \infty$ (C は定数, 最後の不等号で $c > 1$ を使った) なので, 無限和と積分が交換できて

$$\begin{aligned}\frac{\psi_1(x)}{x} &= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n)(x/n)^s}{s(s+1)} ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds\end{aligned}$$

となり, 命題の証明が終わる. □

上の命題で $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ は $s = 1$ で 1 位の極を持ち留数 1 をもつので, その部分の極を取り除く.

系 4.4　$c > 1$ と $x \geq 1$ に対して

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right) ds.$$

特に, $h(s) := \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right)$ とおくと,

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1}h(s) ds = \frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(c+it)e^{it\log x} dt.$$

証明　補題 4.2 を $k = 2$, $u = 1/x \leq 1$ に対して使うと，$c > 0$ に対して $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)(s+2)} ds$．ここで s を $s-1$ で置き換えると，$c > 1$ に対して $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\frac{1}{s-1} ds$．命題 4.3 の両辺からこの式を引くと系の最初の式を得る．次の式はそれより従う. □

5 Riemannゼータ関数の$\mathrm{Re}(s) = 1$での振る舞いと素数定理.

最後に, Riemann ゼータの $\mathrm{Re}(s) = 1$ の振る舞いから素数定理を出す.

補題 5.1 (Euler の総和法) C^1 級の関数 $f(x)$ と整数 $N \le M$ に対して

$$\sum_{N<n\le M} f(n) = \int_N^M f(t)dt + \int_N^M (t-[t])f'(t)dt.$$

ここで $[t]$ は t を超えない最大の整数を表す.

証明 区間 $[N, M]$ にある整数 n に対して $\int_{n-1}^n [t]f'(t)dt = \int_{n-1}^n (n-1)f'(t)dt = (n-1)(f(n)-f(n-1)) = (nf(n)-(n-1)f(n-1)) - f(n)$. これを $n = N+1$ から $n = M$ まで足し合わせると $\int_N^M [t]f'(t)dt = Mf(M) - Nf(N) - \sum_{N<n\le M} f(n)$. よって, $\sum_{N<n\le M} f(n) = -\int_N^M [t]f'(t)dt + Mf(M) - Nf(N)$. この式と $\int_N^M f(t)dt = Mf(M) - Nf(N) - \int_N^M tf'(t)dt$ をあわせると補題を得る. □

まず, (後で出てくる Hadamard-de la Vallée Poussin の定理とは関係なく) $\mathrm{Re}(s) = 1$, $\mathrm{Im}(s) \ge e$ を含む領域上で $\zeta(s)$, $\zeta'(s)$ を上から評価する.

補題 5.2 任意の $A > 0$ に対して, $s = \sigma + it$, $\sigma \ge \frac{1}{2}$, $\sigma > 1 - \frac{A}{\log t}$, $t \ge e$ を満たす領域において

$$|\zeta(s)| \le M \log t, \quad |\zeta'(s)| \le M(\log t)^2$$

となるような (A に依存した) 定数 M が存在する.

証明 まず, $\sigma \ge 2$ の領域では $|\zeta(s)| \le \zeta(2)$, $|\zeta'(s)| \le |\zeta'(2)|$ より補題の評価は自明に成り立つので, 以下では $\sigma < 2$, $t \ge e$ とする.

Euler の総和法 (補題 5.1) を $f(x) = 1/x^s$ に対して使うと任意の $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\sum_{N<n\le M} \frac{1}{n^s} = \int_N^M \frac{dx}{x^s} - s\int_N^M \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$. ここで $\mathrm{Re}(s) > 1$ として $M \to \infty$ とすると, $\sum_{n>N} \frac{1}{n^s} = \int_N^\infty \frac{dx}{x^s} - s\int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx = \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$ より, $\mathrm{Re}(s) > 1$ で $\zeta(s) - \sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$ を得る. $\mathrm{Re}(s) \ge \delta > 0$ に対して $\left|\int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx\right| \le \int_N^\infty \frac{dx}{x^{\delta+1}} < \infty$ なので $\int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$ は $\mathrm{Re}(s) \ge \delta$ で一様収束するので $\mathrm{Re}(s) \ge \delta$ で正則関数を与える. したがって, $\mathrm{Re}(s) > 0$ 上でも任意の $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$\zeta(s) = \sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$$

が成立する (このことから, $\zeta(s)$ は $s = 1$ で留数 $\lim_{s\to1} N^{1-s} = 1$ の 1 位の極をもち他では正則である有理型関数として $\mathrm{Re}(s) > 0$ に解析接続されることが定理 3.3 を使わないでも分かる).

今 $\sigma < 2$, $t \ge e$ より $|s| \le \sigma + t \le 2 + t < 2t$, $|s-1| \ge t$ なので,

$$|\zeta(s)| \le \sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{t} + 2t\int_N^\infty \frac{dx}{x^{\sigma+1}} = \sum_{1\le n\le N} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{t} + \frac{2t}{\sigma N^\sigma}.$$

上で任意だった整数 N を $N_t \le t < N_t + 1$ となるように t に依存してとると, $n \le N_t$ に対して $\log n \le \log N_t \le \log t$ であり, 与えられた定数 $A > 0$ に対して補題で考えている領域内では $s = \sigma + it$ に対して $1 - \sigma < A/\log t$ なので, $n \le N_t$ に対して $\frac{1}{n^\sigma} = \frac{1}{n}e^{(1-\sigma)\log n} < \frac{1}{n}e^{A\log n/\log t} \le \frac{1}{n}e^A = O\left(\frac{1}{n}\right)$. それを $n = N_t$ に対して使うと, $\frac{N_t^{1-\sigma}}{t} = \frac{N_t}{t}\frac{1}{N_t^\sigma} = O\left(\frac{1}{N_t}\right) = O(1)$, $\frac{2t}{\sigma N_t^\sigma} = O\left(\frac{N_t+1}{N_t}\right) = O(1)$. よって, $|\zeta(s)| = O\left(\sum_{1\le n\le N_t}\frac{1}{n}\right) + O(1) = O(\log N_t) + O(1) = O(\log t)$ と, 補題の最初の式が従う.

補題の 2 番目の式を示す. $\zeta(s) = \sum_{1\le n\le N}\frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx$ を微分すると $\zeta'(s) = -\sum_{1\le n\le N}\frac{\log n}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{(s-1)^2} - \frac{N^{1-s}\log N}{s-1} - \int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx + s\int_N^\infty \frac{(x-[x])\log x}{x^{s+1}}dx$. 先と同様に $|s| < 2t$, $|s-1| \ge t$ なので,

$$|\zeta'(s)| \le \sum_{1\le n\le N}\frac{\log n}{n^\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{t^2} + \frac{N^{1-\sigma}\log N}{t} + \int_N^\infty \frac{dx}{x^{\sigma+1}} + 2t\int_N^\infty \frac{\log x}{x^{\sigma+1}}dx.$$

ここで $\int_N^\infty \frac{dx}{x^{\sigma+1}} = \frac{1}{\sigma N^\sigma}$ であり, 部分積分を使うと $2t\int_N^\infty \frac{\log x}{x^{\sigma+1}}dx = 2t\frac{\log N}{\sigma N^\sigma} + 2t\int_N^\infty \frac{dx}{\sigma x^{\sigma+1}} = 2t\frac{\log N}{\sigma N^\sigma} + 2t\frac{1}{\sigma^2 N^\sigma}$ なので,

$$|\zeta'(s)| \le \sum_{1\le n\le N}\frac{\log n}{n^\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{t^2} + \frac{N^{1-\sigma}\log N}{t} + \frac{1}{\sigma N^\sigma} + \frac{2t\log N}{\sigma N^\sigma} + \frac{2t}{\sigma^2 N^\sigma}$$

となる. やはり先と同様に整数 N を $N_t \le t < N_t + 1$ となるように t に依存してとると, 与えられた定数 $A > 0$ に対して補題で考えている領域内では $n \le N_t$ に対して $\frac{1}{n^\sigma} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ なので, $|\zeta'(s)| \le O\left(\sum_{1\le n\le N_t}\frac{\log n}{n}\right) + O\left(\frac{1}{N_t^2}\right) + O\left(\frac{\log N_t}{N_t}\right) + O\left(\frac{1}{N_t}\right) + O(\log N_t) + O(1) = O((\log N_t)^2) = O((\log t)^2)$ となり補題の第 2 式が従う. □

定理 5.3 (Hadamard-de la Vallée Poussin)

1. $\sigma \ge 1$ に対して $\zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \ge 1$.
2. $\mathrm{Re}(s) = 1$ に対して $\zeta(s) \ne 0$.

証明 (1): $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して $\log\zeta(s) = -\sum_{p:\text{素数}}\log(1-p^{-s}) = \sum_{p:\text{素数}}\sum_{m\ge1}\frac{1}{mp^{ms}}$ より, $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$ とすると $\zeta(s) = \exp\left(\sum_{p:\text{素数}}\sum_{m\ge1}\frac{1}{mp^{ms}}\right) = \exp\left(\sum_{p:\text{素数}}\sum_{m\ge1}\frac{e^{-imt\log p}}{mp^{m\sigma}}\right)$. よって, $|\zeta(s)| = \exp\left(\sum_{p:\text{素数}}\sum_{m\ge1}\frac{\cos(mt\log p)}{mp^{m\sigma}}\right)$ なので,

$$\zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| = \exp\left(\sum_{p:\text{素数}}\sum_{m\ge1}\frac{3+4\cos(mt\log p)+\cos(2mt\log p)}{mp^{m\sigma}}\right).$$

ここで $3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta = 2(1+\cos\theta)^2 \ge 0$ より (1) が $\sigma > 1$ で成立する. $\sigma \to 1 + 0$ とすれば $\sigma \ge 1$ でも (1) が成立する.

(2): 定理 3.3 より, $\zeta(s)$ は $s=1$ で極を持つので, $s=1+it$, $t\neq 0$ に対して示せばよい. (1) より $\sigma>1$ に対して

$$((\sigma-1)\zeta(\sigma))^3\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4|\zeta(\sigma+2it)|\geq\frac{1}{\sigma-1}.$$

ここで $\sigma\to 1+$ とする. 再び定理 3.3 より, $((\sigma-1)\zeta(\sigma))^3$ は 1 に収束し, $|\zeta(\sigma+2it)|$ は $|\zeta(1+2it)|<\infty$ に収束する. もし $|\zeta(\sigma+it)|$ が 0 に収束するならば $\lim_{\sigma\to 1+}|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}|^4=|\zeta'(1+it)|^4<\infty$. 一方, 右辺は発散するので矛盾. よって $\zeta(1+it)\neq 0$. □

この Hadamard-de la Vallée Poussin の定理を使って $\mathrm{Re}(s)=1$, $\mathrm{Im}(s)\geq e$ を含む領域で $\zeta(s)$ を下から評価する. これにより $\mathrm{Re}(s)=1$ を含む領域で $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ を上から評価できる (もし $\mathrm{Re}(s)=1$ 上で $\zeta(s)=0$ となる点があれば $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ を上から評価できないことに注意).

系 5.4 $s=\sigma+it$ で $\sigma\geq 1$, $t\geq e$ となる領域上で

$$|\zeta(s)|\geq\frac{C_1}{(\log t)^7},\quad\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|\leq C_2(\log t)^9$$

となる定数 $C_1,C_2>0$ が存在する.

証明 まず, $\sigma\geq 2$ では $\mu(n)$ を Möbius 関数 (つまり $n=p_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k}$ と素因数分解される n に対して $m_1=\cdots=m_k=1$ の時 $\mu(n):=(-1)^k$ で, そうでない時 $\mu(n):=0$) とすると, よく知られているように $\frac{1}{\zeta(s)}=\prod_{p:\text{素数}}(1-\frac{1}{p^s})=\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^s}$ なので $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|=\left|\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^s}\right|\leq\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)<\infty$ であり, 命題 4.3 の証明中に示したように $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$ なので, $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|\leq\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^2}<\infty$ となり, 系の評価は自明に成り立つので, 以下では $1\leq\sigma<2$, $t\geq e$ とする.

定理 5.3(1) より $|\zeta(\sigma+it)|\geq\frac{1}{\zeta(\sigma)^{3/4}|\zeta(\sigma+2it)|^{1/4}}$. ここで $(\sigma-1)\zeta(\sigma)$ は $1\leq\sigma\leq 2$ で有界なのである定数 M で $\zeta(\sigma)\leq\frac{M}{\sigma-1}$ が $1<\sigma\leq 2$ に対して成立する. また, 補題 5.2 より $1\leq\sigma\leq 2$ に対して $\zeta(\sigma+2it)=O(\log t)$ なので, $1<\sigma\leq 2$, $t\geq e$ となる領域上で

$$|\zeta(\sigma+it)|\geq\frac{B(\sigma-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}}$$

となる定数 B が存在する. また, この評価は $\sigma=1$ でも自明に成り立つ. $1<\alpha<2$ となる α を任意にとる. $1\leq\sigma\leq\alpha$, $t\geq e$ に対して, 補題 5.2 より $|\zeta(\sigma+it)-\zeta(\alpha+it)|\leq\int_\sigma^\alpha|\zeta'(u+it)|du\leq(\alpha-\sigma)M'(\log t)^2\leq(\alpha-1)M'(\log t)^2$ となる定数 M' が存在する. よって, $|\zeta(\sigma+it)|\geq|\zeta(\alpha+it)|-|\zeta(\sigma+it)-\zeta(\alpha+it)|\geq|\zeta(\alpha+it)|-(\alpha-1)M'(\log t)^2\geq\frac{B(\alpha-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}}-(\alpha-1)M'(\log t)^2$ が任意の $1\leq\sigma\leq\alpha$ で成立する. また, $\alpha\leq\sigma\leq 2$ の時も, $(\sigma-1)^{3/4}\geq(\alpha-1)^{3/4}$ なので $|\zeta(\sigma+it)|\geq\frac{B(\sigma-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}}\geq\frac{B(\alpha-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}}-(\alpha-1)M'(\log t)^2$ が成立する. つまり $1\leq\sigma\leq 2$, $t\geq e$ に対して

$$|\zeta(\sigma+it)|\geq\frac{B(\alpha-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}}-(\alpha-1)M'(\log t)^2$$

が成立する. ここまでαは$1<\alpha<2$を満たす任意の数だったが, ここでαを上の右辺の第1項が第2項の2倍となる (つまり$\frac{B(\alpha-1)^{3/4}}{(\log t)^{1/4}}=2(\alpha-1)M'(\log t)^2$) ように$\alpha$を$t$に依存して選ぶ. つまり$\alpha=1+\left(\frac{B}{2M'}\right)^4\frac{1}{(\log t)^9}$と$\alpha$を選らぶ. 明らかに$\alpha>1$であり, ある$t_0$に対して$t\geq t_0$の時$\alpha<2$となる. したがって, $t\geq t_0$, $1\leq\sigma\leq 2$の時$|\zeta(\sigma+it)|\geq(\alpha-1)M'(\log t)^2=\frac{C}{(\log t)^7}$となる定数$C$が存在する. $e\leq t\leq t_0$に対しても$|\zeta(\sigma+it)|\geq\frac{C'}{(\log t)^7}$となる定数$C'$が存在するので, あわせると$C_1:=\min\{C,C'\}$として$|\zeta(\sigma+it)|\geq\frac{C_1}{(\log t)^7}$が$\sigma\geq 1$, $t\geq e$で成り立つ. 系の最初の式が示された.

補題 5.2 より, $\sigma\geq 1$, $t\geq e$で$\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right|\leq\frac{(\log t)^7}{C_1}|\zeta'(\sigma+it)|\leq C_2(\log t)^9$となる定数$C_2$が存在する. 系の2番目の式が示された. □

これにより系 4.4 において$c=1$とした次の定理が得られる.

定理 5.5 $h(s):=\frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}\right)$を系 4.4 で定義した関数とする.

1. $x\geq 1$に対して
$$\frac{\psi_1(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(1+it)e^{it\log x}dt.$$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}|h(1+it)|dt<\infty$.
3. $\psi_1(x)\sim\frac{x^2}{2}\quad(x\to\infty)$.

証明 (1): 系 4.4 より$c>1$, $x\geq 1$に対して
$$\frac{\psi_1(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}x^{s-1}h(s)ds$$
が成立する. ここで積分路の$\mathrm{Re}(s)=c(>1)$を$\mathrm{Re}(s)=1$に動かすことができることをCauchyの留数定理により示す. $\mathrm{Re}(s)=c(>1)$, $\mathrm{Re}(s)=1$, $\mathrm{Im}(s)=\pm T$で囲まれた長方形を積分路にとる. 定理 3.3 より, $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$は$s=1$で1位の極をもち留数は1 ($s=1$の近傍で$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\cdots$に対し, $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=(-\frac{1}{(s-1)^2}+\cdots)/(\frac{1}{s-1}+\cdots)=-\frac{1}{s-1}+\cdots$, ここで$\cdots$は正則関数) であり他では正則であるので, $\frac{1}{s-1}$を引いた$h(s):=\frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}\right)$はその極が取り除かれ, この長方形の辺と内部を含む近傍上で正則関数である. 特に, 被積分関数$x^{s-1}h(s)$も同じ領域上で正則であり, Cauchyの留数定理により積分は0になる.

次に$T\to\infty$とした時に積分路の水平な線分 (つまり$s=c\pm iT$と$s=1\pm iT$を結ぶ線分) の寄与が0に収束することを示す. 複素共役で対応する点での被積分関数の絶対値は一致するので$s=c+iT$と$s=1+iT$を結ぶ線分に対してのみ示せば十分. この線分上で$\left|\frac{1}{s(s+1)}\right|\leq\frac{1}{T^2}$, $\left|\frac{1}{s(s+1)(s-1)}\right|\leq\frac{1}{T^3}\leq\frac{1}{T^2}$である. また, 系 5.4 より$s=\sigma+it$, $\sigma\geq 1$, $t\geq e$となる領域上で$|\zeta'(s)/\zeta(s)|\leq M(\log t)^9$となる定数$M$が存在する. よって, $T\geq e$に対して, $s=c+iT$と$s=1+iT$を結ぶ線分上で$|h(s)|\leq\frac{M(\log T)^9}{T^2}$となる. よって
$$\left|\int_{1+iT}^{c+iT}x^{s-1}h(s)ds\right|\leq\int_1^c x^{c-1}\frac{M(\log T)^9}{T^2}d\sigma=Mx^{c-1}\frac{(\log T)^9}{T^2}(c-1).$$

これは $T \to \infty$ で 0 に収束する．したがって, $\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1}h(s)ds = \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1}h(s)ds$ が示された. (1) は $\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1}h(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(1+it)e^{it\log x}dt$ より従う.

(2): $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|dt = \int_{-e}^{e} + \int_{e}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-e}$ と分けて考える．$\int_{e}^{\infty}$ については, 再び系 5.4 より, その積分路上で $|h(1+it)| \le \frac{M(\log t)^9}{t^2}$ なので積分は収束する．$\int_{-\infty}^{-e}$ も同様に収束する．よって $\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|dt < \infty$.

(3) は (2) と Riemann-Lebesgue の補題 (付録の定理 B.2) より従う. □

定理 5.6 (素数定理 (1896), Hadamard-de la Vallée Poussin) $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty)$.

証明 系 2.3, 系 2.5, 系 2.7, 定理 5.5(3) から従う. □

A 付録1: ガンマ関数.

この付録ではガンマ関数について軽く補足する．$\mathrm{Re}(s) > 0$ に対して

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$$

と置く．ここで, $c > 0$ として, $t \to \infty$ の時 $e^{-t}t^{s-1}$ は指数関数的に減少するので, $\int_c^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$ は絶対収束すること及び, $t > 0$ で $e^{-t}t^{s-1} < t^{s-1}$ より $\sigma := \mathrm{Re}(s) > 0$ では $\int_0^c |e^{-t}t^{s-1}|dt \le \int_0^c |t^{s-1}|dt = \int_0^c t^{\sigma-1}dt = \frac{c^\sigma}{\sigma} < \infty$ となり $\int_0^c e^{-t}t^{s-1}dt$ も絶対収束することにより $\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$ は $\mathrm{Re}(s) > 0$ 上で正則関数を与えることに注意.

また, 部分積分より $\Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^s dt = [-e^{-t}t^s]_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt = s\Gamma(s)$ となる．この式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ を繰り返し使うことで, 一般に $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0, -1, -2, \ldots$ に対して $N + \mathrm{Re}(s) > 0$ となる自然数 N をとると, $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+N)}{s(s+1)\cdots(s+N)}$ と $\Gamma(s)$ が定義できる (N のとり方には依存しない) ので, $\Gamma(s)$ は $\mathbb{C}$ 上に有理型に解析接続され $s = 0, -1, -2, \ldots$ で 1 位の極を持ち他では正則であることが分かる．また, $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}dt = 1$ より, 非負整数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ も分かる.

B 付録2: 解析の定理 (Poisson の和公式と Riemann-Lebesgue の補題).

この付録では, 本編で使われる解析理論の定理を 2 つ示す.

定理 B.1 (Poisson の和公式) $\mathbb{R}$ 上の急減少関数 [17] $f(x)$ に対して, Fourier 変換を $\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$ と置くと,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m).$$

[17] つまり, $f(x)$ は何回でも微分可能であり, かつ任意の非負整数 $m, n \ge 0$ に対して $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^m \frac{d^n f}{dx^n}(x)\right| < \infty$ となるもの．本編では $f(x) = e^{-\pi tx^2}$ に対してこの定理を適用する.

証明　$g(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ と置くと $g(x)$ は周期 1 を持つ. $g(x)$ の Fourier 展開は $g(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)e^{-2\pi imt}dt\right) e^{2\pi imx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi imt}dt\right) e^{2\pi imx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m)e^{2\pi imx}$. ここで $x=0$ と置くと $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m)$ を得る. □

定理 B.2 (Riemann-Lebesgue の補題) Lebesgue 可積分関数 $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ に対して Fourier 変換 $\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$ は $\lim_{\xi\to\pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ を満たす.

証明　$L^1(\mathbb{R})$ の中で, コンパクト台をもつ C^∞ 級関数[18] 全体は稠密なので, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $||f-g||_{L^1} < \epsilon$ となる, コンパクト台をもつ C^∞ 級関数 $g(x)$ が存在する. この時, 部分積分を使うと $\limsup_{\xi\to\pm\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right| \le \limsup_{\xi\to\pm\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)-g(x))e^{-2\pi ix\xi}dx\right| + \limsup_{\xi\to\pm\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi ix\xi}dx\right| < \epsilon + \limsup_{\xi\to\pm\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i\xi} g'(x)e^{-2\pi ix\xi}dx\right| \le \epsilon + \limsup_{\xi\to\pm\infty} \frac{1}{2\pi|\xi|} \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|\, dx = \epsilon$. ここで $\epsilon > 0$ は任意だったので定理を得る. □

[18]何回でも微分可能な関数のこと.