シンプレクティック双対性入門

疋田 辰之

1　はじめに

本講座の目的は比較的最近になって Braden-Licata-Proudfoot-Webster [1] によって提唱されたシンプレクティック双対性と呼ばれる現象について紹介することです．まずこれは専門用語を用いるなら錐的シンプレクティック特異点解消 (英語では conical symplectic resolution, 以下長いので CSR と略する) と呼ばれる特別なクラスの代数多様体の間の双対性です．双対性と言っているのは二つの CSR の間に何かしら不思議な関係があるというくらいの意味であり, [1] では双対だと考えられる CSR に対して観察される様々な性質が列挙されています．しかしながら [1] の内容に関して予備知識をあまり仮定せずに解説するのは難しいので, 扱う対象をハイパートーリック多様体と呼ばれる比較的扱いやすいクラスの CSR に制限し, 内容についても (私の偏見に基づいて) 一つの側面に絞って解説していきたいと思います．

2　背景

シンプレクティック双対性は幾何学的表現論と呼ばれる分野に属する予想です．幾何学的表現論について解説するには様々な予備知識が必要ですので, ここではその基本的な考え方や雰囲気を説明するに留めます．詳しいことを勉強したい人のためにいくつか文献を挙げますが, 読まなくても論理的には (多分) 問題ありません．

まず表現論とは群や結合代数などの代数系を線形代数で「表現」して研究する分野です．例えば群 G の表現というのはベクトル空間 V とその上への G の作用の組のことを指します．つまり各 $g \in G$ に対して線形写像 $\rho(g) : V \to V$ が定まり, それらが $\rho(g) \circ \rho(h) = \rho(gh)$ や $\rho(e) = \mathrm{id}_V$ という関係式を満たすことを言います ($e \in G$ は単位元)．そして幾何学的表現論というのは群や結合代数などの表現, あるいはそれらのなす圏を幾何学的に構成して調べる分野です．

例えば群 G が作用する空間が何かあったとします．このときその空間を「線形化」することで G の表現が得られます．線形化という言葉はここでは考えているクラスの空間 X に対してベクトル空間 $H(X)$ を対応させ, 空間の間の写像 $f : X \to Y$ に対して線形写像 $f^* : H(Y) \to H(X)$ を対応させる方法であって, 合成可能な射 f, g があったとき $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ を満たすものという意味で用いています．つまり圏論の言葉を用いれば空間のなす圏からベクトル空間のなす圏への反変関手のことです．

線形化の例としては例えば X 上の関数全体を対応させるというものがあります．ここでどのような関数を許容するかは考えている幾何学に依存します．例えばもし X が C^∞ 級多様体ならば C^∞ 級関数を考えるのが自然でしょうし, X が複素多様体の構造を持つならば正則関数を考えることもできます．そして X が代数多様体の場合には多項式関数全体 (座標環と呼ぶ) を考えることになります．ここで ($\mathbb{C}$ 上の) 代数多様体とは大雑把に言えば $\mathbb{C}^n$ の中でいくつかの多項式の共通零点で表される部分集合 (アフィン代数多様体と呼ぶ) を貼

り合わせて得られるもののことです．このとき f^* は関数の引き戻しによって定義されます．もしベクトル束の言葉を知っていれば, これを少し一般化して G が作用する (G 同変な) ベクトル束の切断全体を考えることでも G の表現が得られます．

G が Lie 群などのように幾何的な構造を持つ場合, 例えば X として等質空間 G/H を考えることにより G が作用する空間が自然に構成できます．ここで H は G の閉部分群です．また H の表現が与えられるとそれから自然に G/H 上の G 同変なベクトル束を構成することができ, 切断を考えることで G の表現が得られます．この考え方の基本的な例として $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ を可逆な $\mathbb{C}$ 上の $n \times n$ 行列全体のなす群, B を上三角行列からなる G の部分群とし, $X = G/B$ とします．これは旗多様体と呼ばれ, 代数多様体の構造を持つことが知られています．このとき G の $\mathbb{C}$ 上の有限次元既約表現は G/B 上の直線束の切断の空間として実現できることが知られています (Borel-Weil-Bott の定理).

別の典型的な線形化の例としては X のコホモロジーを考えるというものがあります．コホモロジーについては以下で説明しますが, それが特に X の位相空間としての構造だけから決まっているということに注意しておきます[*1]．例えば再び $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ とし, $X = G/B$ の場合を考えてみます．このとき G の自然な作用がコホモロジーに誘導する作用は自明になってしまいますが, 少し工夫をすると別の有限群の非自明な作用を構成することができます．W を n 次対称群とし, T を対角行列からなる G の部分群とします．W は成分の置換によって自然に $\mathbb{C}^n$ に作用するので群準同型 $W \to G$ が得られます．これは単射になるので $W \subset G$ とみなすと, 任意の $w \in W$ に対して $wT = Tw$ が成り立ちます．よって W の G/T への右作用を $gT \cdot w := gwT$ と定めるとこれは well-defined になります．これで W が G/T のコホモロジーに作用することがわかりますが, B/T は位相空間としては可縮なので G/T のコホモロジーと G/B のコホモロジーは同型になります．この同型を経由して G/B のコホモロジーにも W が非自明に作用しており, W の表現としては正則表現と呼ばれるものと同型になることが知られています．

実はこの W 作用は別の方法で構成することもできます．その一つに合成積を用いる方法があり, 幾何学的表現論の基本的な手法になっています．詳しいことが知りたい場合は [2] を参照してください．この方法を用いると空間そのものに群が作用していない場合でも, そのコホモロジーに群や結合代数の作用を構成することができます．例としては Springer ファイバーと呼ばれる G/B の閉部分代数多様体があります．これは $n \times n$ の冪零行列 (つまり $Y^n = 0$ を満たす行列) Y に付随して定まる代数多様体で, 定義は $\{gB \in G/B \mid g^{-1}Yg \text{ が上三角 }\}$ で与えられます．そして n 次対称群の既約表現は全て Springer ファイバーの最高次のコホモロジーに実現できるということが知られています (Springer 対応).

上で述べたように幾何学的表現論において旗多様体は重要な例になっています．またここでは説明できませんが半単純 Lie 代数の表現のなす圏を幾何的に実現するにも, 半単純 Lie 群に付随する旗多様体が用いられます (Beilinson-Bernstein 対応). このことに関する日本語で読める解説としては [4] を挙げておきます．そしてまた旗多様体の余接空間は CSR の重要な例にもなっています．CSR に纏わる幾何学的表現論の研究で重要な問題として, 旗多様体に対して知られている様々な重要な結果のうち何がどのような形で一般化できるのかを理解するということが挙げられます．そのためには古くから知られている結果を一般化できるように定式化し直す必要があることもあり, その結果としてより自然な理解が得られるということもあり得るでしょう．

[*1] (代数幾何を知っている人向けの注) X が代数多様体の場合, 位相としては Zariski 位相を考えるのが自然かもしれませんが, ここでは $\mathbb{C}$ の位相から誘導される位相を考えています．

3 コホモロジー

この講義に限らず現代数学においてコホモロジー論は非常に重要な道具ですので, ここでコホモロジーがどういうものなのかについて簡単に説明しておきます*2. ただしその構成について説明するには時間がかかるので, ここではそれが満たす性質 (Eilenberg-Steenrod の公理) のみ述べることにします. 構成などの詳細について気になる人は位相幾何学の教科書を見てください.

Eilenberg-Steenrod の公理ではまずコホモロジーを位相空間のペアに対して考えます. ここで位相空間のペア (X, A) とは位相空間 X とその部分空間 $A \subset X$ の組のことを指します. (X, A) から (Y, B) への射とは連続写像 $f : X \to Y$ であって $f(A) \subset B$ を満たすものを言います. 二つの射 $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ がホモトピックとは射 $F : (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \to (Y, B)$ が存在して任意の $x \in X$ に対して $f(x) = F(x, 0)$, $g(x) = F(x, 1)$ が成り立つことを言います.

コホモロジー論とは任意の位相空間のペア (X, A) と $i \in \mathbb{Z}$ に対してアーベル群 $H^i(X, A)$ と準同型 $\delta_{(X,A)} : H^i(A, \emptyset) \to H^{i+1}(X, A)$ を対応させ, 射 $f : (X, A) \to (Y, B)$ に対して準同型 $f^* : H^i(Y, B) \to H^i(X, A)$ を対応させる方法であって以下の条件を満たすもののことを言います.

1. 任意の $f : (X, A) \to (Y, B)$, $g : (Y, B) \to (Z, C)$ に対して $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, $f^* \circ \delta_{(X,A)} = \delta_{(Y,B)} \circ (f|_A)^*$ が成り立つ.
2. $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ がホモトピックのとき $f^* = g^*$ が成り立つ.
3. 次の完全系列が存在する.
$$\cdots \to H^i(X, A) \to H^i(X, \emptyset) \to H^i(A, \emptyset) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(X, A) \to \cdots$$
4. $U \subset X$ の閉包が $A \subset X$ の内部に含まれるとき $H^i(X, A) \xrightarrow{\simeq} H^i(X - U, A - U)$ が成り立つ.
5. $(X, A) = \coprod_\alpha (X_\alpha, A_\alpha)$ が非連結和のとき, $H^i(X, A) \xrightarrow{\simeq} \prod_\alpha H^i(X_\alpha, A_\alpha)$ が成り立つ.
6. pt を一点からなる位相空間とするとき, $i \neq 0$ に対して $H^i(\mathrm{pt}, \emptyset) = 0$ が成り立つ.

単なる位相空間 X は $(X, \emptyset)$ と考えることで自然に位相空間のペアとみなし, $H^i(X) := H^i(X, \emptyset)$ とおきます. また $H^0(\mathrm{pt})$ をコホモロジーの係数と呼び, ここではそれを $\mathbb{C}$ と取ることにします. ちなみに上の条件のうち公理 6 以外を満たすものを一般コホモロジー論と呼び, 幾何学的表現論でも公理 6 を満たさないコホモロジー論を扱う場合があります. さらに任意の X に対して $H^*(X) := \oplus_i H^i(X)$ が次数付き可換な環構造を持つとき乗法的であると言います. ここで次数付き可換とは $a \in H^i$ と $b \in H^j$ に対して $a \cdot b = (-1)^{ij} b \cdot a$ が成り立つことを意味しています. ここで考える特異コホモロジーなどのコホモロジー論はカップ積と呼ばれる積構造によって乗法的になることが知られています.

良い位相空間 (例えば CW 複体と同相なもの) に対しては上の公理からそのコホモロジーは計算されます. 例えば上の公理のみを用いて n 次元球面 $S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}$ (ただし $n \geq 1$) のコホモロジーは

$$H^i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{C} & (i = 0, n \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq 0, n \text{ のとき}) \end{cases}$$

と計算できます.

---

*2 コホモロジー論には様々な種類がありますが, ここで想定しているのは例えば特異コホモロジーと呼ばれるものです.

4　射影空間

簡単な場合のコホモロジーの計算の雰囲気を見るために複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ のコホモロジーを計算してみます. まず $\mathbb{P}^n$ の定義は商空間として

$$\mathbb{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^{\times}$$

で与えられます. ここで $\mathbb{C}^{\times} := \mathbb{C} - \{0\}$ は掛け算によって群とみなしており, その $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ への作用は $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$, $(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ に対して $\lambda \cdot (z_0, \ldots, z_n) = (\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n)$ で与えられます. 定義から $z_n = 0$ で定まる $\mathbb{P}^n$ の閉部分空間は $\mathbb{P}^{n-1}$ と同型で, その補集合 (つまり $z_n \neq 0$ となる点全体) はその点の代表として $(z_0, \ldots, z_{n-1}, 1)$ という形のものが取れるので $\mathbb{C}^n$ と同型になります. 特にこれを繰り返すことで閉部分空間の列

$$\emptyset \subset \mathbb{P}^0 \subset \cdots \subset \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$$

であって, 各補集合が $\mathbb{C}$ の直積と同型なものが取れることがわかります. このことを用いて帰納的にコホモロジーを計算します.

まずは位相空間のペア $(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n-1})$ のコホモロジーを計算します. そのために $p \in \mathbb{P}^n$ を $(0, \ldots, 0, 1)$ が定める点とすると自然な射 $i : \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^n - \{p\}$ はホモトピー同値を定めることに注意します. 実際, $f : \mathbb{P}^n - \{p\} \to \mathbb{P}^{n-1}$ を $f(z_0, \ldots, z_n) = (z_0, \ldots, z_{n-1}, 0)$ から定まる射とすると $f \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^{n-1}}$ であり, $i \circ f$ は $\mathrm{id}_{\mathbb{P}^n - \{p\}}$ とホモトピックになります. したがって $i^* : H^i(\mathbb{P}^n - \{p\}) \xrightarrow{\simeq} H^i(\mathbb{P}^{n-1})$ は同型を与えます. このことと公理 3 から $H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n-1}) \simeq H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n - \{p\})$ となりますが, さらに公理 4 を $U = \mathbb{P}^{n-1}$ として適用するとこれは $H^i(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - \{0\})$ と同型になります. 一方で $\mathbb{C}^n$ は可縮であり $\mathbb{C}^n - \{0\}$ は S^{2n-1} とホモトピー同値であることから, 公理 3 を用いると

$$H^i(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n - \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{C} & (i = 2n \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq 2n \text{ のとき}) \end{cases}$$

がわかります. $H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n-1})$ が計算できれば

$$H^i(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{C} & (i = 0, 2, \ldots, 2n \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

となることは n に関する帰納法と公理 3 を用いることで容易にわかります. ちなみに環構造も考慮に入れると

$$H^*(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{C}[u]/(u^{n+1}) \tag{1}$$

となることが知られています. ここで u の次数は 2 としています.

一般にコンパクト位相空間 X に閉部分空間の列

$$\emptyset \subset X_0 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n = X$$

であって, $X_k - X_{k-1}$ がある $m(k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\mathbb{C}^{m(k)}$ と同相になるようなものが取れるとき, そのコホモロジーは

$$H^i(X) \cong \mathbb{C}^{\#\{k \mid m(k) = i/2\}} \tag{2}$$

となることが示せます．このような閉部分空間の列のことをセル分割と言います．例えば旗多様体などはをセル分割を持つことが知られています．このとき特に奇数次のコホモロジーは消えており, コホモロジー環は可換環になることに注意しておきます．

5　ハイパートーリック多様体

ここで今回の主要な登場人物であるハイパートーリック多様体を導入します．まずデータとして次の完全系列が与えられているとします．

$$0 \to \mathbb{Z}^{n-d} \xrightarrow{{}^t b} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{a} \mathbb{Z}^d \to 0 \tag{3}$$

ここで $\mathbb{Z}^n$ の元などは行ベクトルとみなし, a は行列 ${}^t(a_1, \dots, a_n)$, $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{id}) \in \mathbb{Z}^d$, による右からの掛け算で与えられるとします．同様に b は行列 ${}^t(b_1, \dots, b_n)$, $b_i = (b_{i1}, \dots, b_{i,n-d}) \in \mathbb{Z}^{n-d}$ で与えられるとします．この完全系列から代数的トーラス $T^n := (\mathbb{C}^\times)^n$ の間の完全系列

$$1 \to T^{n-d} \xrightarrow{B} T^n \xrightarrow{A} T^d \to 1$$

が定まります． ここで $B,\ A$ はそれぞれ $B(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}) = (\lambda_1^{b_{11}} \cdots \lambda_{n-d}^{b_{1,n-d}}, \dots, \lambda_1^{b_{n1}} \cdots \lambda_{n-d}^{b_{n,n-d}})$, $A(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1^{a_{11}} \cdots \lambda_n^{a_{n1}}, \dots, \lambda_1^{a_{1d}} \cdots \lambda_n^{a_{nd}})$ で与えられます．以下で具体的に説明しますが, ハイパートーリック多様体とは B によって誘導される T^{n-d} の $T^*\mathbb{C}^n$ への作用に関するハミルトン簡約として定義される多様体です．

いくつか記号などの準備をします．まず $\mathbb{B} := \{I \subset \{1, \dots, n\} \mid |I| = d$ であり, $\{a_i\}_{i \in I}$は一次独立 $\}$ とおきます．そして a がユニモジュラーであるという性質を任意の $I \in \mathbb{B}$ に対して $\{a_i\}_{i\in I}$ が $\mathbb{Z}$ 上 $\mathbb{Z}^d$ を生成することと定義します．これはハイパートーリック多様体が滑らかであることを保証する条件で, 以下では常に a はユニモジュラーであると仮定します．また $C \subset \{1, \dots, n\}$ がサーキット[*3]であるとは $\{a_i\}_{i \in C}$ が $\{a_1, \dots, a_n\}$ の一次従属な部分集合のうち極小なものになっていることと定義します．C がサーキットであるとすると a がユニモジュラーなことから一次関係式の係数は ± 1 で取れることがわかるので, 分割 $C = C_+ \sqcup C_-$ があって $\sum_{i \in C_+} a_i - \sum_{i \in C_-} a_i = 0$ が成り立ちます．このとき i 番目の成分が $i \in C_\pm$ なら ± 1, $i \notin C$ なら 0 で与えられる $\mathbb{Z}^n$ の元は a の核に入るので, (3) の完全性からある $\beta_C \in \mathbb{Z}^{n-d}$ が存在してこれは ${}^t b(\beta_C)$ と書けます．β_C は符号を除いて C から一意的に定まります．

T^n は $T^*\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{2n}$ に $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot (z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n) = (\lambda_1 z_1, \dots, \lambda_n z_n, \lambda_1^{-1} w_1, \dots, \lambda_n^{-1} w_n)$ と自然に作用します．また射 $\mu : T^*\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-d}$ を $\mu(z, w) := \sum_{i=1}^n z_i w_i b_i$ と定めます．これは $T^{n-d} \subset T^n$ の作用に関するモーメント写像と呼ばれるものになっています．そして GIT[*4]安定性条件と呼ばれるパラメータ $\theta \in \mathbb{Z}^{n-d}$ を十分一般的に取ります．ここで十分一般的とは任意のサーキット C に対して $\langle \theta, \beta_C \rangle \neq 0$ が成り立つことを意味しています．また $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-d})$ は $\theta(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}) = \lambda_1^{\theta_1} \cdots \lambda_{n-d}^{\theta_{n-d}}$ によって群準同型 $\theta : T^{n-d} \to \mathbb{C}^\times$ を定めることに注意します．$T^*\mathbb{C}^n$ の点 p が θ-半安定であるということをある $T^*\mathbb{C}^n$ 上の多項式関数 $f(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ と $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して, 任意の $\lambda \in T^{n-d}$ に対して $f(\lambda^{-1} \cdot (z, w)) = \theta(\lambda)^m f(z, w)$ (つまり f は重さ $m\theta$) と $f(p) \neq 0$ が成り立つことと定義します．以上の準備の元でハイパートーリック多様体 $X = X(a, \theta)$ は

$$X(a, \theta) := \mu^{-1}(0)^{\theta\text{-ss}} / T^{n-d}$$

[*3] この用語はマトロイドの理論から来ていると思われます．

[*4] geometric invariant theory (幾何学的不変式論) の略．

と定義されます．ここで $\mu^{-1}(0)^{\theta\text{-ss}}$ は $\mu^{-1}(0)$ の θ-半安定な点全体からなる部分集合を表します．

6 自明な例

ハイパートーリック多様体の一般的な性質を調べる前にいくつかの典型的な例について様子を見ておくことにします．まずは自明な例として $d=0$ の場合を考えてみます．このとき $a_i=0$ であり, $\mu=0$ という条件は $z_iw_i=0$ $(i=1,\dots,n)$ と同値になります．また GIT 安定性条件 $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_n)$ が十分一般的という条件は $\theta_i\neq 0$ を意味しているので θ-半安定な点は各 i について $\theta_i<0$ なら $z_i\neq 0$, $\theta_i>0$ なら $w_i\neq 0$ を満たします．よって $z_iw_i=0$ からもう一方の成分は 0 であり, T^n の作用によって θ-半安定な点は全て互いに移りあうことがわかります．したがってこの場合 X は 1 点と同型になります．一般に $a_i=0$ となる i が存在するときはそのような i を忘れても同じハイパートーリック多様体が得られます．

次に $d=n$ の場合を考えてみます．このとき $b_i=0$ であり $\mu=0$ という条件は自動的に満たされます．割るトーラスは自明なので $X\cong T^*\mathbb{C}^n$ となります．一般に $b_i=0$ となる i が存在するとき, そのような i を忘れて得られるハイパートーリック多様体を X' とすれば $X\cong X'\times T^*\mathbb{C}$ となります．

7 $T^*\mathbb{P}^{n-1}$

次にデータを $d=n-1$ として $b_i=1$, $a_1=(1,0,\dots,0),\dots,a_{n-1}=(0,\dots,0,1), a_n=(-1,\dots,-1)$, $\theta=-1$ と取ります．このとき $\mu(z,w)=\sum_{i=1}^n z_iw_i$ であり, z_i の重さは -1 で w_i の重さは 1 なので重さが $m\theta$ の単項式は必ずある z_i を含みます．したがって $\tilde{U}_i:=\{(z,w)\in\mu^{-1}(0)\mid z_i\neq 0\}$ とおけば $\mu^{-1}(0)^{\theta\text{-ss}}=\cup_i\tilde{U}_i$ が成り立つことがわかります．射 $\tilde{\phi}_i:\tilde{U}_i\to\mathbb{C}^{2n-2}$ を $\tilde{\phi}_i(z,w):=(z_1/z_i,\dots,z_n/z_i,z_iw_1,\dots,z_iw_n)$ (ただし z_i/z_i と z_iw_i の成分は除く) と定めると, これは $T^{n-d}=\mathbb{C}^\times$-軌道上で一定なので射 $\phi_i:U_i\to\mathbb{C}^{2n-2}$ を定め, これは同型になることがわかります．つまり ϕ_i は U_i 上の局所座標を与えています．$k\neq i$ に対して $z_k^i:=z_k/z_i$, $w_k^i:=z_iw_k$ とおくと, $U_i\cap U_j$ 上で座標変換は $z_i^j=1/z_j^i$, $w_i^j=-z_j^i\sum_{k\neq i}z_k^iw_k^i$ となり, $k\neq i$ に対しては $z_k^j=z_k^i/z_j^i$, $w_k^j=z_j^iw_k^i$ が成り立ちます．

定義から w 方向を忘れると上の構成は $\mathbb{P}^{n-1}$ を与えています．特に z_j^i に関する座標変換の式は $\mathbb{P}^{n-1}$ のものと一致します．そして w 方向も考慮に入れるとこれは $\mathbb{P}^{n-1}$ の余接空間を与えていることがわかります．実際, $U_i\cap U_j$ 上で

$$dz_i^j=\begin{cases}1/z_j^idz_k^i-z_k^i/(z_j^i)^2dz_j^i & (k\neq i\text{ のとき})\\ -1/(z_j^i)^2dz_j^i & (k=i\text{ のとき})\end{cases}$$

が成り立つことに注意すると

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq j}w_k^jdz_k^j&=\sum_{k\neq i,j}\left(w_k^j/z_j^idz_k^i-z_k^iw_k^j/(z_j^i)^2dz_j^i\right)-w_i^j/(z_j^i)^2dz_j^i\\&=\sum_{k\neq i,j}(w_k^idz_k^i-z_k^iw_k^i/z_j^idz_j^i)+\sum_{k\neq i}z_k^iw_k^i/z_j^idz_j^i\\&=\sum_{k\neq i}w_k^idz_k^i\end{aligned}$$

が成り立ちますが, これは w_k^i の座標変換が余接方向の座標変換と一致していることを示しています．よってこの場合 $X\cong T^*\mathbb{P}^{n-1}$ となることが言えました．また上の式を外微分すると $U_i\cap U_j$ 上で $\sum_{k\neq j}dz_k^j\wedge dw_k^j=$

$\sum_{k\neq i} dz_k^i \wedge dw_k^i$ となることがわかりますが, これは U_i 上 $\sum_{k\neq i} dz_k^i \wedge dw_k^i$ で与えられるシンプレクティック形式が全体に貼り合うことを意味しています. よって X は (代数的な) シンプレクティック構造を持つことがわかります[*5].

次に $T^*\mathbb{P}^{n-1}$ が特異点解消になっていることを見てみます. $\mathbb{C}^{n^2}$ の座標を u_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ と書き,

$$\overline{\mathcal{O}_{\min}} := \{(u_{ij})_{i,j} \in \mathbb{C}^{n^2} \mid \sum_{i=1}^{n} u_{ii} = 0, u_{ij}u_{kl} = u_{il}u_{kj} (\forall i, j, k, l)\}$$

と定義します. $\mathbb{C}^{n^2}$ の元を行列と思えばこれはトレースと 2×2 の小行列式が全て 0 になるという方程式で定義されるアフィン代数多様体になっており, 極小冪零軌道と呼ばれるものの閉包になっています. これは原点のみに特異点を持ち, $\pi : T^*\mathbb{P}^{n-1} \to \overline{\mathcal{O}_{\min}}$ を $\pi(z, w) = (z_i w_j)_{i,j}$ と定めるとこれは well-defined になります. また $u_{ij} \neq 0$ で定義される $\overline{\mathcal{O}_{\min}}$ の開集合を U_{ij} と書くと $\mathcal{O}_{\min} := \overline{\mathcal{O}_{\min}} - \{0\} = \cup_{ij} U_{ij}$ であり, $U_{ij} \to U_i$ を $z_k^i = u_{kj}/u_{ij}$, $w_k^i = u_{ik}$ で定めればこれは $w_j^i \neq 0$ で定義される U_i の開集合との間の同型を与えることがわかります. したがって $T^*\mathbb{P}^{n-1} - \mathbb{P}^{n-1} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_{\min}$ は同型になります. つまり π は双有理射であり非特異点のなす部分集合上では同型になっています. また説明は省きますがこれは固有射でもあるので, 特に特異点解消になっていることがわかります.

最後に $T^*\mathbb{P}^{n-1}$ に対して§ 2 で述べた二つの線形化をそれぞれ考えてみます. まずコホモロジー環で与えられる線形化は $T^*\mathbb{P}^{n-1}$ が $\mathbb{P}^{n-1}$ とホモトピー同値であることから (1) より

$$H^*(T^*\mathbb{P}^{n-1}) \cong \mathbb{C}[u]/(u^n) \tag{4}$$

となります. 一方で π による引き戻しを考えることで座標環の間の準同型写像 $\pi^* : \mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}_{\min}}] \to \mathbb{C}[T^*\mathbb{P}^{n-1}]$ が得られますが, これは同型になっています. 実際, まず $T^*\mathbb{P}^{n-1}$ 上の多項式関数は制限によって $T^*\mathbb{P}^{n-1} - \mathbb{P}^{n-1} \cong \mathcal{O}_{\min}$ 上の多項式関数を定めます. 一方で $\overline{\mathcal{O}_{\min}}$ は正規という性質を持つことが知られていて, $\mathcal{O}_{\min}$ の補集合の余次元は 2 以上なので代数幾何の一般論から $\mathcal{O}_{\min}$ 上の多項式関数は一意的に $\overline{\mathcal{O}_{\min}}$ 上の多項式関数に延びることがわかります. したがって元の $T^*\mathbb{P}^{n-1}$ 上の多項式関数は π による引き戻しで得られる多項式関数と空でない (Zariski) 開集合上で一致するので全体でも一致します. よって

$$\mathbb{C}[T^*\mathbb{P}^{n-1}] \cong \mathbb{C}[u_{ij}]/\left(\sum_i u_{ii}, u_{ij}u_{kl} - u_{il}u_{kj}\right) \tag{5}$$

となります. 右辺は $\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]$ の中で T^{n-d}-不変な多項式からなる部分環 $\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^{T^{n-d}}$ と同型であることに注意しておきます.

8 A 型最小特異点解消

次に $T^*\mathbb{P}^{n-1}$ とは双対な例を見てみます. データとしては $T^*\mathbb{P}^{n-1}$ の場合で a と b を入れ替えたものを考えます. つまり $d = 1$, $a_i = 1$, $b_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, b_{n-1} = (0, \ldots, 0, 1), b_n = (-1, \ldots, -1)$ とします. また $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ は $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} < 0$ が成り立つように取ります. このときモーメント写像は $\mu(z, w) = (z_1 w_1 - z_n w_n, \ldots, z_{n-1} w_{n-1} - z_n w_n)$ となります. またもしある $c_i \in \mathbb{Z}$ に対して単項式 $f = \prod_{i:c_i<0} z_i^{-c_i} \prod_{i:c_i>0} w_i^{c_i}$ の重さが θ だとすると $\theta = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i$ が成り立ち, $\theta_i = c_i - c_n$ となるので

[*5] 一般に滑らかな (代数) 多様体の余接空間は自然なシンプレクティック構造を持ちます.

$c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ が成り立ちます．よってある i が存在して f は $z_1 \cdots z_{i-1} w_{i+1} \cdots w_n$ で割り切れることがわかります．よって $\tilde{U}_i := \{(z,w) \in \mu^{-1}(0) \mid z_1 \cdots z_{i-1} w_{i+1} \cdots w_n \neq 0\}$ とおけば $\mu^{-1}(0)^{\theta\text{-ss}} = \cup_i \tilde{U}_i$ が成り立ちます．また $\tilde{\phi}_i : \tilde{U}_i \to \mathbb{C}^2$ を $\tilde{\phi}_i(z,w) = (z_1 \cdots z_i w_{i+1}^{-1} \cdots w_n^{-1}, z_1^{-1} \cdots z_{i-1}^{-1} w_i \cdots w_n)$ と定めるとこれは T^{n-1}-軌道上で一定なので $\phi_i : U_i := \tilde{U}_i / T^{n-1} \to \mathbb{C}^2$ を定め，これは同型になることもわかります．よって ϕ_i は U_i 上の局所座標を定めます．$z_i^i := z_1 \cdots z_i w_{i+1}^{-1} \cdots w_n^{-1}$, $w_i^i := z_1^{-1} \cdots z_{i-1}^{-1} w_i \cdots w_n$ とおけば $U_i \cap U_j$ 上で座標変換は $z_j^j = (z_i^i)^{j-i+1}(w_i^i)^{j-i}$, $w_j^j = (z_i^i)^{i-j}(w_i^i)^{i-j+1}$ となります．よって $U_i \cap U_j$ 上で

$$\begin{aligned} dz_j^j \wedge dw_j^j &= \Big((j-i+1) z_j^j / z_i^i dz_i^i + (j-i) z_j^j / w_i^i dw_i^i\Big) \wedge \Big((i-j) w_j^j / z_i^i dz_i^i + (i-j+1) w_j^j / w_i^i dw_i^i\Big) \\ &= dz_i^i \wedge dw_i^i \end{aligned}$$

となるので U_i 上のシンプレクティック形式 $dz_i^i \wedge dw_i^i$ は貼り合って X 上のシンプレクティック形式を定めます．

また A 型 Klein 特異点と呼ばれるアフィン代数多様体を

$$\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) := \{(x,y,u) \in \mathbb{C}^3 \mid xy - u^n = 0\}$$

と定義し，$\pi : X \to \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ を $x = z_1 \cdots z_n$, $y = w_1 \cdots w_n$, $u = z_1 w_1 (= z_2 w_2 = \cdots = z_n w_n)$ と定めるとこれは well-defined です．また $\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は原点にのみ特異点を持ち，$\{x \neq 0\} \subset \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ から $U_n \subset X$ への射を $(x,y,u) \mapsto (z_n^n = x, w_n^n = u/x)$ で，$\{y \neq 0\} \subset \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ から $U_1 \subset X$ への射を $(x,y,u) \mapsto (z_1^1 = u/y, w_1^1 = y)$ で，それぞれ定めるとこれは π の制限 $X - \pi^{-1}(0) \to \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) - \{0\}$ の逆を与えることがわかります．したがって X は $\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ の特異点解消を与えています．実際はより強く，$\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ の最小特異点解消 $\widetilde{\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}$ と呼ばれるものになっていることも知られています．

次に $\pi^{-1}(0)$ について調べてみます[*6]．まず U_i 上では $\pi(z_i^i, w_i^i) = ((z_i^i)^{n-i+1}(w_i^i)^{n-i}, (z_i^i)^{i-1}(w_i^i)^i, z_i^i w_i^i)$ となります．よって $\pi^{-1}(0) \cap U_i$ は $i = 1$ のときは $\{w_1^1 = 0\} \cong \mathbb{C}$, $i = 2, \ldots, n-1$ のときは $\{z_i^i = 0\} \cup \{w_i^i = 0\} \cong \mathbb{C} \cup \mathbb{C}$, $i = n$ のときは $\{z_n^n = 0\} \cong \mathbb{C}$ となります．また $|i-j| > 1$ のときは $U_i \cap U_j$ 上で $z_i^i w_i^i \neq 0$ であることから $\pi^{-1}(0) \cap U_i \cap U_j = \emptyset$ となります．そして $U_i \cap U_{i+1}$ 上では $w_{i+1}^{i+1} = 1/z_i^i$ となることから $\{w_i^i = 0\} \cup \{z_{i+1}^{i+1} = 0\} \cong \mathbb{P}^1$ となります．したがって $\pi^{-1}(0)$ は $\mathbb{P}^1$ を $n-1$ 本繋げたものになっていることがわかります．ちなみにこの $\mathbb{P}^1$ の交わり方をグラフで表すと A_{n-1} 型の Dynkin 図形が出てくることに注意しておきます．またこれは A 型 Springer ファイバーの例にもなっています．

最後に二つの線形化を記述しておきます．まず $\widetilde{\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}$ は $\pi^{-1}(0)$ とホモトピー同値であることが知られているのでそのコホモロジーは $\pi^{-1}(0)$ のコホモロジーと一致します．また $\pi^{-1}(0)$ はセル分割を持つので (2) から

$$H^i(\widetilde{\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & (i = 0 \text{ のとき}) \\ \mathbb{C}^{n-1} & (i = 2 \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq 0, 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となります．次数の関係で環構造は

$$H^*(\widetilde{\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}) \cong \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_{n-1}]/(u_i u_j \mid 1 \leq i, j \leq n-1) \tag{6}$$

[*6] より正確にはその被約化を考えています．

となります．ここで u_i の次数は 2 としています．また $\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が正規であることを用いると $T^*\mathbb{P}^{n-1}$ の場合と同様に座標環は

$$\mathbb{C}[\widetilde{\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}] \cong \mathbb{C}[\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})] = \mathbb{C}[x,y,u]/(xy-u^n) \tag{7}$$

となります．再び右辺は $\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^{T^{n-d}}$ と同型になっていることに注意しておきます．

9　一般の場合

一般のハイパートーリック多様体の性質についていくつか説明します．§ 6 で述べたことから任意の i に対して $a_i \neq 0$ が成り立つとしても得られるハイパートーリック多様体は変わらないので簡単のため以降この条件を仮定することにします．

まずいくつか記号の準備をします．§ 5 でサーキットに付随する $\mathbb{Z}^{n-d}$ の元について述べましたが，$I \in \mathbb{B}$ と $j \in I^c := \{1,\ldots,n\} \setminus I$ に対して $I \cup \{j\}$ に含まれる唯一のサーキットから定まる $\mathbb{Z}^{n-d}$ の元を β_j^I と書くことにします．ここで ${}^t b(\beta_j^I)$ の j 番目の成分は 1 になるように符号を選ぶことにします．定義から $I \in \mathbb{B}$, $j, j \in I^c$ とすると標準的な内積に関して

$$\langle b_j, \beta_{j'}^I \rangle = \delta_{j,j'} \tag{8}$$

が成り立ちます．特にこのことから任意の $I \in \mathbb{B}$ に対して $\{b_j\}_{j\in I^c}$ は一次独立であり，$\mathbb{Z}$ 上 $\mathbb{Z}^{n-d}$ を生成することが従います．つまり a がユニモジュラーであることから b がユニモジュラーになることが言えます．また GIT 安定性条件 θ を用いて I^c を $I^c_{\pm} := \{j \in I^c \mid \pm\langle \theta, \beta_j^I \rangle > 0\}$ と二つに分割しておきます．

次に θ-半安定という条件をより具体的に書き下します．そのためにまず次の補題を準備しておきます．

補題 1. $\sum_{i=1}^n m_i b_i = \theta$ が成り立つとき，ある $I \in \mathbb{B}$ が存在して任意の $j \in I^c$ に対して $m_j \neq 0$ でありその符号は $\langle \theta, \beta_j^I \rangle$ の符号と一致する．

証明. まず $I_0 := \{i \mid m_i = 0\}$ とおけば $\{a_i \mid i \in I_0\}$ は一次独立であることに注意します．実際，もし I_0 がサーキット C を含めば $\langle \theta, \beta_C \rangle = 0$ となって θ が十分一般的であったことに反します．もし $I_0 \in \mathbb{B}$ であれば $j \in I_0^c$ に対して $m_j = \langle \theta, \beta_j^{I_0} \rangle$ となるためこの I_0 が求める I になります．もし $I_0 \notin \mathbb{B}$ なら，$\{b_j \mid I_0^c\}$ の間には非自明な線形関係式が存在します．その一つを $\sum_{j\in I_0^c} n_j b_j = 0$ とし，$I_1 := \{j \in I_0^c \mid m_j + t n_j = 0\}$ が空でないような t のうち絶対値が最小のものを取ります．もし $I_0 \cup I_1 \in \mathbb{B}$ ならばこれが求める I であり，そうでなければ m_j を $m_j + t n_j$ に置き換えてから同じ議論を繰り返すことで最終的に求める $\mathbb{B}$ の元が得られます．□

補題 2. $p = (z,w) \in T^*\mathbb{C}^n$ が θ-半安定であることと，ある $I \in \mathbb{B}$ が存在して $z_j \neq 0$ $(\forall i \in I^c_-)$, $w_j \neq 0$ $(\forall j \in I^c_+)$ となることは同値である．

証明. もしある $I \in \mathbb{B}$ に対して $z_j \neq 0$ $(\forall i \in I^c_-)$, $w_j \neq 0$ $(\forall j \in I^c_+)$ が成り立てば $f = \prod_{j\in I^c_-} z_j^{-\langle \theta, \beta_j^I \rangle} \prod_{j\in I^c_+} w_j^{\langle \theta, \beta_j^I \rangle}$ と取ればこれは重さが θ であり，$f(p) \neq 0$ となるので p は θ-半安定になります．逆に p が θ-半安定であるとし，f を重さが $m\theta$ で $f(p) \neq 0$ となる多項式とします．まず f がいくつかの単項式の和であればそのいずれかは p で消えないため f をその単項式に置き換えることで f は単項式であるとして構いません．$f = \prod_{i=1}^n z_i^{c_i} w_i^{d_i}$ と書けば f の重さを見ることで $\sum_i (-c_i + d_i) b_i = m\theta$ が成り立つことがわかります．よって補題 1 よりある $I \in \mathbb{B}$ が存在して，$j \in I^c_{\pm}$ に対しては $\pm(-c_j + d_j) > 0$ が成り立ちます．特に $j \in I^c_-$ のときは $c_j > 0$, $j \in I^c_+$ のときは $d_j > 0$ なので $f(p) \neq 0$ から $z_j \neq 0$ $(\forall i \in I^c_-)$, $w_j \neq 0$ $(\forall j \in I^c_+)$ が従います．□

よって $\tilde{U}_I := \{(z,w) \in \mu^{-1}(0) \mid z_j \neq 0\,(\forall i \in I_-^c), w_j \neq 0\,(\forall j \in I_+^c)\}$ とおけば補題 2 より $\mu^{-1}(0)^{\theta\text{-ss}} = \cup_{I\in\mathbb{B}}\tilde{U}_I$ となり, $U_I := \tilde{U}_I/T^{n-d}$ とおけば $X = \cup_{I\in\mathbb{B}}U_I$ は X の開被覆を与えます．また $i \in I$ に対して関数 $z_i^I, w_i^I : \tilde{U}_I \to \mathbb{C}$ を

$$z_i^I := z_i \prod_{j\in I_-^c} z_j^{-\langle b_i,\beta_j^I\rangle} \prod_{j\in I_+^c} w_j^{\langle b_i,\beta_j^I\rangle} \tag{9}$$

$$w_i^I := w_i \prod_{j\in I_-^c} z_j^{\langle b_i,\beta_j^I\rangle} \prod_{j\in I_+^c} w_j^{-\langle b_i,\beta_j^I\rangle} \tag{10}$$

と定義し, これらを並べることで $\tilde{\phi}_I : \tilde{U}_I \to \mathbb{C}^{2d}$ を定めます．(8) より

$$b_i - \sum_{j\in I^c}\langle b_i,\beta_j^I\rangle b_j = 0 \tag{11}$$

が成り立つことに注意すると $\tilde{\phi}_I$ は T^{n-d}-作用で不変であることがわかるので, これは射 $\phi_I : U_I \to \mathbb{C}^{2d}$ を誘導します．また $\tilde{\psi}_I : \mathbb{C}^{2d} \to \tilde{U}_I$ を $i \in I$ に対しては $z_i = z_i^I$, $w_i = w_i^I$, $j \in I_-^c$ に対しては $z_j = 1$, $w_j = -\sum_{i\in I}\langle b_i,\beta_j^I\rangle z_i^I w_i^I$, $j \in I_+^c$ に対しては $w_j = 1$, $z_j = -\sum_{i\in I}\langle b_i,\beta_j^I\rangle z_i^I w_i^I$ と定めます．まず (8) より $\mu = 0$ は任意の $j \in I^c$ に対して $z_j w_j + \sum_{i\in I}\langle b_i,\beta_j^I\rangle z_i w_i = 0$ が成り立つことと同値であることに注意すると $\tilde{\psi}_I$ が well-defined であることがわかります．また $\psi_I : \mathbb{C}^{2d} \to U_I$ を $\tilde{\psi}_I$ と自然な射 $\tilde{U}_I \to U_I$ の合成とすると $\phi_I \circ \psi_I = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{2d}}$ となることは明らかであり, $\lambda = \prod_{j\in I_-^c} z_j^{-\beta_j^I} \prod_{j\in I_+^c} w_j^{\beta_j^I} \in T^{n-d}$ とおけば $\tilde{\psi}_I \circ \tilde{\phi}_I(z,w) = \lambda\cdot(z,w)$ となるので $\psi_I \circ \phi_I = \mathrm{id}_{U_I}$ も成り立ちます．よって $\phi_I : U_I \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}^{2d}$ は X の局所座標を与えており, 明示的には書きませんが座標変換は有理関数で与えられるので X は滑らかな代数多様体になることがわかります．

またハミルトン簡約の一般論から X はシンプレクティック形式を持つことがわかります．あるいは U_I 上のシンプレクティック形式 ω_I を $\omega_I := \sum_{i\in I} dz_i^I \wedge dw_i^I$ で定めると, $U_I \cap U_J$ 上で ω_I と ω_J が一致することを座標変換を計算することで直接証明することもできます．よってこれらのシンプレクティック形式は貼りあって X 上のシンプレクティック形式を定めます．

次に $\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^{T^{n-d}}$ について考えます．まず $u_i := z_i w_i$ とおけばこれは T^{n-d}-不変になります．$C^\vee = C_+^\vee \sqcup C_-^\vee \subset \{1,\ldots,n\}$ が符号付きコサーキットであるということを $\{b_j\}_{j\in C^\vee}$ が極小な $\{b_1,\ldots,b_n\}$ の一次独立部分集合であり $\sum_{j\in C_+^\vee} b_j - \sum_{j\in C_-^\vee} b_j = 0$ が成り立つことと定義します．符号付きコサーキット $C^\vee$ に対して $x_{C^\vee} := \prod_{j\in C_+^\vee} z_j \prod_{j\in C_-^\vee} w_j$ とおけばこれも T^{n-d} 不変になり, $\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^{T^{n-d}}$ は $u_1,\ldots,u_n$ と $x_{C^\vee}$ たちで $\mathbb{C}$ 上の代数として生成されることがわかります．符号付きコサーキットの個数を N とし, $\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^{T^{n-d}}$ のなかで $u_1,\ldots,u_n$ と $x_{C^\vee}$ たちが満たす関係式を定義方程式とする $\mathbb{C}^{n+N}$ の閉部分アフィン代数多様体を X_0 とおきます[*7]．定義から自然な射 $\pi : X \to X_0$ が存在し, これは GIT 商の一般論から固有射になります．

最後に π が双有理射になることを示してみます．まず $u_i \neq 0$ $(i = 1,\ldots,n)$ で定義される X_0 の開集合 U を考えます．$a_i \neq 0$ を仮定すると U は空ではないことが示せます．また各 $I \in \mathbb{B}$, $i \in I$ に対して $C_{I,i}^\vee$ を

[*7] 一般に可換環 R があればそれを多項式関数全体とするアフィン代数多様体 (正確にはスキーム) $\mathrm{Spec}(R)$ が定まります．この記号を用いると $X_0 := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^{T^{n-d}})$ と書けます．

$I^c \cup \{i\}$ に含まれる符号付きコサーキットであって $i \in C^\vee_{I,i,+}$ となるものとすると,

$$x_{C^\vee_{I,i}} = z_i^I \cdot \prod_{j \in C^\vee_{I,i,\pm} \cap I^c_\pm} u_j$$
$$x_{-C^\vee_{I,i}} = w_i^I \cdot \prod_{j \in C^\vee_{I,i,\mp} \cap I^c_\pm} u_j$$

が成り立ちます. ここで符号付きコサーキット $C^\vee$ に対して $-C^\vee$ は $(-C^\vee)_\pm = C^\vee_\mp$ として得られる符号付きコサーキットとします. したがって射 $U \to U_I$ を $z_i^I = x_{C^\vee_{I,i}} \cdot \prod_{j \in C^\vee_{I,i,\pm} \cap I^c_\pm} u_j^{-1}$, $w_i^I = x_{-C^\vee_{I,i}} \cdot \prod_{j \in C^\vee_{I,i,\mp} \cap I^c_\pm} u_j^{-1}$ で定めればこれは射 $U \to U_I \cap \pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(U)$ を定め, π の制限の逆を与えます. よって $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ は同型となり, π が双有理射になることがわかります. また X_0 が正規になることも知られているため X の座標環 $\mathbb{C}[X]$ は $\mathbb{C}[X_0] = \mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^{T^{n-d}}$ と同型になることもわかります[*8]. したがって X_0 は X のアフィン化 $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X])$ と呼ばれるものと同型になり, X はそのアフィン化の特異点解消になっています.

10 トーラス作用

これまでの説明でハイパートーリック多様体がシンプレクティック特異点解消と呼ぶべき性質を持つことはわかりました. また錐的であるというのは $\mathbb{S} := \mathbb{C}^\times$ が X に作用しており, その $\mathbb{C}[X]$ への作用の重さが非負かつ $\mathbb{S}$-不変な多項式が定数関数しかないことを意味しています. ハイパートーリック多様体の場合, $\mathbb{S}$ の $T^*\mathbb{C}^n$ への作用を $s \cdot (z, w) := (s^{-1}z, s^{-1}w)$ で定めればこれが X への $\mathbb{S}$-作用を誘導し, この作用に関して u_i や $x_{C^\vee}$ の重さは正になるのでこれは錐的な作用であることがわかります. ここでは説明できませんが, この $\mathbb{S}$-作用は例えば X や X_0 の (非可換) 変形を考えるときなどで重要な役割を果たします.

一方で X には T^n の $T^*\mathbb{C}^n$ への自然な作用から誘導される $T^d = T^n/T^{n-d}$ の作用も持ちます. ハイパートーリック多様体を定義するのに GIT 安定性条件を選んでいたのに対応して, シンプレクティック双対性の観点からは X だけでなく代数群の射 $H := \mathbb{C}^\times \to T^d$ から来る H-作用も込みで考えるのが自然です. ここで $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{Z}^d$ から射 $\xi : H \to T^d$ が $\xi(\lambda) = (\lambda^{\xi_1}, \ldots, \lambda^{\xi_d})$ によって定まることに注意すると, このデータは $\mathbb{Z}^d$ の元を一つ選ぶことに対応します. また GIT 安定性条件に対して十分一般的という条件を課したことに対応して, ξ は H-作用に関する固定点 X^H が有限集合になるという条件を課します.

ξ が十分一般的であるという条件を具体的に書き下してみます. まず (3) の完全系列の転置を取ることで完全系列

$$0 \to \mathbb{Z}^d \xrightarrow{{}^t a} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{b} \mathbb{Z}^{n-d} \to 0 \tag{12}$$

が得られることに注意します. 符号付きコサーキット $C^\vee$ が与えられたとき, 第 i 成分が $i \in C^\vee_\pm$ なら ± 1, $i \notin C^\vee$ なら 0 として定まる $\mathbb{Z}^n$ の元は, ある $\alpha_{C^\vee} \in \mathbb{Z}^d$ が存在して ${}^t a(\alpha_{C^\vee})$ と一意的に書けます. 特に $I \in \mathbb{B}$, $i \in I$ のとき $C^\vee_{I,i}$ に対応する $\mathbb{Z}^d$ の元を α_i^I と書けば, (11) は第 i 成分が 1, 第 $j \in I^c$ 成分が $-\langle b_i, \beta_j^I \rangle$, その他の成分が 0 で与えられる $\mathbb{Z}^n$ の元が ${}^t a(\alpha_i^I)$ で与えられることを示しています. したがって (9), (10) から z_i^I, w_i^I の H-作用に関する重さはそれぞれ $-\langle \xi, \alpha_i^I \rangle$, $\langle \xi, \alpha_i^I \rangle$ で与えられることがわかります. $(U_I)^H$ が有限集合であるためにはこれらが全て 0 でないことが必要十分であり, このとき固定点は原点 $p_I \in U_I \cong \mathbb{C}^{2d}$ のみにな

[*8] 例を見ればわかるように実際には π はより大きな開集合上で同型になります. U は X_0 の中で補集合の余次元が 2 以上とは限らないので§ 7 で述べた議論はそのままでは使えませんが, 少し議論を修正すれば証明できます.

ります. 任意の $\alpha_{C^\vee}$ はある $I \in \mathbb{B}, i \in I$ に対する $\pm\alpha_i^I$ と一致するので ξ が十分一般的であるための必要十分条件は任意の符号付きコサーキット $C^\vee$ に対して $\langle \xi, \alpha_{C^\vee} \rangle \neq 0$ が成り立つこととなります. この条件は GIT 安定性条件が十分一般的であるという条件と同じ形をしていることに注意しておきます. またこのとき固定点集合は $\{p_I\}_{I \in \mathbb{B}}$ で与えられます.

11 シンプレクティック双対性

これまでに完全系列 (3) と十分一般的な GIT 安定性条件 $\theta \in \mathbb{Z}^{n-d}$, そして $\xi \in \mathbb{Z}^d$ から CSR とそこへの H-作用の組 $(X(a,\theta),\xi)$ であって H-作用に関する固定点が有限なものを構成してきました. 一方で a がユニモジュラーであることと b がユニモジュラーであることが同値であることに注意すると, 完全系列 (12) を用いてもハイパートーリック多様体を構成することができます. ここで GIT 安定性条件としては $-\xi \in \mathbb{Z}^d$ を用い, $H^! := \mathbb{C}^\times$ の作用は $-\theta \in \mathbb{Z}^{n-d}$ を用いて入れることとします. こうして得られたハイパートーリック多様体 $X^! := X(b,-\xi)$ と $H^!$-作用 $-\theta$ の組を $(X(a,\theta),\xi)$ のシンプレクティック双対と呼びます[*9]. シンプレクティック双対性とはこのように CSR と固定点が有限になる (ハミルトニアンな) トーラス作用の組に対してその双対が存在して, 様々な非自明な関係を満たすだろうという予想です.

まず簡単にわかる関係性について見てみます. § 10 で X の H-固定点は a の基底 $\mathbb{B}$ と 1 対 1 に対応していることを見ました. したがって双対に移ると $X^!$ の $H^!$-固定点は b の基底 $\mathbb{B}^!$ と 1 対 1 に対応していることがわかります. そして $I \in \mathbb{B}$ であることと $I^c \in \mathbb{B}^!$ であることは同値なので両者の固定点の間には自然な 1 対 1 対応があることがわかります. またここでは詳しくは述べませんが, 表現論的には $\mathbb{C}[X]$ の量子化の表現論と $\mathbb{C}[X^!]$ の量子化の表現論の間に Koszul 双対性と呼ばれる非自明な関係があることが期待されています.

ハイパートーリックでない例としては, 半単純 Lie 群に付随する旗多様体の余接空間のシンプレクティック双対が Langlands 双対の半単純 Lie 群に付随する旗多様体の余接空間になります. Langlands 双対がルートとコルートを入れ替えるように, 双対な CSR に対してもルートとコルートを入れ替えるような関係性があると期待されます. ハイパートーリック多様体に対しては $\alpha_{C^\vee}$ と書いたものがルートの類似で, β_C と書いたものがコルートの類似になっています.

ここでは最初に述べた二つの線形化の間の関係について見てみます. まずは $T^*\mathbb{P}^{n-1}$ と $\widetilde{\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}$ の場合について考えてみます. (4) と (7) を見比べると (7) に $x = y = 0$ という関係式を追加すればちょうど (4) になっていることがわかります. また逆に (5) と (6) を見比べてみれば (5) で $i \neq j$ に対して $u_{ij} = 0$ という関係式を追加すれば (6) と同型になることもわかります. つまり $T^*\mathbb{P}^{n-1}$ のコホモロジー環は $\widetilde{\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}$ の座標環の商として書け, 逆に $\widetilde{\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}$ のコホモロジー環は $T^*\mathbb{P}^{n-1}$ の座標環の商として書けるということになります. また上で課した $x = y = 0$ や $u_{ij} = 0$ などの関係式は H が非自明な重さで作用している元を消すというものであると解釈できます. これは幾何的にはスキーム論的に X_0 の H-固定点を考えることに相当しています. 一般に $\mathbb{C}[X_0]$ の H-作用が 0 でない重さで作用する元で生成されるイデアルで $\mathbb{C}[X_0]$ を割ったものを $\mathbb{C}[(X_0)^H]$ と書きます.

最後に上の観察を一般化します. まずコホモロジー環については次のことが知られています.

[*9] より正確には [1] では任意の i に対して $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$ という条件を課したものを考えています. ここで述べる性質に関しては特に変わらないので仮定しなくても特に問題ありません.

定理 3 ([3],[5]). 次数付き環として次の同型が存在する.

$$H^*(X) \cong \mathbb{C}[u_1, \dots, u_n] / \left(\prod_{i \in C} u_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \mid C : \text{サーキット},\ j = 1, \dots, d \right)$$

ここで左辺の次数はコホモロジーの次数であり, 右辺の次数は $\deg(u_i) = 2$ で与えられる.

一方で $\mathbb{C}[(X_0)^H]$ の関係式にはまず $\mu = 0$ から来る $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} u_i = 0$ $(j = 1, \dots, n - d)$ があります. またコサーキット $C^\vee$ に対して $x_{C^\vee}$ の H-作用に関する重さは $-\langle \xi, \alpha_{C^\vee} \rangle$ なので特に 0 ではありません. よってこれらは $\mathbb{C}[(X_0)^H]$ では 0 になるので $\mathbb{C}[(X_0)^H]$ は $u_1, \dots, u_n$ で生成されていることがわかります. また $\prod_{i \in C^\vee} u_i = x_{C^\vee} x_{-C^\vee}$ が成り立つので $\mathbb{C}[(X_0)^H]$ では $\prod_{i \in C^\vee} u_i = 0$ が成り立ちます. そして少し議論するとこれらの関係式を課すだけで十分であることもわかるので

$$\mathbb{C}[(X_0)^H] \cong \mathbb{C}[u_1, \dots, u_n] / \left(\prod_{i \in C^\vee} u_i,\ \sum_{i=1}^{n} b_{ij} u_i \mid C^\vee : \text{コサーキット},\ j = 1, \dots, d \right)$$

となることがわかります. シンプレクティック双対の元で a と b, サーキットとコサーキットは入れ替わるので次が示せたことになります.

定理 4. シンプレクティック双対なハイパートーリック多様体 X,$X^!$ に対して次数付き環としての同型

$$H^*(X) \cong \mathbb{C}[(X_0^!)^{H^!}]$$
$$H^*(X^!) \cong \mathbb{C}[(X_0)^H]$$

が成り立つ. ここで X_0, $X_0^!$ はそれぞれ X, $X^!$ のアフィン化であり, 右辺の次数は $\mathbb{S}$ の作用に関する重さで与えられる.

コホモロジー環は空間の位相的な性質だけから定まるのに対し, 座標環はその代数多様体としての構造を本質的に使っていることを考えると, それらが入れ替わるというのは何か不思議なことが起こっているという感じがしてきます. そしてこれはこの場合だけの偶然ではなく, もっと様々な例に対しても成り立っていることが観察できます. 例えば A 型 Springer ファイバーのコホモロジー環が座標環として記述できることは以前から知られていました. 上の結果はその記述がシンプレクティック双対性の文脈で自然に一般化できることを示唆しています.

参考文献

[1] T. Braden, A. Licata, N. Proudfoot, B. Webster, Quantizations of conical symplectic resolutions, Astérisque No. 384 (2016)

[2] N. Chriss, V. Ginzburg, Representation theory and complex geometry, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997

[3] T. Hausel, B. Sturmfels, Toric hyperKähler varieties, Doc. Math., 7 (2002), 495–534

[4] 谷崎俊之, 堀田良之, D 加群と代数群, シュプリンガー・フェアラーク東京

[5] H. Konno, Cohomology rings of toric hyperkähler manifolds, Internat. J. Math., 11 (2000), 1001–1026