

代数幾何の源流を求めて

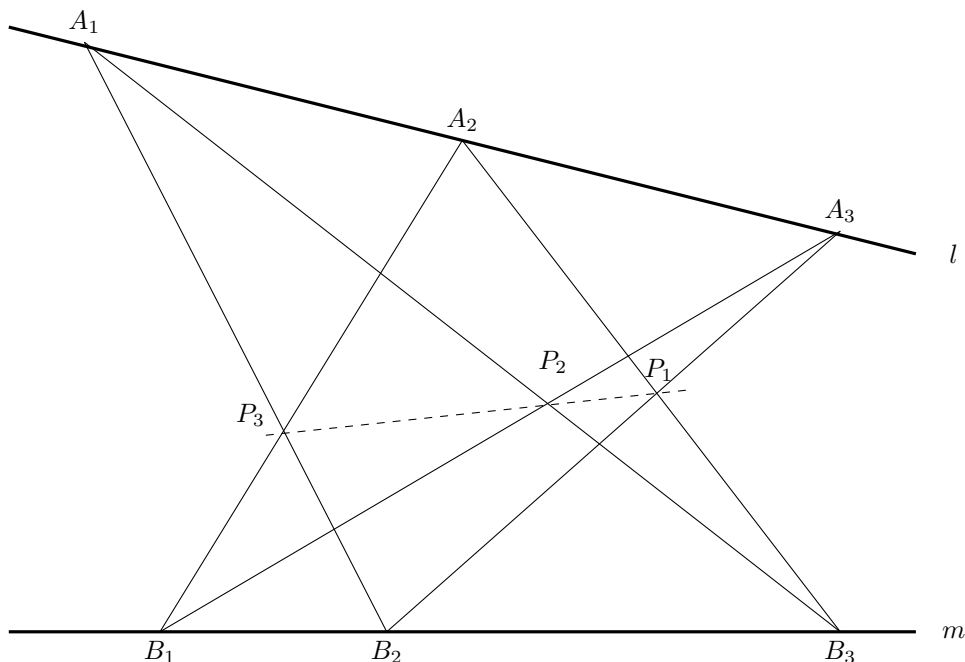
向井 茂

代数幾何は二つの地中海文化の思想の混ざり合ったもので、位置と形に関するギリシャの学問に、素早く方程式の解を計算するアラビアの科学を重ね合わせたものである。-[6]-

代数幾何は、言葉の通り、代数を用いて幾何（あるいはその逆）を研究する。よって、デカルト的な座標幾何は当然の前提としている。しかし、座標系に依存しない概念や道具がなければ闇雲な計算の集まりに堕してしまう。その点でポンスレー等による射影幾何学の基礎付けには、無限遠点の導入や双対平面のように、現代数学に欠かせないアイデア（コンパクト化やモジュライ）の萌芽も含まれていて、代数幾何の一つの由緒正しい源であると言えるだろう。講演では、古典的定理群の周辺から代数幾何の源を探していきたい。

1 パップスの定理と射影幾何

代数幾何学の永い歴史がどこから始まるかについてはいろんな答があるだろうが、ここでは射影幾何学の源としてパップスの定理を考えよう。パップスは4世紀頃のアレキサンドリア学派の人で、次の発見をした。



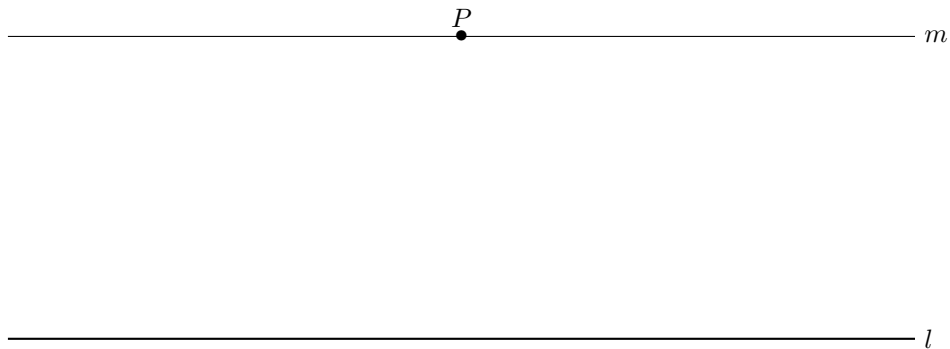
定理 1 直線 l 上の3点 A_1, A_2, A_3 と別の直線 m 上の3点 B_1, B_2, B_3 に対して、直線 $A_{i-1}B_{i+1}$ と $A_{i+1}B_{i-1}$ の交点を P_i とおく。ただし、添字 $i = 1, 2, 3$ は3を法として考える。このとき、3点 P_1, P_2, P_3 は同一直線

上にある。

射影の概念はずっと後世にならないと現れないが、パップスの定理はそれで不変な射影幾何初の定理^{*1}である。射影幾何学は19世紀前半を黄金期とし、ケイリーによる3次曲面上の27直線(付録B)の発見もここに属する。解析幾何や射影幾何が代数幾何学前史を飾っている。

2 射影平面(代数曲線の住む所)

幾何学というとユークリッド幾何学が有名である。三角形や円に関する多くの定理を含むが、単なる知識の寄せ集めではなく、公理をもとにして秩序正しく体系付けられていることでも名高い。ずっと平面幾何に話を限るが、その公理の中に平行線公理と呼ばれるものが有って、これに関する研究は数学史のなかでも特筆すべきものであった。

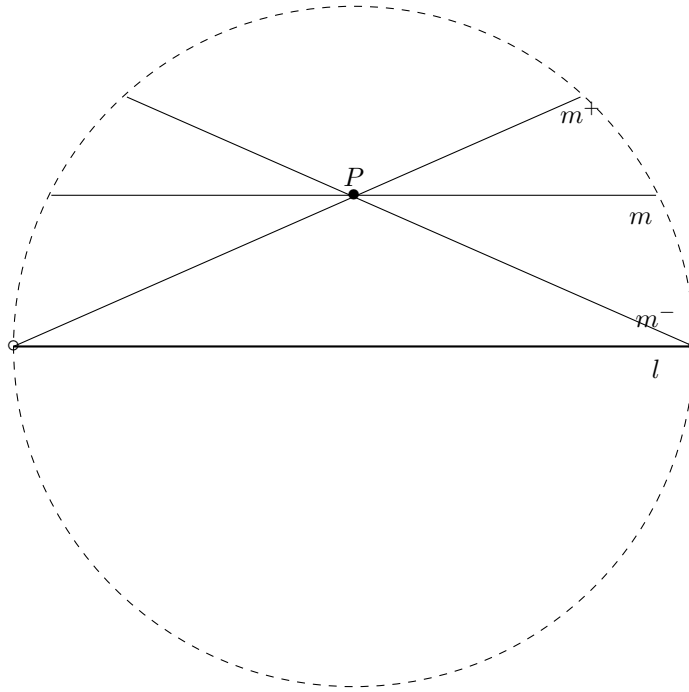


非ユークリッド幾何も存在することが確定して論争は一段落するが、どちらの幾何でも

(*)「与えられた直線 l とその上にない点 P に対して P を通り l と交わらない直線 m が存在する」

ことは認めていることに注意しよう。両幾何の違いはそういう直線 m が1本しかないか、あるいは無数にあるかという点にある。次の図は非ユークリッド幾何のクライン模型と呼ばれるもので、 P を通り l と交わらない直線が m^+ から m^- まで連続的に存在する。

^{*1} この定理は代数とも関係する。射影幾何を公理化した際に、適当な公理(デザルグの定理 (§ 付録 A) を含む)のもとで係数体が定まる。すなわち、 N 次元射影空間 \mathbb{P}^N の点は、よく説明されるように、係数体に属する $(N+1)$ 個の数の連比 $(a_0 : a_1 : \dots : a_N)$ で表される。パップスの定理はこの係数体の可換性に他ならない。



さて、このことに注意したのは、代数曲線の住んでいる射影平面はそのどちらとも異なるからで、上とは正反対に

(**)「異なる2直線はつねに1点で交わる」

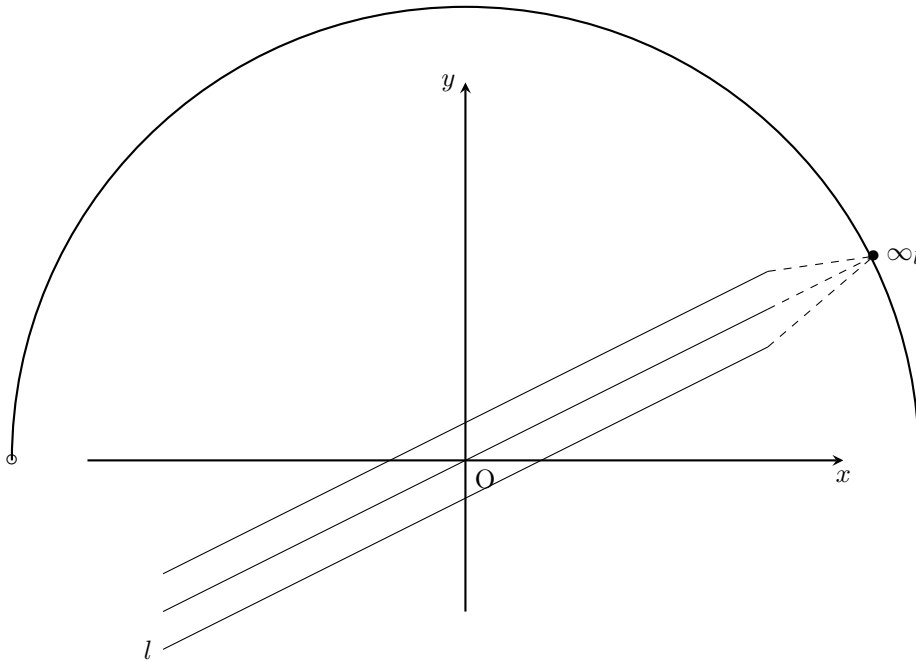
という性質をもつ。しかし、かと言って、通常の平面とまったく異なるわけではなく、それに無限遠直線を付け加えるという改良(現代数学でいうところのコンパクト化)によって得られる。具体的に述べよう。

まず、座標の入った直線を考える。この直線に正の方向の無限大 $+\infty$ と負の方向の無限大 $-\infty$ という仮定の2点を付け加えることもよくなされるが、これとは違って、正負どちらの無限遠にも同じ点がかくついていると思ったものを射影直線という*2。

次に座標の入った平面を考える。これの原点を通る直線 l に対して、それを射影直線にすべく追加する無限遠点を ∞_l とする。射影平面とは通常の平面に、 l を動かして得られるすべての ∞_l を付加したものである。そして、(原点を通る)直線 l 自身はもとより、 l と平行な直線はすべてこの ∞_l を通っていると定める。

付け加える ∞_l の全体は無限遠直線と呼ばれ、もとの平面の上に虹のようにかかっている。この無限遠直線と l もやはり1点で交わるので(2)が成立するというわけである。

*2 ここでは実直線 \mathbb{R} の1点コンパクト化を説明しているが、後に述べるように複素数体上で考える場合には、複素直線(ガウス平面)の1点コンパクト化、すなわち、リーマン球が複素数体上の射影直線である。



3 代数と幾何

次に代数方程式を考えよう。 x と y を未知数とする連立1次方程式

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

は馴染深い。連比 $a : b : c$ と $a' : b' : c'$ が同じだと、実質的に一つの方程式なので、そうではないとしよう。(1) の表す2直線の平行、非平行に対応して、 $a : b = a' : b'$ なら解はなく、 $a : b \neq a' : b'$ なら解はちょうど1個である。これに対して、 x, y, z を未知数とする連立1次方程式

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

を考えよう。これには、 $x = y = z = 0$ という自明な解がいつもある。また、 (p, q, r) が解ならばその定数倍 (kp, kq, kr) も解である。そこで、自明でない解のみを、定数倍を同一視して考えよう。解の連比 $p : q : r$ を考えるとと言っても同じである。この約束のもとで、

(***) 「連比 $a : b : c$ と $a' : b' : c'$ が異なるなら連立方程式(2) はちょうど1個の解をもつ」

ことがわかる。実際、簡単な計算より

$$x : y : z = bc' - cb' : ca' - ac' : ab' - ba'$$

が求まる。

このように、射影平面の性質(**)は(***)にはかならない。より正確には、(**)と(***)が同値になるような座標系が射影平面に入る。普通の平面の点は数の対 (p, q) で表されるのに対し、射影平面の点は三つの

数の連比 $(p : q : r)$ を座標にもつとすればよい。普通の平面が射影平面の一部であることは、普通の座標で (p, q) の点が射影平面では $(p : q : 1)$ を座標とすることに対応する。そして、新たに付け加えられた無限遠点は $(p : q : 0)$ を座標とする。

実際、座標平面上の点 (kp, kq) は射影平面で $(p : q : 1/k)$ と表されるから、 k を無限大にしたときの極限は $(p : q : 0)$ になるという理屈である。射影平面のこのような実現を斉次座標表示という。この実現において、直線は 1 次斉次方程式 $ax + by + cz = 0$ で表される。

■パップスの定理の証明 幾何と代数の関わり方の例として、定理 1 を解析幾何流に証明してみよう。3 直線 A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 が $x = 0, y = 0, z = 0$ 、そして、直線 m が $x + y + z = 0$ と表される斉次座標 $(x : y : z)$ をとる。また、直線 l の定義式を $ax + by + cz = 0$ とする。このとき、「逆方向」の 3 直線 A_2B_1, A_3B_2, A_1B_3 は、

$$ax + ay + cz = 0, \quad ax + by + bz = 0, \quad cx + by + cz = 0$$

と表される。二つの 3 角形 (順方向 A_iB_{i+1} と逆方向 $A_{i+1}B_i$) は 3 次斉次式

$$xyz = 0, \quad \left(x + y + \frac{c}{a}z\right) \left(\frac{a}{b}x + y + z\right) \left(x + \frac{b}{c}y + z\right) = 0 \quad (3)$$

で定義される。ここで、適当な定数 k に対して恒等式

$$\begin{aligned} kxyz + \left(x + y + \frac{c}{a}z\right) \left(\frac{a}{b}x + y + z\right) \left(x + \frac{b}{c}y + z\right) \\ = (x + y + z)(ax + by + cz) \left(\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{a}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

が成立することに注意しよう。(3) の二つの 3 角形が 9 点 $A_i, B_i, P_i (i = 1, 2, 3)$ を通っているので、(4) の右辺の定める 3 角形もそうである。この 3 角形の最初の 2 辺は l, m で、残りの辺 $x/b + y/c + z/a = 0$ が P_1, P_2, P_3 を通っている。 ■

直線や 1 次方程式だけを扱っては代数幾何とはいえないが、直感に訴えやすい(**) や定理 1 のような幾何的表現と反論の余地のない(***) や (4) のような代数的計算との多くの対、またそれらをどう解釈すべきかを考察する中で代数幾何学が育まれてきた。

4 平面代数曲線

普通の xy -平面では座標が $F(x, y) = 0$ という一つの間係をみたす点の軌跡を曲線という。関数のグラフ $y = f(x)$ はその例である。これらの中で関係式 (の左辺) $F(x, y)$ が x, y の多項式であるものを (平面) 代数曲線という。この多項式の x, y に関する (総) 次数を代数曲線の次数と呼ぶ。直線は 1 次代数曲線で、円

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2 = 0 \quad (5)$$

は 2 次代数曲線

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (6)$$

の特別な場合である。高次代数曲線の例としては

$$x^n + y^n - 1 = 0 \quad (7)$$

がある。有名なフェルマー予想は「次数が3以上のとき、この代数曲線の上の有理点 (x, y 座標が共に有理数となる点) は自明なものしかない」と主張している*3。

■射影化と斉次化 代数曲線はこのままでは取扱いにくい、射影平面にまで拡張することによって、多くの道具が使えるようになる。射影平面内の代数曲線とは、3変数の斉次多項式 $f(x, y, z)$ でもって、斉次座標が関係 $f(x, y, z) = 0$ をみたす点の軌跡として表されるものをいう。普通の平面内の代数曲線を定める d 次多項式 $F(x, y)$ に対して、そこに現れる各単項式の次数が d になるように、 z の冪を代入して得られる斉次多項式を $f(x, y, z)$ とする。 $f(x, y, 1) = F(x, y)$ であるから曲線 $f(x, y, z) = 0$ は曲線 $F(x, y) = 0$ の射影平面への拡張である。たとえば、曲線 (5), (6), (7) の拡張はそれぞれ

$$(x - pz)^2 + (y - qz)^2 - r^2 z^2 = 0 \quad (5')$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 = 0 \quad (6')$$

$$x^n + y^n - z^n = 0 \quad (7')$$

となる。

二つの代数曲線 $C_1 : F_1(x, y) = 0$ と $C_2 : F_2(x, y) = 0$ に対して、その和 $C = C_1 \cup C_2$ は積 $F_1(x, y)F_2(x, y)$ で定義される代数曲線である。このような曲線は可約、逆に、定義式が因数分解できない曲線は既約という。

代数曲線を考える際には、数の概念も拡張しておく。すなわち、複素数を座標とする点も許す。複素数は2次方程式がいつも解をもつように負数の平方根を許した数の体系であるが、驚くべきことに、この体系ではどんな高次の方程式

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (8)$$

もつねに解をもつ (代数学の基本定理)。因数定理より、

(****) n 次方程式 (8) の解の個数は重複度を数えるとちょうど n である。

もちろん、実数や有理数の範囲で解を考えるべき問題は数多くあるが、その場合でも、まず複素数で解があるということは重要である。代数曲線 (より一般に代数多様体) を考えるときも同様で、まず複素数の体系で考える。

以上で準備は整ったが、一つ付け加えておこう。同じように曲線や曲面を扱っても、リーマン幾何などとは違って、代数幾何では長さや角度をほとんど問題としない。それは、座標の取替をずっと多く許すことに対応している。ユークリッド幾何では、回転や平行移動でもって変わらない性質を調べるのに対して、射影幾何では勝手な3次正則行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ より定まる射影変換 $\varphi_A(p : q : r) = (p' : q' : r')$ 、ただし、

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (9)$$

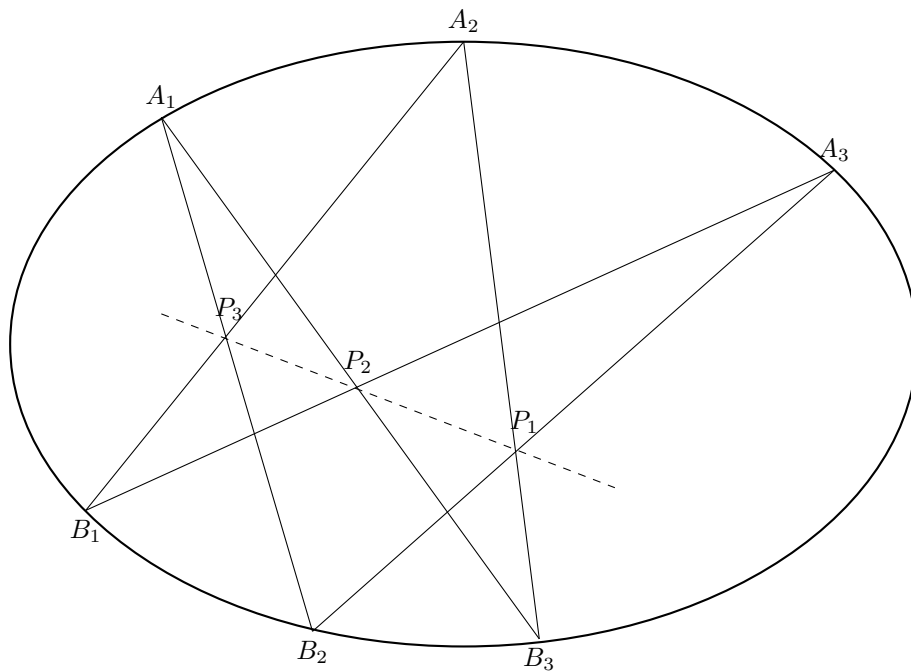
でもって不変な性質のみが追求される。(「物理法則は観測者の座標系によらない」というのと同じ精神。) この変換は二つの曲線が交わるとか接するとか、また、代数曲線の次数や特異点などは保つが、一般に長さや角度は保たない。さらに進んで、代数幾何では双有理変換も考える。これは次数や特異点さえも変えるが、高次元になるほどその重要性を増す。代数曲線の場合、種数 (genus) という量が双有理変換で保たれる最も重要なものであることをリーマンが発見した。本稿では説明できないが、現代代数幾何学の多くはここから出発しているので、付言した。

*3 Wiles と Taylor によって肯定的に解決されている。

5 パスカルの定理

パップスの定理 (§1) は、次の定理において、2次曲線が可約 (2直線の和) になった特殊ケースである。

定理 2 (パスカル) 2次曲線に内接する6角形の3対の向い合う辺の交点は一直線上にある。(この直線はパスカル線と呼ばれる。)



証明はパップスと同様にできる。

■パスカルの定理の第1証明 2次曲線を Q とし、それに内接する6角形の頂点を順に $A_1, B_2, A_3, B_1, A_2, B_3$ とする。パップスの定理と同じく $A_i B_{i+1}$ と $A_{i+1} B_i$ の交点を P_{i-1} とおく。3直線 $A_1 B_2, A_2 B_3, A_3 B_1$ が $x=0, y=0, z=0$ 表される斉次座標 $(x:y:z)$ をとる。2次曲線 C は3つの座標点を通らないので、定義式 (6)

$$C: ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + ezx + fxy = 0$$

の係数 a, b, c は零でない。よって、斉次座標を定数倍で取り替えて、 $a = b = c = 1$ と仮定してよい。

$$A_1(0:1:a_1), A_2(a_2:0:1), A_3(1:a_3:0), \quad B_2(0:1:b_2), B_3(b_3:0:1), B_1(1:b_1:0)$$

とおく。解と係数の関係より、

$$a_1 b_2 = a_2 b_3 = a_3 b_1 = 1$$

$$a_1 + b_2 + d = a_2 + b_3 + e = a_3 + b_1 + f = 0$$

が成立する。

「逆方向」の3直線 A_2B_1, A_3B_2, A_1B_3 は、

$$x - \frac{y}{b_1} = a_2z, \quad y - \frac{z}{b_2} = a_3x, \quad z - \frac{x}{b_3} = a_1y$$

と表される。適当な定数 k を選ぶことによって恒等式

$$\begin{aligned} & kxyz + (x - a_3y - a_2z)(y - a_1z - a_3x)(z - a_2x - a_1y) \\ &= (x^2 + y^2 + z^2 + dyz + ezx + fxy)(a_2a_3x + a_3a_1y + a_1a_2z) \end{aligned} \quad (10)$$

が成立する。よって、直線 $x/a_1 + y/a_2 + z/a_3 = 0$ は P_1, P_2, P_3 を通る。 ■

6 寄り道：3次曲線束

パップスの定理の証明の設定 (3) において、 x, y, z を適当に定数倍して、最初の2直線が

$$l : ax + by + cz = 0, \quad m : bx + cy + az = 0$$

となるような斉次座標 $(x : y : z)$ で考えよう。証明で見たように二つの3角形

$$xyz = 0, \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{c} + \frac{z}{b}\right) \left(\frac{x}{b} + \frac{y}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{c} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a}\right) = 0 \quad (11)$$

の線形結合でもって、3番目の3角形 (の定義式)

$$(ax + by + cz)(bx + cy + az)(cx + ay + bz) = 0 \quad (12)$$

がえられる。(P_1, P_2, P_3 を通る直線は最後の辺 $n : cx + ay + bz = 0$ である。) このように、パップスの定理に現れる9点 A_i, B_i, P_i と9直線 $A_iB_{i\pm 1}, l, m, n, (i = 1, 2, 3)$ は座標の3次巡回置換

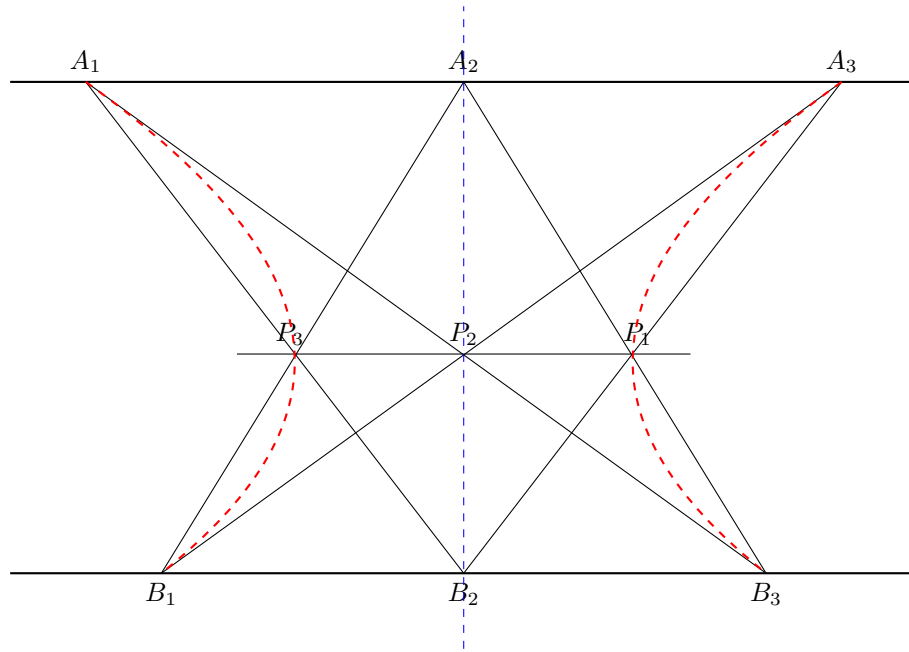
$$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$$

でもって保たれる。

さて、 $a = c = 1$ という特殊な場合を考えよう。このとき、3点 A_2, P_2, B_2 は直線 $x + y + z = 0$ の上にある。よって、線形結合の中にもう一つの可約多項式

$$(x + y + z)\{x^2 + y^2 + z^2 + (b + b^{-1})(yz + xz + xy)\}$$

が出現する。ここにおいて、第2項の定める2次曲線が残りの6点 $A_i, B_i, P_i (i = 1, 3)$ を通り、 $x + y + z = 0$ がそれ定める6角形のパスカル線になっている。



複素数になって図は書けなくなるが、さらに b を 1 の虚数立方根 ω に特殊化したとき、2 次曲線は 2 直線の和に分解する。こうして、4 番目の 3 角形として

$$(x + y + z)(x + \omega y + \bar{\omega} z)(x + \bar{\omega} y + \omega z) = 0$$

が線形結合としてえられる。これが有名なヘッセ束 (Hesse pencil)

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\lambda xyz = 0 \tag{13}$$

である。

1. 4 つの 3 角形は $\lambda = \infty, \omega, \bar{\omega}, 1$ の場合で、これらはマクローリン 3 角形と呼ばれる。
2. ヘッセ束は 9 個の点

$$(-1 : \omega^i : 0), \quad (-1 : 0 : \omega^i), \quad (0 : -1 : \omega^i) \quad i = 0, 1, 2 \tag{14}$$

を通る 3 次曲線束である。

3. 非特異 3 次曲線 $C : f(x, y, z) = 0$ の変極点は 9 個あって、それはヘッセ曲線 $H(x, y, z) = \det(\partial_i \partial_j f)_{1 \leq i, j \leq 3} = 0$ との交わりである。ただし、 $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ は x, y, z に関する偏微分である。 f と H で生成される 3 次曲線束 $af + bH = 0, a, b \in k$ が (定数倍を除いて) (13) となるように射影座標がとれる。3 次曲線のヘッセ標準形として有名なものである。

3 次曲線束の中には極端有理楕円曲面 (extremal elliptic surface) と呼ばれるものを与える、非常に特殊なものが全部で 13 個*4あり、 E_8 型格子の指数有限部分格子と 1 対 1 に対応していることが知られている。ヘッセ型は指数 3^2 の部分格子 $A_2 + A_2 + A_2 + A_2 \subset E_8$ と対応する有理楕円曲面である。

*4 E_8 型の拡大ディンキン図形 $T_{2,3,6}$ の頂点に対応する 9 個 (巡回 Mordell-Weil 群) と、それ以外の 4 個。後者は、 $D_4 + D_4, D_6 + A_1 + A_1, A_3 + A_3 + A_1 + A_1$ とヘッセ型 $A_2 + A_2 + A_2 + A_2$ である。

7 ベズーの定理

この重要で美しい定理を述べよう。

定理 3 (Bézout) 射影平面内で m 次代数曲線と n 次代数曲線は重複度を数えればちょうど mn 個の点で交わる。(二つの曲線は可約でもよいが、両者に共通成分はないとする。)

$m = n = 1$ のとき、定理は (**), (***) に外ならない。また、 $m = 1$ のときは (****) よりしたがう。このように、無限遠点と複素数はこの定理で欠かせない。 $m, n > 1$ の例として二つの 3 次曲線

$$\begin{aligned} y &= 4x^3 - 3x \\ x &= 4y^3 - 3y \end{aligned} \tag{15}$$

の交点を考えよう。上式を下式に代入して得られる 9 次方程式

$$4(4x^3 - 3x)^3 - 3(4x^3 - 3x) - x = 0$$

より定まる x の 9 個の値に対応して、次の 9 点で両者は交わる。

$$\begin{aligned} P_1(1, 1), P_2(\cos \frac{\pi}{5}, \cos \frac{3\pi}{5}), P_3(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), P_4(\cos \frac{2\pi}{5}, \cos \frac{4\pi}{5}), P_5(0, 0), \\ P_6(\cos \frac{3\pi}{5}, \cos \frac{\pi}{5}), P_7(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), P_8(\cos \frac{4\pi}{5}, \cos \frac{2\pi}{5}), P_9(-1, -1) \end{aligned}$$

交点の数が定理のいう mn に不足するように見える場合も多いが、その不足は虚数座標の点として隠れているか、無限遠直線上に逃げているか、または、接している分を正しく勘定していないかによる。たとえば、二つの円は普通に考えると高々 2 点でしか交わらないが、式 (5') からわかるように、

(★) 円はいつも無限遠にある二つの虚点 $(1 : \pm\sqrt{-1} : 0)$ を通っている

ので勘定は合う。

一般には、上の例のように簡単に交点は計算できないが、 m, n 次 2 元連立方程式の終結式 (resultant) が mn 次方程式であることを用いて定理は証明できる。本質的には同じであるが、2 変数多項式環を用いる現代的証明を付録 C に付した。

8 ベズーの定理の応用

ベズーの定理の系として次が得られる。

「 m 次曲線と n 次曲線が $mn + 1$ 個以上の点で交わっているなら、両曲線は共通成分をもつ」

この弱い形で応用が沢山ある。

命題 4 二つの n 次曲線が n^2 個の点で交わっているとする。この内の mn 個の点が m 次既約曲線の上にあるなら、残りの $n(n - m)$ 個の点は $n - m$ 次曲線の上にある。

証明 二つの n 次曲線の定義式の線形結合 $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$ で定義される平面曲線族を考える。 n^2 個の交点の中の mn 個 P_1, \dots, P_{mn} が m 次既約曲線 $G = 0$ の上にあるとしよう。曲線 $G = 0$ 上で P_1, \dots, P_{mn} 以外の点 P を一つ選んで、曲線 $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$ が P を通るように λ_1, λ_2 を定める。このとき、 $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = 0$ は $G = 0$ と $mn + 1$ 個以上の点で交わる。よって、ベズーの定理 (の系) より $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ は G で割り切れる。すなわち、 $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = GH$ をみたす $n - m$ 次斉次式 H がある。 $H = 0$ が求める曲線である。 ■

パスカルの定理 (§5) をこれから導こう。

■**パスカルの定理の第 2 証明** 記号は前の証明と同じとする。2 次曲線 Q は、二つの可約 3 次曲線

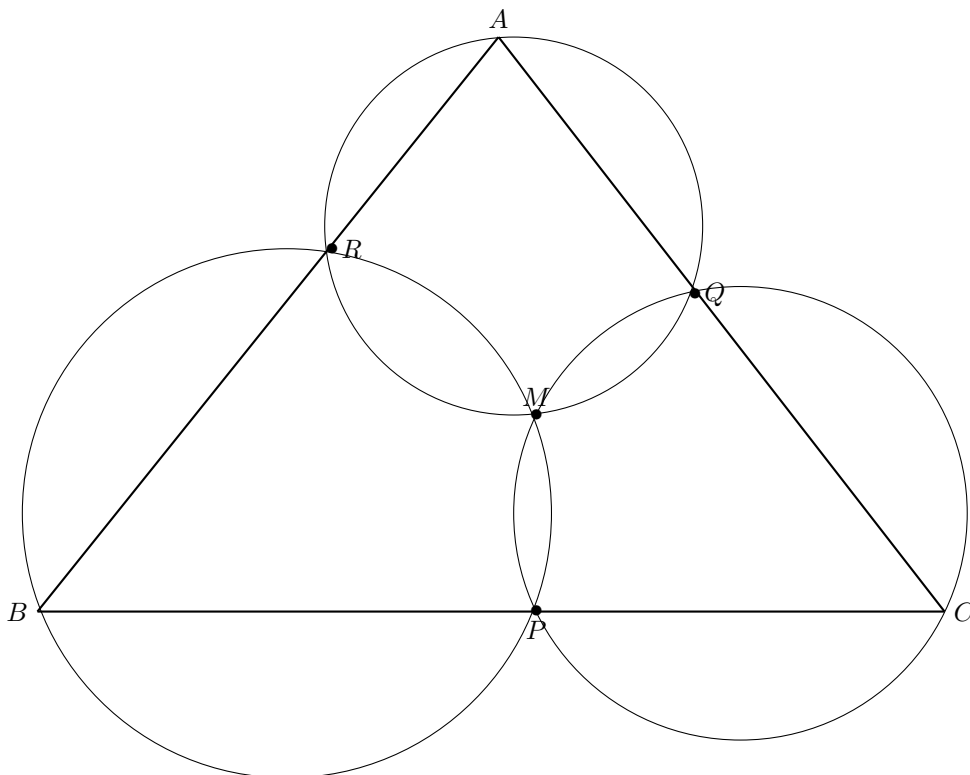
$$C_1 = A_1 B_2 + A_2 B_3 + A_3 B_1, \quad C_2 = A_2 B_1 + A_3 B_2 + A_1 B_3$$

の 9 交点のうちの 6 点 $A_i, B_i, (i = 1, 2, 3)$ を通る。上の定理 ($m = 3, n = 2$) より、残りの 3 点 P_1, P_2, P_3 は 1 直線上にある。 ■

(10) のような恒等式の計算が不要になっていることに注意しよう。次も定理 4 から従う。

定理 5 (ミケル) $\triangle ABC$ の 3 辺 (または、その延長線) 上に点 P, Q, R をとる。このとき、 $\triangle ARQ, \triangle BPR, \triangle CQP$ の外接円は 1 点で交わる。(この交点をミケル点という。)

証明 §7 の (★) に注意しよう。 $\triangle ARQ, \triangle BPR$ の外接円を C_1, C_2 とし、両者の交点で R で (も無限遠虚点でも) ないものを M とおく。二つの (可約) 3 次曲線 $C_1 + BC, C_2 + AC$ の生成する束を考える。両者の交わりは 9 点あり、直線 AB はそのうちの 3 点を通る。残りの 6 点は、 C, P, Q, M と無限遠虚点对である。命題 4 より、これらを通る 2 次曲線が存在する。これが $\triangle CQP$ の外接円に他ならない。 ■



9 演習問題とまとめ

■問題 定理5において、さらに、3点 P, Q, R が一直線上にあると仮定する。このとき、 $\triangle ABC$ の外接円もミケル点を通ることを証明せよ。

■まとめ 楕円曲線の退化 (3次曲線にも適用可) には小平による名称 (例えば、Silverman[9, Chap. IV]) と ADE 記号が与えられる。ここまでに登場した束における3次曲線の退化の様子を ADE 記号の方で記しておく。

1. $2\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1$ パスカル (定理2)
2. $3\tilde{A}_2$ パップス $< xyz, (ax + by + cz)(bx + cy + az)(cx + ay + bz) > (\S 3)$
3. $3\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1 < xyz, (x + by + z)(bx + y + z)(x + y + bz) > (\S 6)$
4. $4\tilde{A}_2$ ヘッセ束 $< xyz, x^3 + y^3 + z^3 > (13)$
5. $3\tilde{A}_1$ ミケル (定理5)
6. $4\tilde{A}_1$ 上の問題

付録 A デザルグの定理

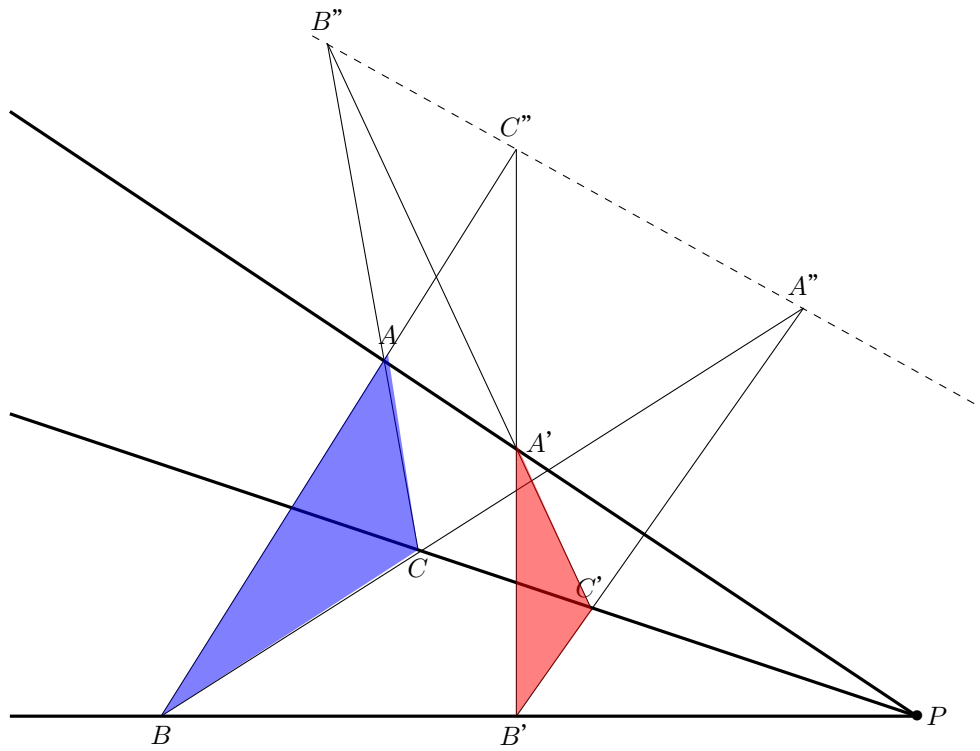
デザルグの定理 (§1, 脚注) とは次のものである。二つの3角形 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ の3辺を a, b, c, a', b', c' で表す。

定理6 次の2条件は同値である。

- 1) 3直線 AA', BB', CC' は共点。
- 2) 3交点 $a \cap a', b \cap b', c \cap c'$ は共線。

この同値条件がみたされるとき、二つの三角形は配景的 (perspective) であるという。

この定理は空間ではほぼ自明であることが著しい。実際、デザルグの定理は3次元以上では (他の公理により) 常に成立するが、その成立しない射影平面が存在する。それは、27次元の例外型 Jordan 代数を用いて構成できる。これは8元数を成分とする3次エルミート行列の全体に適当な演算をいれたもので、例外型 (E_8, E_7, E_6 型) リー環を作るときの素材となる。この27は3次曲面上の直線の本数であることが面白い。



付録 B 代数幾何学と配置 ([4])

代数幾何学にはいろんな対称性が出現するが、パップスの定理に出現する 9 直線と 9 点もその一つである。9 点のどれをとってもそこを通る 3 直線が通り、逆にどの 9 直線上にも 3 点がついている。このような状況を (9_3) (あるいは (9_3-9_3)) 配置であるという。また、この定理は自己双対^{*5}であることに注意しよう。射影平面上の点と直線の (9_3) 配置には、パップスを含めて丁度 3 種類あることが知られている (Hilbert-Cohn-Vossen[5, Chap. 3] 参照^{*6})。

また、9 個の基点 (14) とマクローリン 3 角形に現れる 12 本の直線はヘッセ配置と呼ばれる対称性の高いもので、 (12_3-9_4) 配置をなしている。この (12_3-9_4) 配置は 3 元体 (ガロア体) $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ 上のアフィン平面の対称性 $3^2\mathfrak{S}_4$ (位数は 192) をもっている ([1] 参照)。ただし、記号「 3^2 」は斉次座標に 1 の 3 乗根を掛けることに、 \mathfrak{S}_4 は 4 個のマクローリン 3 角形の置換に対応している。

同様に、デザルグの定理 6 に出現する 10 本の直線と 10 個の点も非常に対称性の高い (10_3) 配置 (組合せ論的には 5 次対称群 \mathfrak{S}_5 が作用) である ([3])。実際、10 点と 10 直線を $p_{ij}, l_{ij}, (1 \leq i < j \leq 5)$ と番号付けて、 i, j, k, l が全て相異なるときに、 l_{kl} が p_{ij} を通るようにできる。(一般のデザルグ配置では逆も成立するが、これ以上の包含関係がある特殊な場合もある。)

^{*5} 正確には双対が定理の逆になる。

^{*6} 同じ章に 3 次曲面上の 27 直線や Reye 配置も説明されている。

付録 C ベズーの定理の証明の概略

m 次代数曲線 $C_1 : F_1(x, y) = 0$ と n 次代数曲線 $C_2 : F_2(x, y) = 0$ が相異なる N 個の点 P_1, \dots, P_N で交わっているとす。簡単のため、それらは無限遠になく、(非斉次) 座標が $(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N)$ であるとする。(座標変換 (9) による不変性により、幾何学的考察ではこう仮定しても一般性を失わない。) ベズーの定理 (§7) はこの設定では次のように述べられる。

定理 7 m 次代数曲線 $C_1 : F_1(x, y) = 0$ と n 次代数曲線 $C_2 : F_2(x, y) = 0$ は共通成分をもたないとする。このとき、多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ のイデアル $I := (F_1, F_2)$ による剰余環 $\mathbb{C}[x, y]/I$ は $(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N)$ に台を持つ \mathbb{C} 上有限次元な環 $R_i, 1 \leq i \leq N$, の直和に分解し、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y]/I = \sum_{i=1}^N \dim_{\mathbb{C}} R_i = mn \quad (16)$$

が成立する。

系 8 C_1, C_2 の交点の個数は mn 以下である。また、等号が成立することと、各交点で交わりが横断的であることは同値である。

ここで、 R_i が (a_i, b_i) に台をもつとは、対応する極大イデアル $\mathfrak{m}_i = (x - a_i, y - b_i)$ の適当なベキを掛けると零になるということである。また、点 (a_i, b_i) での交わり $C_1 \cap C_2$ の重複度とは、 $\dim_{\mathbb{C}} R_i$ でもって定義される。これが 1 のとき、 C_1 と C_2 は横断的 (transversal) に交わるという。また、 C_1, C_2 が点 (a_i, b_i) で重複度 r, s なら、不等式 $\dim_{\mathbb{C}} R_i \geq rs$ が成立する。

直和分解 $\mathbb{C}[x, y]/I \simeq \bigoplus_{i=1}^N R_i$ は Artin 環の簡単な一般論である ([2, Theorem 8.7])。 (16) の本質部分 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x, y]/I = mn$ は多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ 上の加群の (Koszul) 完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[x, y] \xrightarrow{(F_2, -F_1)} \mathbb{C}[x, y] \oplus \mathbb{C}[x, y] \xrightarrow{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}} I \rightarrow 0 \quad (17)$$

の賜物である。ただし、最初の準同型写像は生成元 1 を $(F_2, -F_1)$ に送り、次のは (A, B) を $AF_1 + BF_2$ に送る。これが完全であることは真ん中を除いては明らかである。真ん中で完全であることは、 F_1 と F_2 が共通因子をもたず、多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ が一意分解環であるからである。

■多項式環 $\mathbb{C}[x, y]/I$ の次元の計算 環 $\mathbb{C}[x, y]$ もイデアル I も無限次元ベクトル空間なので、このままでは、 $\infty - \infty = (\text{不定})$ となって、計算できない。剰余ベクトル空間 $\mathbb{C}[x, y]/I$ を (有限次元)/(有限次元) に書き換える。そのために無限遠直線に注目しよう。それは $(x : y)$ を斉次座標とする射影直線 \mathbb{P}^1 である。 m 次代数曲線 C_1 は (重複度を込めて) これと m 点で交わる。その m 点は、定義式 F_1 の m 次斉次部分 (最高次部分) である。 C_2 についても同様である。よって、 F_1 の m 次斉次部分 f_1 と F_2 の n 次斉次部分 f_2 は \mathbb{P}^1 上で共通零点をもたない。言い換えると、それらの $\mathbb{A}_{x, y}^2$ における共通零点は原点 $(0, 0)$ のみである。Hilbert の零点定理より、充分大きな l に対して*7、イデアル $(f_1, f_2)\mathbb{C}[x, y]$ は極大イデアル (x, y) のベキ $(x, y)^l$ を含む。

*7 終結式の際に使われる議論により、 $l \geq m + n - 1$ で充分である。

l 次以下の多項式全体のなす部分 \mathbb{C} ベクトル空間を $\mathbb{C}[x, y]_{\leq l}$ で表す。 \mathbb{C} ベクトル空間として、 $(x, y)^l$ と $\mathbb{C}[x, y]_{\leq l}$ は $\mathbb{C}[x, y]$ を生成する。よって、 I と $\mathbb{C}[x, y]_{\leq l}$ も $\mathbb{C}[x, y]$ を生成し、 $\mathbb{C}[x, y]/I \simeq \mathbb{C}[x, y]_{\leq l}/(\mathbb{C}[x, y]_{\leq l} \cap I)$ が成立する。

(17) より得られる完全列

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[x, y]_{\leq l-m-n} \rightarrow \mathbb{C}[x, y]_{\leq l-m} \oplus \mathbb{C}[x, y]_{\leq l-n} \rightarrow \mathbb{C}[x, y]_{\leq l} \cap I \rightarrow 0 \quad (18)$$

より、

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{C}[x, y]_{\leq l}/(\mathbb{C}[x, y]_{\leq l} \cap I) &= \dim \mathbb{C}[x, y]_{\leq l} - \dim(\mathbb{C}[x, y]_{\leq l} \cap I) \\ &= \dim \mathbb{C}[x, y]_{\leq l} - \dim \mathbb{C}[x, y]_{\leq l-m} - \dim \mathbb{C}[x, y]_{\leq l-n} + \dim \mathbb{C}[x, y]_{\leq l-m-n} = mn \end{aligned}$$

をえる。

参考文献

- [1] Artebani, M. and Dolgachev, I.: The Hesse pencil of plane cubic curves, *Ensign. Math.*, **55**(2009), 235–273.
- [2] Atiyah, M.F. and Macdonald, I.: *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969 (新妻訳「可換代数入門」、共立出版、2006年).
- [3] Coxeter, H.S.M.: Desargues configurations and their collineation groups, *Math. Camb. Phil. Soc.* **76**(1975), 227–246.
- [4] Dolgachev, I.: Abstract configurations in algebraic geometry, *Proc. Fano Conference (Torino, 2004)*, Torino Univ., 2005.
- [5] Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S.: *Anschaulich Geometrie*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1932 (芹沢正三訳「直観幾何学」、みすず書房).
- [6] Kempf, G.: *Algebraic Varieties*, Cambridge University Press, 1993.
- [7] Mumford, D.: *Algebraic geometry I, Complex projective varieties*, Springer-Verlag, 1976.
- [8] Reid, R.: *Undergraduate Algebraic Geometry*, Cambridge Univ. Press, 1988 (若林訳「初等代数幾何講義」、岩波書店、1991年).
- [9] Silverman, J.H.: *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*, Springer Verlag, 1994 (鈴木治郎訳「楕円曲線論概説」、シュプリンガー・東京、2003年).